

Modélisation des transferts thermiques couplés à l'aide de la méthode de Boltzmann sur réseau.

A. Mezrhab^{a,*}, H. Naji^b

^a *Faculté des Sciences, Département de Physique, Laboratoire de Mécanique & Energétique, 60000 Oujda, Maroc.*

^b *Ustl/Polytech'lille/Lml UMR 8107 CNRS, Département de Mécanique, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.*

*(auteur correspondant: mezrhab@fso.ump.ma)

Résumé :

Dans cette communication, nous présentons un schéma numérique hybride pour simuler l'interaction entre la convection naturelle et le rayonnement surfacique dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée. Les parois verticales de la cavité sont adiabatiques, tandis que ses parois horizontales supérieure et inférieure sont respectivement froide et chaude. Les vitesses sont déterminées par la méthode de Boltzmann sur réseau et l'équation de l'énergie est discrétisée à l'aide de la méthode des volumes finis. Les systèmes algébriques obtenus sont résolus par la méthode des gradients conjugués. Seul le rayonnement surfacique est pris en compte et les surfaces radiatives sont supposées grises et isotropes en émission/réflexion.

Abstract :

In this communication, we present a hybrid numerical scheme to simulate the interaction between the natural convection and the surface radiation in a differentially heated square cavity. The vertical walls of the cavity are adiabatic, while its horizontal walls top and bottom are cold and hot, respectively. The air velocity is determined by the lattice Boltzmann method and the energy equation is discretized by using a finite volume method. The resulting systems of discretized equations were solved by an iterative procedure based on a preconditioned conjugate gradient method. Only the surface radiation is taken into account and the walls of the enclosure are assumed to be diffuse-grey.

Mots-clefs :

Transfert thermique, volumes finis, méthode Boltzmann sur réseau.

Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité, L/H	x, y	coordonnées cartésiennes, m
g	accélération de la pesanteur, ms^{-2}	X, Y	coordonnées cartésiennes adimensionnelles, $X = x/H, Y = y/H$
H	hauteur de la cavité, m		
k	conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$		
L	longueur de la cavité, m		
Nu	nombre de Nusselt moyen		
Nr	nombre de rayonnement, $\sigma T_c^4 / (k\Delta T/H)$		
Pr	nombre de Prandtl, ν/α		
q_r	densité de flux radiatif, Wm^{-2}		
Q_r	densité de flux radiatif adimensionnelle, $q_r / \sigma T_c^4$		
Ra	nombre de Rayleigh, $g\beta(T_c - T_f)H^3 / \nu\alpha$		
T	température, K		
T_0	température moyenne, $(T_c + T_f)/2, K$		
T_f	température de la paroi froide, K		
T_c	température du cylindre chaud, K		
u, w	composantes de la vitesse, ms^{-1}		
U, V	vitesses adimensionnelles selon x, y , $U = uH/\alpha, W = wH/\alpha$		
			Symboles grecs
			α diffusivité thermique, m^2s^{-1}
			β constante de Boussinesq, K^{-1}
			ΔT différence de température maximale, $(T_c - T_f), K$
			ν viscosité cinématique, m^2s^{-1}
			ρ densité du fluide, $Kg.m^{-3}$
			θ température adimensionnelle, $(T - T_0)/(T_c - T_f)$
			σ constante de Stefan-Boltzmann, $Wm^{-2}K^{-4}$
			Indices
			c chaud f froid

1. Introduction

Les écoulements de convection naturelle en cavité bidimensionnelle ont été largement étudiés. Cet intérêt est dû à leurs applications industrielles dans divers problèmes d'ingénierie comme l'énergie solaire, la thermique de l'habitat et le refroidissement des composants électroniques. Habituellement, les méthodes numériques utilisées pour effectuer ces simulations reposent sur la discrétisation spatiale et temporelle des équations d'évolution macroscopique. Cependant, leurs solutions peuvent être très complexes lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes où la géométrie du milieu est complexe ou lorsqu'on se trouve en présence de plusieurs phases d'un fluide ou de plusieurs fluides. C'est la raison pour laquelle une approche différente dite gaz sur réseau "Lattice Gas Automata" a été développée. Son but est de modéliser l'écoulement d'un fluide au niveau microscopique en termes d'interactions locales entre les particules. Cette méthode possède beaucoup d'avantages : il est plus facile et intuitif de traiter les conditions particulières comme la présence d'obstacles ou l'étude des écoulements multiphasiques. De plus, la répétition successive de collisions et de propagations permet une implémentation facile sur l'ordinateur.

