

Écoulement très lent d'un fluide viscoplastique de Bingham autour d'un cylindre.

Dodji Léagnon Tokpavi, Albert Magnin*, Pascal Jay

Laboratoire de Rhéologie, UMR 5520 (CNRS – UJF – INPG)
BP 53, Domaine Universitaire, 38041 Grenoble Cedex 9, France.
(*albert.magnin@ujf-grenoble.fr)

Résumé :

L'objet de cet article est d'étudier l'écoulement très lent d'un fluide viscoplastique de Bingham autour d'un cylindre en milieu infini. Le domaine des grands nombres d'Oldroyd est particulièrement examiné. La simulation numérique par éléments finis est utilisée avec le modèle de régularisation de Papanastasiou. Aux grands nombres d'Oldroyd, lorsque les effets de plasticité deviennent prépondérants, une couche limite viscoplastique est identifiée autour du cylindre. L'épaisseur minimale de cette couche limite est déterminée et varie en fonction du nombre d'Oldroyd selon une loi puissance. Les différentes zones rigides sont identifiées et caractérisées et le coefficient de traînée calculé en fonction du nombre d'Oldroyd. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats théoriques existants notamment aux prédictions de la théorie de la couche limite viscoplastique et de la théorie de la plasticité.

Abstract :

The aim of this article is to study the very slow flow of a Bingham viscoplastic fluid around a cylinder in infinite medium. The field of high Oldroyd numbers is particularly examined. Finite-elements numerical simulation is used with Papanastasiou's regularisation model. At high Oldroyd numbers, when plasticity effects become preponderant, a viscoplastic boundary layer is identified around the cylinder. The minimal thickness of this boundary layer is determined and varies as function of Oldroyd number according to a law power. The various rigid zones are identified and characterized and the drag coefficient calculated as function of the Oldroyd number. The results are compared with existing theoretical results, in particular the predictions of the viscoplastic boundary layer theory and the plasticity theory.

Mots-clefs : fluide viscoplastique, couche limite, coefficient de traînée, cylindre.

1 Introduction

Malgré les difficultés inhérentes à l'étude de l'écoulement des fluides viscoplastiques, d'importants résultats ont été obtenus ces dernières années. En ce qui concerne l'étude du problème de base de la mécanique des fluides que constitue l'écoulement de fluides viscoplastiques autour d'obstacles, l'accent a été mis plus particulièrement sur la sphère pour laquelle d'intéressantes études ont été réalisées.

Pour ce qui est du cylindre, il est à noter que la plupart des études numériques réalisées sur l'écoulement d'un fluide viscoplastique autour d'un cylindre n'a concerné que le cas asymptotique où les effets de plasticité sont négligeables (cas où le fluide se comporte presque comme un fluide newtonien) et le cas des effets de plasticité relativement faibles. Le deuxième cas asymptotique, celui des effets de plasticité prépondérante où le fluide devient plastique et rigide reste très peu exploré.

L'objectif de la présente étude est donc d'examiner en détail le domaine des grands nombres d'Oldroyd Od (nombre adimensionnel traduisant le rapport des effets de seuil aux effets visqueux) en l'étendant aux aspects cinématiques et dynamiques. Cette étude se fera par

simulation numérique par éléments finis. Les coefficients de traînée seront calculés. L'évolution de la forme, de la taille et de la position des zones rigides sera présentée pour $Od \in [10; 2 \times 10^5]$.

Oldroyd (1947 b) développa la théorie de la couche limite viscoplastique dans laquelle il montre qu'aux très grands nombres d'Oldroyd, le matériau devient rigide partout sauf dans une fine couche où les effets visqueux et plastiques sont tous les deux importants. Il désigna cette fine couche par le nom de "couche limite viscoplastique". Piau (2002) et Piau et Debiante (2004), ont réexaminé cette théorie et en ont apporté une correction. Ils ont particulièrement étudié le cas de l'écoulement très lent d'un fluide viscoplastique de Bingham autour d'une plaque plane. Ils ont notamment exprimé, analytiquement et en fonction du nombre d'Oldroyd, l'évolution de l'épaisseur de la couche limite viscoplastique le long de la plaque et la force de traînée. Nous examinerons nos résultats à la lumière de cette théorie.