Dans ce papier, nous avons analysé numériquement le transfert thermique par convection naturelle et par rayonnement dans une cavité carrée chauffée par le bas à l'aide de la méthode de Boltzmann sur réseau couplée à la méthode des volumes finis.

2. Formulation mathématique et modèle numérique

La cavité étudiée est présentée sur la figure 1. Les parois latérales sont adiabatiques, la paroi horizontale supérieure est maintenue à une température froide T_f , alors que la paroi horizontale inférieure est portée à une température chaude T_c . On suppose que la géométrie est bidimensionnelle, l'écoulement est laminaire et les propriétés physiques de l'air, à part sa densité, sont constantes et prises à la température moyenne T_o . L'approximation de Boussinesq est supposée vérifiée.

La méthode numérique adoptée est celle des gaz sur réseaux : Gaz de Boltzmann sur réseau qui fait appel à des principes entièrement différents, et qui relève d'une description à échelle quasi-microscopique du fluide. La méthode des "gaz sur réseau" suit le déplacement de milliers de "particules de fluide" qui sont contraintes à se déplacer sur un réseau (qui peut être hexagonal, carré avec diagonales ou autre). Les vitesses sont déterminées par la méthode de Boltzmann sur réseau [1].

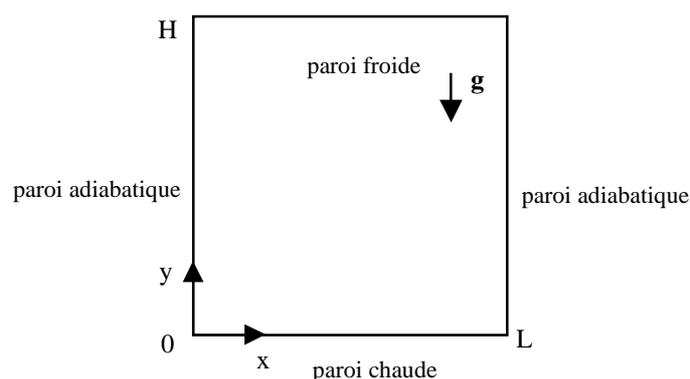


Figure 1. Géométrie étudiée

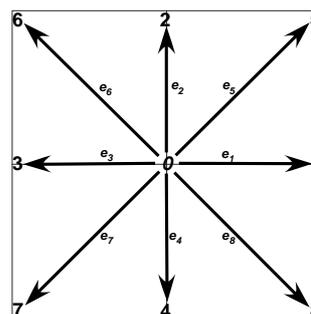


Figure 2 : Modèle D2Q9

2.1. Champs de vitesses

La discrétisation du domaine est faite suivant le modèle D2Q9 basé sur un réseau carré. Chaque motif du réseau est caractérisé par neuf vitesses discrètes (c_i , ($i = 1 \dots, 9$)) représentées sur la figure 2. Le système évolue par pas alternatifs de collision et de propagation suivant l'équation :

$$|f(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1)\rangle = |f(\vec{r}, t)\rangle + \Omega |f(\vec{r}, t)\rangle \quad (1)$$

où f_i est une fonction de distribution d'une particule dans la direction i , \vec{r} est la position de la particule à l'instant t et Ω est l'opérateur de collision. L'état du système peut être représenté par le vecteur $|f(\vec{r}, t)\rangle = (f_1(\vec{r}, t), \dots, f_9(\vec{r}, t))^T$ défini dans un espace des phases ($F = R^9$). Une autre idée, exprimée par D'Humièrre [2], consiste à étendre le vecteur $|f\rangle$ en un vecteur $|m\rangle$ appartenant à un espace des moments ($M = R^9$). Certains de ces moments, comme la densité de masse ρ et les composantes de la quantité de mouvement ρu et ρw , se conservent après la collision. La présence de la force volumique $g\beta\Delta T \theta(\vec{r}, t)$ modifie la conservation de la vitesse verticale dans l'étape de collision, ce qui se traduit par :

$$w^{ac} = w^{bc} + g\beta\Delta T \theta(\vec{r}, t) \quad (2)$$

où w^{ac} et w^{bc} représentent la composante verticale de la vitesse respectivement après et avant la collision.

Les conditions aux limites dynamiques sur les parois de la cavité sont de types 'rebonds', ce qui permet d'obtenir $u = w = 0$ au niveau de toutes les parois de la cavité.