2 Formulation du problème

Le domaine d'écoulement est constitué d'un fluide viscoplastique de Bingham s'écoulant très lentement autour d'un cylindre de diamètre d situé à mi-chemin entre deux plaques planes distantes de $2L$ (figure 1) de sorte que le milieu est considéré comme infini. La longueur de l'écoulement vaut $2H$. La vitesse du fluide loin du cylindre est constante et égale à U .

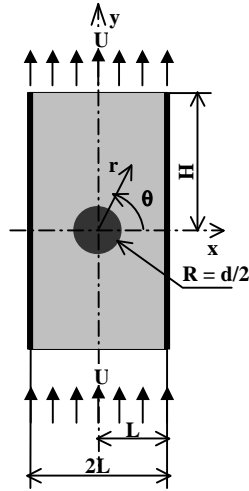


FIG. 1 – Représentation schématique du problème.

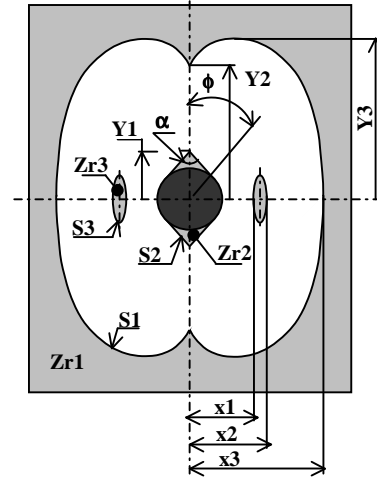


FIG. 2 – Définition des zones rigides (en gris) et fluides (en blanc), des surfaces seuil et des caractéristiques dimensionnelles des zones rigides.

Le fluide est incompressible et l'écoulement est supposé permanent et isotherme. En absence d'inertie les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} - \nabla p = 0 \quad (2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (3)$$

où \vec{V} est le vecteur vitesse, p la pression, $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy et $\underline{\underline{\tau}}$ sa partie déviatrice.

La loi de comportement du fluide de Bingham est présentée comme suit :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\tau}} = 2 \left(K + \frac{\tau_0}{2\dot{\underline{\underline{\gamma}}}} \right) \dot{\underline{\underline{\gamma}}} & \text{si } \tau > \tau_0 \\ \dot{\underline{\underline{\gamma}}} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (4)$$

où τ_0 et K sont respectivement la contrainte seuil et le coefficient de consistance du fluide, $\dot{\underline{\underline{\gamma}}}$ le tenseur des taux de déformation, $\dot{\underline{\underline{\gamma}}} = \sqrt{1/2 \text{tr}(\dot{\underline{\underline{\gamma}}}^2)}$ et $\tau = \sqrt{1/2 \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}^2)}$ sont respectivement le second invariant du tenseur des taux de déformation et le second invariant du tenseur déviateur de contrainte.

Toutes les longueurs sont adimensionnalisées par le diamètre d du cylindre, les vitesses par la vitesse U , les pressions et contraintes par $K(U/d)$. Le principal nombre adimensionnel du problème est le nombre d'Oldroyd (Od) défini par :

$$Od = \frac{\tau_0 d}{KU} \quad (5)$$

Le coefficient de traînée plastique est présenté comme suit :

$$C_D^* = \frac{F}{A \tau_0} \quad (6)$$

avec F , la force de traînée exercée par le fluide sur le cylindre. $A = ld$ désigne la surface frontale du cylindre et l sa longueur.

La loi de comportement du fluide de Bingham a été régularisée en utilisant l'approche de Papanastasiou (1987). La loi de comportement devient alors :

$$\underline{\underline{\tau}} = 2 \left\{ K + \frac{\tau_0 (1 - e^{(-m\dot{\underline{\underline{\gamma}})})})}{2\dot{\underline{\underline{\gamma}}}} \right\} \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \quad (7)$$

avec m (en seconde) le paramètre de régularisation.

La condition limite imposée à la paroi du cylindre est une condition de non-glissement.

Dans le domaine d'écoulement, toutes les zones dans lesquelles l'inégalité $\tau \leq \tau_0 (1 \pm \varepsilon)$ est vérifiée sont considérées comme rigides. Dans le cas contraire elles sont fluides. ε est un petit nombre qui dépend de la configuration de l'écoulement et du paramètre de régularisation m . Les différentes zones rigides et surfaces seuil sont identifiées comme montré sur la figure 2.

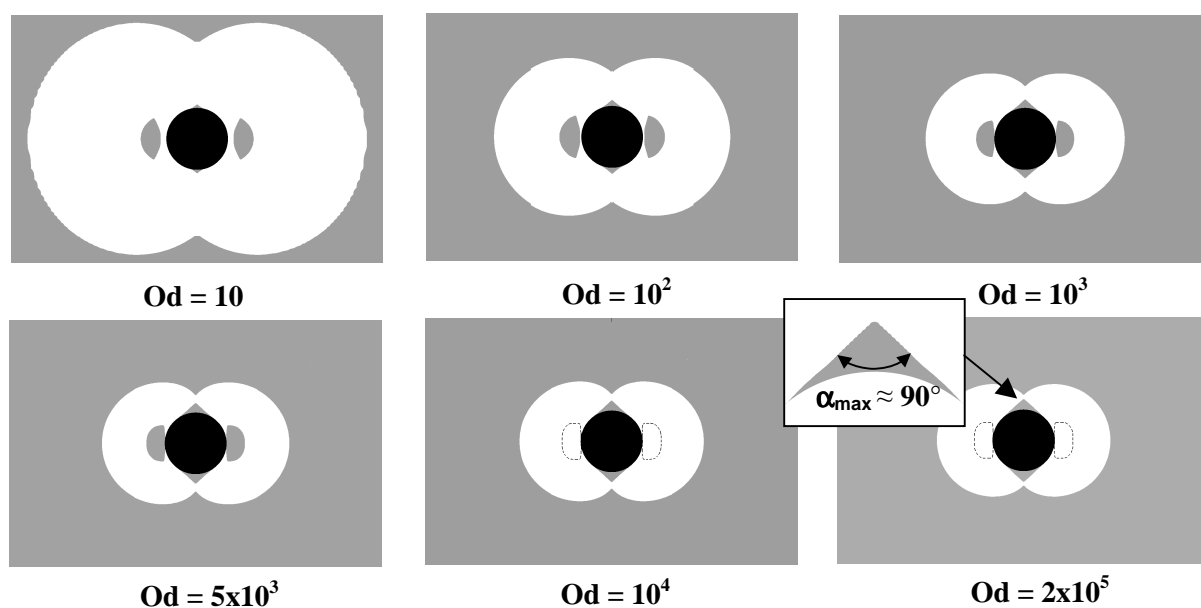
Les calculs sont effectués avec le logiciel d'éléments finis Polyflow (Fluent Inc). Les itérations cessent lorsque la variation maximale de la vitesse relative est inférieure à 10^{-4} .

3. Résultats et discussion

La recherche du milieu infini (L et H) et des différents paramètres numériques nous a permis de retenir $L/d = H/d = 5$, $\varepsilon = 0$ et $m = 10^4$. Les maillages retenus sont ceux pour lesquels les surfaces seuil convergent. Signalons que pour $Od > 5 \times 10^3$, cette convergence n'a pas été obtenue pour $S3$ pour des raisons de raffinement de maillage. Toutefois, la grandeur $x1$ (voir figure 2) reste non affectée. La grandeur $x2$ ne sera par contre présentée que pour $Od \leq 5 \times 10^3$.

3.1 Zones rigides

La Figure 3 décrit l'évolution globale des différentes zones rigides en fonction de Od .

FIG. 3 – Evolution globale des zones rigides en fonction de Od .

Entourant la zone cisailée, l'enveloppe rigide $Zr1$ augmente en taille lorsque Od augmente, entraînant la diminution de la surface seuil $S1$. Cette dernière a la même forme (genre de tore tronqué) que celle proposée par Ansley et Smith (1967) dans le cas d'une sphère et reprise par Adachi et Yoshioka (1973) pour un cylindre avec l'analyse des lignes de glissement.

Pour ce qui est des noyaux rigides $Zr3$, chacun d'eux a une forme presque elliptique aux faibles valeurs de Od ($Od \leq 10^2$). De $Od = 10^2$ jusqu'à $Od = 5 \times 10^3$, ils semblent évoluer en une forme de demi-lune. Comme annoncé plus haut, puisque le raffinement n'a pas permis d'avoir la forme finale de $Zr3$ pour Od supérieur à 5×10^3 , les formes proposées pour $Od = 10^4$ et $Od = 2 \times 10^5$ sont à prendre avec précaution.