2.2. Champs de température

Les équations de bilan d'énergie et de concentration sont données par :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + W \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

Les conditions aux limites thermiques utilisées sont :

$$\theta = 0.5 \text{ pour } Y = 0 \text{ et } 0 \leq X \leq A$$

$$\theta = -0.5 \text{ pour } Y = 1 \text{ et } 0 \leq X \leq A$$

Au niveau des parois adiabatiques : $X = 0$ ou 1 et $0 \leq Y \leq 1$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} - NrQ_r = 0 \quad (4)$$

où Q_r la densité adimensionnelle du flux radiatif le long de cette surface.

Une étude du maillage a été réalisée et le maillage optimal qui permet d'avoir un bon compromis (précision/temps de calcul) est de 101×101 .

L'équation de l'énergie (Eq. 3) a été discrétisée par une méthode de volumes finis avec un schéma de discrétisation centré pour les termes de transport et les systèmes obtenus ont été résolus par la méthode des gradients conjugués.

Afin de discrétiser l'équation (4), les surfaces radiatives du solide formant la cavité ont été discrétisées en un nombre N de surfaces radiatives. N est le nombre total des surfaces radiatives, qui est égal au nombre total des interfaces entre volumes de contrôles solide et fluide. Par conséquent, la densité adimensionnelle Q_{ri} de flux radiatif perdu par la surface S_i est donnée par :

$$Q_{r,i} = R_i - \sum_{j=1}^N R_j F_{i-j} \quad (5)$$

et la radiosité adimensionnelle est obtenu en résolvant le système:

$$\sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - (1 - \epsilon_i) F_{i-j}) R_j = \epsilon_i \Theta_i^4 \quad (6)$$

où F_{i-j} est le facteur de forme entre les surfaces S_i et S_j . F_{i-j} est déterminé en utilisant une approximation par éléments de frontière, en effectuant l'intégration par méthodes de Monte Carlo [3].

Pour traiter le couplage entre la convection et le rayonnement, les températures de surfaces des parois adiabatiques sont calculées en résolvant l'équation non linéaire (Eq. 4). Cette résolution est effectuée en utilisant une procédure itérative interne avec sous relaxation à chaque pas de temps. A

chaque itération interne (relative au calcul des températures de surfaces), le système linéaire des équations de radiosités (Eq. 6) est résolu par une méthode directe.

Enfin, pour caractériser les transferts de chaleur, le nombre de Nusselt moyen est donné par :

$$Num = \frac{1}{A} \int_0^A \left(- \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{X, Y_w=0} + N_r Q_r (X, Y_w = 0) \right) dX \quad (7)$$

3. Résultats et discussions

Le code a été intensivement exercé sur des problèmes de référence pour vérifier sa validité. Nous rappelons dans le tableau ci-dessous quelques résultats obtenus, en convection naturelle, par notre code en comparaison avec ceux rapportés dans les références [4,5]

	<i>Ra</i>				
	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Présent	1.118	2.242	4.524	8.824	16.490
Réf. [4,5]	1.118	2.243	4.523	8.826	16.510

Quand l'échange de rayonnement est pris en considération, notre code a été validé avec les résultats numériques publiés antérieurement et rapportés par différents auteurs, et l'accord entre le présent et les résultats précédents était très bon dans la référence [6]. Pour cette raison, et pour la brièveté on ne le répète pas ici. Basé sur les études ci-dessus, on a conclu que le code pourrait être correctement appliqué au problème considéré.

En convection naturelle pure, chaque configuration dépend au minimum de 3 paramètres adimensionnels (A , Pr , Ra). La prise en compte du rayonnement thermique nécessite la donnée de quatre autres paramètres (T_0 , ΔT , L , ε). Pr , A et T_0 sont fixés respectivement à 0.71, 1 et 300 K. Dans ces conditions, le terme $g\beta\nu\alpha$ est de l'ordre de $9 \times 10^7 \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ et le nombre de Rayleigh, variant de 10^3 à 10^6 , n'est fonction que de ΔT et L . L'émissivité ε des surfaces radiatives est prise égale à 0 en convection naturelle pure et égale à 1 en présence du rayonnement. Dans cette étude, deux cas ont été considérés : dans un premier temps, nous avons fixé ΔT à 20 K et nous avons calculé L pour chaque valeur de Ra et dans un second temps, nous avons fixé L à 3 cm et ΔT a été calculé pour chaque valeur de Ra . Le nombre de rayonnement Nr est calculé, à son tour, en fonction du nombre de Rayleigh selon que l'on fixe ΔT ou L .