Les zones rigides statiques $Zr2$ quant à elles, augmentent en taille jusqu'à $Od = 10^4$ environ pour se stabiliser après. Elles gardent la même forme triangulaire avec les côtés adjacents au sommet légèrement convexes aux faibles valeurs de Od et devenant rectilignes aux grands Od . Les angles α et ϕ (figure 2) atteignent respectivement les valeurs maximales $\alpha_{max} \approx 90^\circ$ et $\phi_{max} \approx 38^\circ$ aux très grands Od .

3.2 Couche limite viscoplastique

Le confinement du fluide entre le cylindre et la surface seuil $S3$ aux grands Od fait montre, à cet endroit, de la présence d'une couche limite viscoplastique. La variation de l'épaisseur minimale δ_0 de cette couche limite viscoplastique à l'équateur ($\theta = 0^\circ$) en fonction de Od (voir figure 4) est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\delta_0}{d} = 0.3.Od^{-0.54} \quad Od \in [10; 2 \times 10^5] \quad (8)$$

Cette relation se compare bien avec celle proposée théoriquement par Piau (2002) au milieu d'une plaque plane et qui est donnée par :

$$\delta = a.Od^{-0.5} \quad (9)$$

avec a la demi-longueur de la plaque.

Dans le concept de la couche limite viscoplastique [Oldroyd (1947 b) et Piau (2002)], l'hypothèse de couche limite viscoplastique suppose que l'épaisseur de cette couche est très petite devant la caractéristique géométrique de l'obstacle (ici le diamètre d du cylindre) et la longueur d'écoulement L_e (longueur de la zone fluide le long du bloc cylindre-Zr2). Pour tenir compte de ce critère, nous avons choisi δ_0/d et δ_0/L_e de l'ordre de 10^{-3} . Avec $Od = 7.5 \cdot 10^3$, nous obtenons δ_0/d et δ_0/L_e respectivement égaux à 0.0024 et 0.0013. Ces valeurs trouvées sont bien de l'ordre de 10^{-3} . La courbe de tendance recalée sur $Od \in [7.5 \times 10^3 ; 2 \times 10^5]$ donne (figure 4) :

$$\frac{\delta_0}{d} = 0.29 \cdot Od^{-0.53} \quad Od \in [7.5 \times 10^3 ; 2 \times 10^5] \quad (10)$$

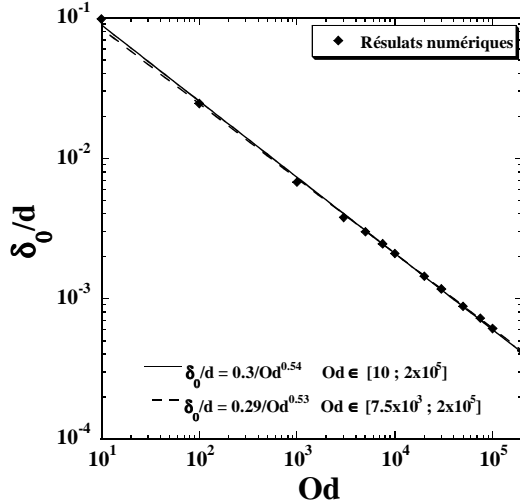


FIG. 4 – Epaisseur minimale de la couche limite viscoplastique δ_0 obtenue à l'équateur ($\theta = 0^\circ$) en fonction de Od .

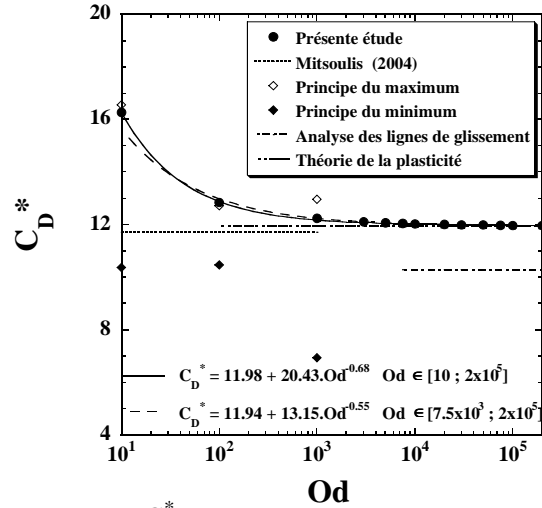


FIG. 5 – C_D^* en fonction de Od . Principes du maximum et du minimum et Analyse des lignes de glissement (Adachi et Yoshioka (1973)), théorie de la plasticité (Randolph et Houlsby (1984)).