La figure 3 présente les isothermes et les lignes de courant en absence et en présence du rayonnement pour deux nombres de Rayleigh 10^4 et 10^5 .

Dans le cas de la cavité chauffée par la paroi horizontale basse, il a été démontré dans le passé, la présence de solutions multiples en régime permanent [7]. Les nombres de Rayleigh considérés dans cette étude produisent des écoulements monocellulaires avec des rotations possibles dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens inverse.

En mode de convection naturelle combiné au rayonnement thermique ($\varepsilon = 1$), l'inclinaison des isothermes dans les régions se trouvant près des parois adiabatiques est due à l'importance des flux radiatifs. Les lignes de courant montrent que le rayonnement thermique réduit considérablement l'écoulement dans la cavité. En fait, le rayonnement réduit l'écart de températures entre les parois adiabatiques et donc, diminue la vitesse de l'air au voisinage de ces parois.

Le nombre de Nusselt moyen est présenté sur la figure 4. On observe que le nombre de Nusselt moyen augmente sous l'influence des forces de poussée (augmentation de Ra) et du rayonnement thermique. Cela s'explique par le fait que le nombre de Nusselt moyen (Eq. 7) est proportionnel au produit NrQ_r , qui augmente avec Ra , que ce soit lorsqu'on fixe ΔT ou L .

4. Conclusion

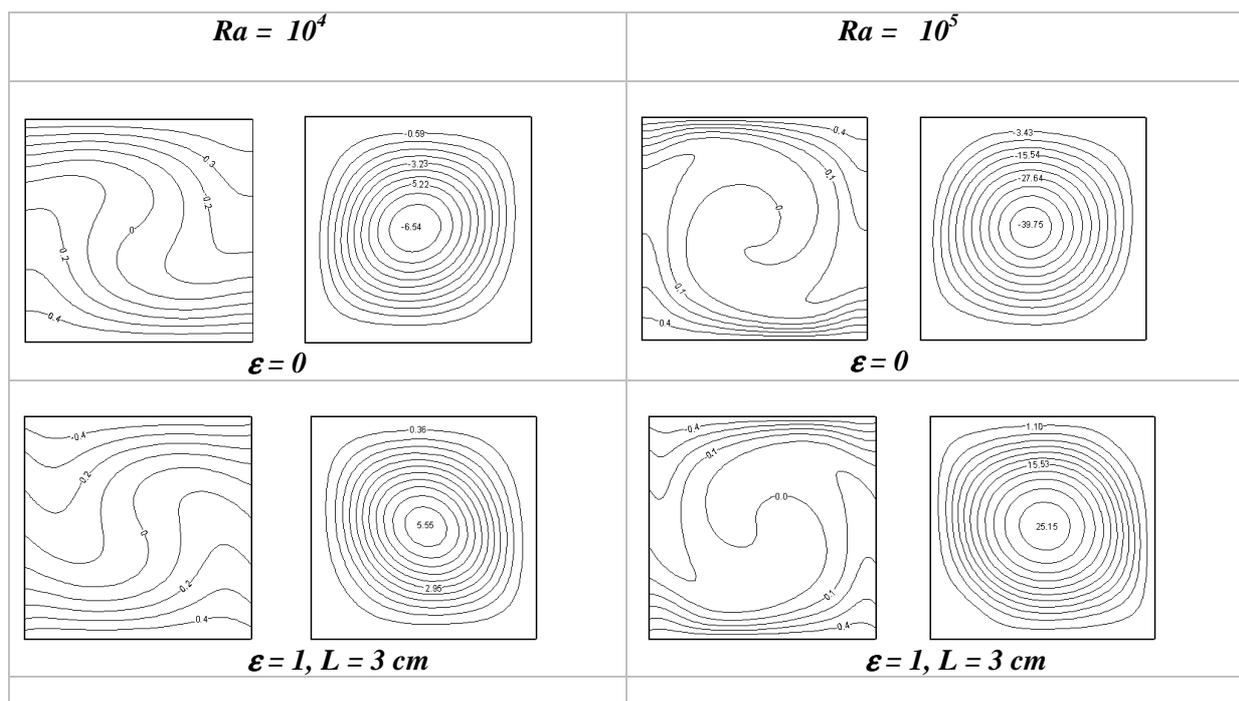
Le couplage convection naturelle rayonnement dans une cavité carrée différentiellement chauffée, dont les parois verticales sont adiabatiques, a été étudié numériquement. La méthodologie numérique utilisée est un schéma hybride basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau combinée à la méthode des volumes finis.