3.3 Coefficient de traînée

La figure 5 présente l'évolution des coefficients de traînée C_D^* en fonction de Od pour la présente étude et pour d'autres études réalisées par d'autres auteurs.

En séparant les effets visqueux des effets de plasticité, le coefficient de traînée C_D^* peut s'écrire en fonction de Od de la manière suivante :

$$C_D^* = C1 + C2 \cdot Od^{C3} \quad (11)$$

avec $C1$, $C2$ et $C3$ des constantes et $C1$ la traînée lorsque les effets de plasticité deviennent prépondérants. Par regression non-linéaire de nos résultats nous obtenons :

$$C_D^* = 11.98 + 20.43 \cdot Od^{-0.68} \quad Od \in [10 ; 2 \times 10^5] \quad (12)$$

et

$$C_D^* = 11.94 + 13.64 \cdot Od^{-0.55} \quad Od \in [7.5 \times 10^3 ; 2 \times 10^5] \quad (13)$$

En nous référant à l'équation 13, on peut donc définir un coefficient de traînée à l'infini $C_{D\infty}^*$ (c'est à dire pour Od devenant très grand) tel que $C_{D\infty}^* = C1 = 11.94$.

Le tableau 1 compare les valeurs de $C_{D\infty}^*$ obtenues par d'autres auteurs avec celle obtenue par la présente étude. Les différents résultats sont du même ordre de grandeur. La présente

étude, effectuée dans un plus large champ de Od , permet de préciser jusqu'à $Od = 2 \times 10^5$ la valeur de $C_{D\infty}^*$ calculée par Mitsoulis (2004). Cette valeur obtenue par simulation numérique est plus élevée que celle obtenue par l'analyse des lignes de glissement.

Auteurs	$C_{D\infty}^*$
Présente étude	11.94
Mitsoulis (2004)	11.7
Adachi et Yoshioka (1973) Méthode des lignes de glissement	10.28

TAB. 1 – Coefficients de trainée $C_{D\infty}^*$ obtenus par différents auteurs pour le cas d'un cylindre dans un fluide viscoplastique de Bingham.

4. Conclusions

Ce travail décrit le problème de base de la mécanique des fluides que constitue l'écoulement très lent d'un fluide viscoplastique autour d'un cylindre. Le domaine des grands nombres d'Oldroyd où l'effet de plasticité devient prépondérant a été exploré. La présence d'une couche limite viscoplastique est mise en évidence et l'évolution de son épaisseur minimale a été donnée en fonction du nombre d'Oldroyd.

Le coefficient de traînée a également été déterminé et son expression asymptotique empirique a été proposée en fonction du nombre d'Oldroyd.

Références

- Adachi, K., Yoshioka, N. 1973 On creeping flow of a visco-plastic fluid past a circular cylinder. *Chem. Eng. Sci.* **28**, 215–226.
- Ansley, R.W., Smith, T.N. 1967 Motion of spherical particles in a Bingham plastic. *AIChE J.* **13**, 1193–1196.
- Mitsoulis, E. 2004 On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects. *Chem. Eng. Sci.* **59**, 789–800
- Oldroyd, J.G. 1947 b 2D plastic flow of a Bingham solid – a plastic boundary layer theory for slow motion. *Proc. Comb. Phil. Soc.* **43**, 383–395.
- Papanastasiou, T.C. 1987 Flow of materials with yield, *J. Rheol.* **31**, 385–404.
- Piau, J.M. 2002 Viscoplastic boundary layer. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **102**, 193–218.
- Piau, J.M., Debiante, K. 2004 The adhesive or slippery flat plate viscoplastic boundary layer for a shear-thinning power-law viscosity. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **117**, 97–107.
- Randolph, M.F., Houlsby, G.T. 1984 The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil. *Géotechnique*. **34**, 4 613–623.