A la lumière de cette étude, les conclusions suivantes ont été formulées :

- 1) Le couplage de la méthode de Boltzmann sur réseau à la méthode des volumes finis donne de très bons résultats,
- 2) Le rayonnement thermique homogénéise la température à l'intérieur de la cavité en réduisant l'écart de température entre les parois adiabatiques. Il réduit la circulation d'air dans la cavité.
- 3) Le rayonnement thermique augmente le transfert de chaleur dans la cavité.

Références

- [1] A. Mezrhab, M. Bouzidi and P. Lallemand, "Hybrid lattice-Boltzmann finite-difference simulation of convective flows", *Computers & Fluids*, vol. 33, pp. 623-641, 2004
- [2] D. d'Humières, Generalized lattice-Boltzmann equations, in : B.D. Shizgal, D.P. Weaver (Eds.), *Rarefied Gas Dynamics : Theory and Simulations*, *Prog. Astronaut. Aeronaut.*, 159, AIAA, Washington, DC, (1992), 450-58.
- [3] A. Mezrhab and M. Bouzidi, "Computation of view factors for surfaces of complex shape including screening effects and using a boundary element ", *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and software*, vol. 22, n° 2, pp. 132-148, 2005
- [4] G. De Vahl Davis, "Natural convection in air in a square cavity: A Bench Mark Numerical Solution", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 3, pp. 249-264, 1983
- [5] P. Le Quéré, "Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number", *Computers & Fluids*, vol. 20, pp. 29-41, 1991
- [6] A. Mezrhab, M. Jami, M. Bouzidi, P. Lallemand, "Analysis of radiation-natural convection in a divided enclosure using the lattice Boltzmann method", *Computers & Fluids*, Vol. 36, n°, pp. 423-434
- [7] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, "Natural convection Heat Transfer in rectangular cavities partially heated from below", *J. Thermophys. Heat Transfer*, vol. 6, n°2, pp. 255-264, 1992



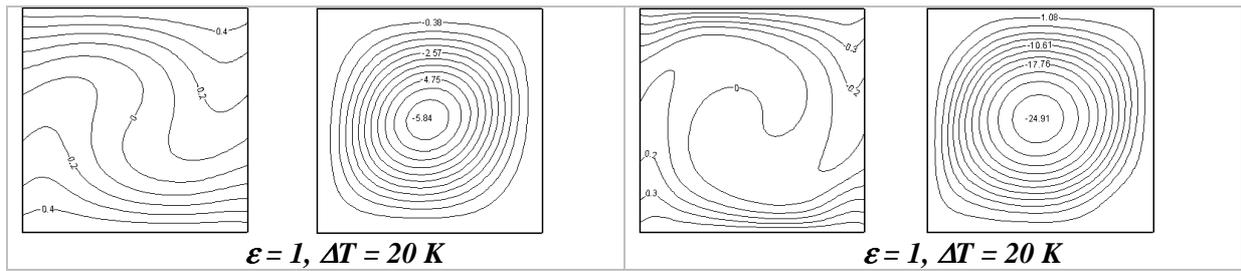


Figure 3: Isothermes et Lignes de courant en absence ($\varepsilon = 0$) et en présence ($\varepsilon = 1$) du rayonnement pour $Ra = 10^4$ et 10^5 .

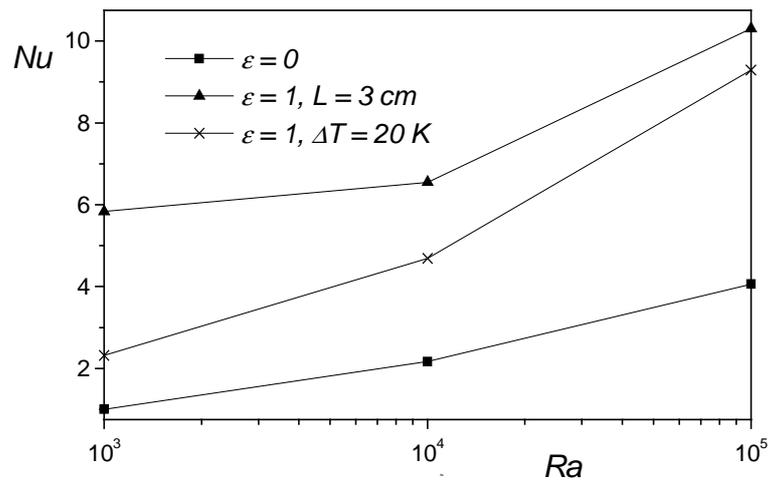


Figure 4 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra .