

Remodelage orthotrope de l'os Résultats numériques pour le cas tridimensionnel

Alexandre Watzky*, Jean Larrat** & Salah Naili*

* B2OA – UMR 7052 CNRS

* / ** Faculté des Sciences & Technologie – Université Paris 12 – Val-de-Marne
61 avenue du Général de Gaulle, 94010 CRÉTEIL Cedex
watzky@univ-paris12.fr

Résumé :

L'essentiel des propriétés de résistance mécanique de l'os trabéculaire est donné par celles de sa matrice solide. À l'échelle macroscopique, l'os est assimilé à un milieu continu dont le comportement local, caractérisé par le tenseur de rigidité \mathbf{K} , est linéairement élastique, orthotrope et qui évolue, en fonction des sollicitations subies, afin de tendre vers des caractéristiques fonctionnelles optimales.

Le critère retenu consiste, en fonction des contraintes imposées, à faire évoluer le tenseur de rigidité en rapprochant les axes d'orthotropie des directions principales de déformation et modifiant les coefficients d'élasticité afin de faire tendre les déformations principales vers une zone admissible.

Dans le cas tridimensionnel, la rotation des axes d'orthotropie utilise un seul angle. L'évolution des coefficients d'élasticité dans le sens d'un comportement optimal est ensuite obtenue par minimisation d'une fonctionnelle assurant que \mathbf{K} a la forme souhaitée.

Abstract :

The mechanical strength properties of trabecular bone are mostly given by its solid matrix. At a macroscopic scale, bone can be considered homogeneous, linearly elastic and orthotropic, and characterized by its rigidity tensor \mathbf{K} which, depending on external sollicitations, evolves toward optimal functional characteristics.

In our model, the rigidity tensor evolves such that, for imposed stresses, the orthotropy directions rotate towards the principal strains directions, and the strains tend to fall within an admissible domain.

The rotation in the tridimensional case needs a single angle parametrization. The modification of the elasticity parameters towards an optimal behavior is then obtained by minimizing a functional which ensures an appropriate form for \mathbf{K} .

Mots-clefs :

Os ; remodelage ; anisotropie

1 Introduction

L'os trabéculaire est constitué d'une matrice solide présentant une microstructure, qui lui confère l'essentiel de ses propriétés de résistance mécanique, remplie d'un fluide interstitiel. Le remodelage est l'évolution de cette microstructure par apposition ou résorption de matière. Comme la plupart des milieux vivants, l'os tend vers des caractéristiques fonctionnelles optimales. Pour l'os, dont le rôle structurel est majeur, l'idée directrice a été formulée par Wolff (1892) en "les contraintes mécaniques sont responsables de l'architecture de l'os" et "l'os a une résistance mécanique maximale pour une masse minimale".

On se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus à l'échelle mésoscopique (particules de quelques mm [Harrigan *et al.* (1988)]) où l'os peut être considéré homogène. Les caractéristiques de la microstructure sont alors données par le tenseur de rigidité \mathbf{K} , qui évolue en fonction des contraintes imposées (*stimulus*).

2 Comportement de l'os trabéculaire

Le comportement de l'os en petites déformations étant linéairement élastique orthotrope, il est caractérisé par le tenseur de complianc $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = \tilde{\tilde{\mathbf{K}}}^{-1}$ tel que $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}' = \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}' \tilde{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}'$ et qui, exprimé dans la base des directions d'orthotropie notée par un "prime", prend la forme :

$$\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}' = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G_{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où nous avons adopté la notation tensorielle de Kelvin, indiquée par un "tilde". Les tenseurs des contraintes ou des déformations s'écrivent sous la forme vectorielle $\tilde{\tilde{\mathbf{S}}} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)^T = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, \sqrt{2} S_{23}, \sqrt{2} S_{31}, \sqrt{2} S_{12})^T$ ($\tilde{\tilde{\mathbf{S}}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}', \tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}'$).

3 Le modèle de remodelage

L'optimisation de la microstructure, donc l'évolution de $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}$, doit satisfaire aux trois conditions suivantes [Watzky & Nàili (2004)] :

- (i) le matériau reste orthotrope ;
- (ii) les directions d'orthotropie se rapprochent des directions principales de déformation ;
- (iii) les déformations principales tendent vers des valeurs "admissibles".

3.1 Rotations

Nous avons à considérer trois bases (orthonormées directes) respectivement associées au matériau (base matérielle *fixe* constituée des \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$), aux directions d'orthotropie (trièdre des \mathbf{e}_i') et aux déformations principales (trièdre des $\mathbf{e}_i^{\mathcal{E}}$).

La base dans laquelle seront exprimées les différentes grandeurs sera indiquée par l'exposant correspondant.

Notant $\overline{\mathbf{Q}}$ le tenseur de rotation dans l'espace euclidien à trois dimensions, les rotations sont effectuées dans l'espace à six dimensions avec le tenseur $\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}}$ dont les composantes en fonctions de celles de $\overline{\mathbf{Q}}$, sont données par [Mehrabadi & Cowin (1990)] :

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Q}}} = \begin{pmatrix} Q_{11}^2 & Q_{12}^2 & Q_{13}^2 & \sqrt{2} Q_{12} Q_{13} & \sqrt{2} Q_{13} Q_{11} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{12} \\ Q_{21}^2 & Q_{22}^2 & Q_{23}^2 & \sqrt{2} Q_{22} Q_{23} & \sqrt{2} Q_{23} Q_{21} & \sqrt{2} Q_{21} Q_{22} \\ Q_{31}^2 & Q_{32}^2 & Q_{33}^2 & \sqrt{2} Q_{32} Q_{33} & \sqrt{2} Q_{33} Q_{31} & \sqrt{2} Q_{31} Q_{32} \\ \sqrt{2} Q_{21} Q_{31} & \sqrt{2} Q_{22} Q_{32} & \sqrt{2} Q_{23} Q_{33} & Q_{22} Q_{33} + Q_{32} Q_{23} & Q_{21} Q_{33} + Q_{31} Q_{23} & Q_{21} Q_{32} + Q_{31} Q_{22} \\ \sqrt{2} Q_{31} Q_{11} & \sqrt{2} Q_{32} Q_{12} & \sqrt{2} Q_{33} Q_{13} & Q_{12} Q_{33} + Q_{32} Q_{13} & Q_{11} Q_{33} + Q_{31} Q_{13} & Q_{11} Q_{32} + Q_{31} Q_{12} \\ \sqrt{2} Q_{11} Q_{21} & \sqrt{2} Q_{12} Q_{22} & \sqrt{2} Q_{13} Q_{23} & Q_{12} Q_{23} + Q_{22} Q_{13} & Q_{11} Q_{23} + Q_{21} Q_{13} & Q_{11} Q_{22} + Q_{21} Q_{12} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si dans le cas des contraintes planes [Watzky & Nàili (2003)], les rotations se faisaient aussi dans le plan, dans le cas général tridimensionnel, il convient de se doter d'un paramétrage simple où la rotation est caractérisée par le vecteur $\alpha \mathbf{k}$ où α est l'angle de rotation et \mathbf{k} unitaire [Watzky (1991)] (voir fig. 1).

Deux trièdres étant donnés, la détermination du tenseur de rotation exprimé en fonction des trois paramètres choisis est donnée dans [Watzky & Naïli (2005)] à partir des produits scalaires entre les vecteurs des deux trièdres, les indéterminations étant levées en ayant choisi l'ordre des e_i^ε afin que le trièdre qu'ils constituent soit le plus proche de celui des e_i' .

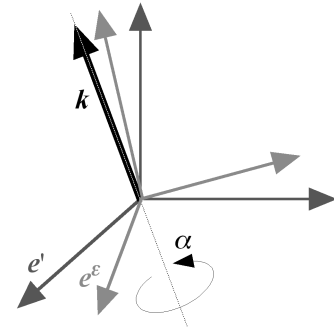


FIG. 1 – Rotation d'un trièdre.

3.2 Déformations principales

Les domaines de déformations principales "admissibles" $D^\pm = [\varepsilon_{si}^\pm ; \varepsilon_{ss}^\pm]$ et les valeurs moyennes correspondantes $\varepsilon_m^\pm = \frac{1}{2}(\varepsilon_{si}^\pm + \varepsilon_{ss}^\pm)$, où + et - correspondent au signe de la déformation principale considérée, définissent les seuils à partir desquels les coefficients du tenseur de compliance sont modifiés et sont représentés fig. 2.

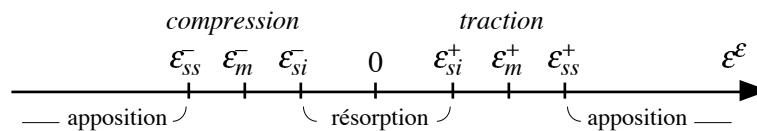


FIG. 2 – Les seuils de remodelage.

4 La procédure itérative

Le problème est discrétisé en temps où, partant du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}(N)$ et du tenseur de compliance $\tilde{C}'(N)$, on calcule le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}(N)$ pour déduire la nouvelle expression $\tilde{C}'(N+1)$ en deux étapes.

4.1 Rotation des axes d'orthotropie

La première étape consiste à faire tourner les directions d'orthotropie de sorte que les $e_i'(N+1)$ se retrouvent compris entre les $e_i'(N)$ et les $e_i^\varepsilon(N)$ (le tenseur de compliance, alors noté $\tilde{C}'(N+)$, a la même expression que $\tilde{C}'(N)$ mais exprimé dans la base des $e_i'(N+1)$).

Pour ce faire, on détermine la rotation $\alpha_{DO} k_{DO}$ permettant de passer des $e_i^\varepsilon(N)$ aux $e_i'(N+1)$ et on applique aux axes d'orthotropie la rotation $\lambda \alpha_{DO} k_{DO}$ où $0 \leq \lambda < 1$.

4.2 Modification des coefficients d'élasticité

Les déformations principales sont ensuite recalculées avec $\bar{\sigma}(N)$ et $\tilde{C}'(N+)$. $\tilde{C}'(N+1)$ est obtenu en modifiant les composantes de $\tilde{C}'(N+)$ de sorte que le tenseur reste orthotrope (forme (1) dans la base des $e_i'(N+1)$) et que les déformations principales se rapprochent des domaines D^\pm donnés.

Les trois premiers termes diagonaux de $\tilde{C}'(N+1)$ sont donc calculés suivant les relations ($i = 1$ à 3) :

$$\frac{1}{C_{ii}^{\varepsilon}(N+1)} - \frac{1}{C_{ii}^{\varepsilon}(N)} = \pm \tau_a \left[\varepsilon_i^{\varepsilon}(N+) - \varepsilon_m^{\pm} \right] \quad \text{si} \quad \begin{cases} \varepsilon_1^{\varepsilon}(N+) > \varepsilon_{ss}^+ \\ \text{ou} \\ \varepsilon_1^{\varepsilon}(N+) < \varepsilon_{ss}^- \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{1}{C_{ii}^{\varepsilon}(N+1)} - \frac{1}{C_{ii}^{\varepsilon}(N)} = \pm \tau_r \left[\varepsilon_i^{\varepsilon}(N+) - \varepsilon_m^{\pm} \right] \quad \text{si} \quad \varepsilon_{si}^- < \varepsilon_i^{\varepsilon}(N+) < \varepsilon_{si}^+$$

D'autre part, afin d'assurer l'admissibilité thermodynamique et l'orthotropie du matériau, les coefficients de Poisson sont construits suivant la relation :

$$v_{ij}(N+1) = \sqrt{v_{ij}(N) v_{ji}(N) \frac{E_i(N+1)}{E_j(N+1)}} \quad i, j = 1 \text{ à } 3 \quad (4)$$

et les modules de cisaillement recalculés de sorte que :

$$C_{kk}' = \frac{1}{4} (C_{ii}' + C_{jj}') \quad \text{avec } i, j, k = 4 \text{ à } 6 \quad (5)$$

Afin d'extraire les modules d'Young des $C_{ii}^{\varepsilon}(N+1)$ ($i = 1$ à 3) donnés par (3), on construit la fonction de coût $S = S(E_1, E_2, E_3)$:

$$S = \sum_{i=1}^3 \left| C_{ii}^{\varepsilon}(+) - C_{ii}^{\varepsilon}(N+1) \right| \quad (6)$$

que l'on minimise pour un jeu de $E_i(+)$ initialement quelconque et les valeurs $C_{ii}^{\varepsilon}(+)$ correspondantes où les coefficients de Poisson $v_{ij}(+)$ vérifient (4).

5 Résultats et discussions

Les coefficients d'élasticité initiaux (donc le tenseur $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1}$) sont choisis avec des valeurs typiques pour l'os trabéculaire [Katz & Meunier (1987)] : $E_1 = E_3 = 14$ GPa , $E_2 = 22$ GPa ; $v_{12} = v_{32} = 0,23$, $v_{13} = v_{31} = 0,4$, $v_{21} = v_{23} = 0,36$ et $G_{12} = G_{23} = G_{31} = 0,161$ GPa , les axes d'orthotropie coïncidant avec les directions matérielles.

Les paramètres de remodelage sont $\lambda = 0,1$ et $\tau_a = \tau_r = 10^{12}$ Pa⁻¹ .

Nous avons représenté figures 3 et 4 les évolutions des déformations principales, des modules d'Young et des angles que font les trois trièdres entre eux pour une compression constante où $\sigma_o = 10^6$ Pa :

- uniaxiale faisant un angle de 30° avec e_1 dans le plan (e_1, e_2) (fig. 3, rotation d'axe e_3) ;
- biaxiale, somme du cas précédent et d'une compression uniaxiale faisant un angle de 30°

avec e_1 dans le plan (e_1, e_3) , donnée par le tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_o}{4} \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

exprimé dans la base matérielle (fig. 4).

Les itérations correspondent au temps, la vitesse de remodelage pouvant être ajustée *via* les paramètres λ et τ , dont les valeurs relatives permettent respectivement de rendre compte du réalignement de la microstructure (rotations) et de sa consolidation ou fragilisation (évolution des modules d'Young).

Les contraintes appliquées, ici constantes, font converger le tenseur d'élasticité vers ce qu'il est convenu d'appeler le "*remodeling equilibrium*". La valeur importante de λ choisie conduit à un alignement rapide des axes d'orthotropie avec les directions de déformations principales ($\alpha_{OD} \rightarrow 0$, α_{DM} et α_{OM} tendant vers les mêmes valeurs) alors que l'évolution des modules d'Young n'est pas totalement achevée (sauf pour E_3). On pourra d'ailleurs noter que la rotation initialement importante se traduit ici par une augmentation, en valeur absolue, des déformations principales au début.

L'exposé mettra justement l'accent sur l'influence des valeurs relatives des paramètres de remodelage.

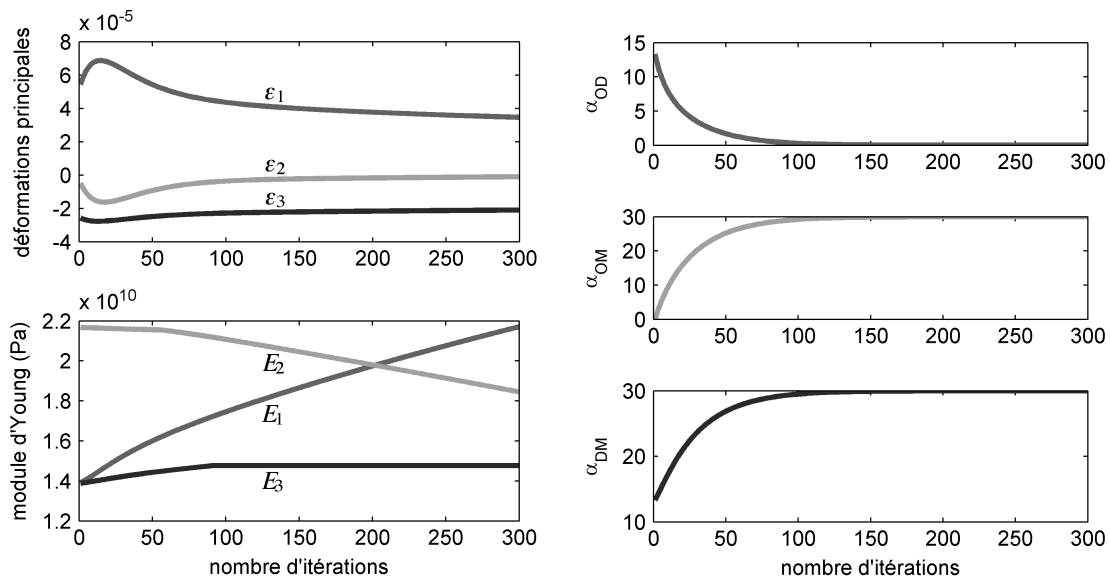


FIG. 3 – Evolution des déformations principales, des angles (en degrés) et des modules d'Young pour une contrainte dans le plan (e_1' , e_2').

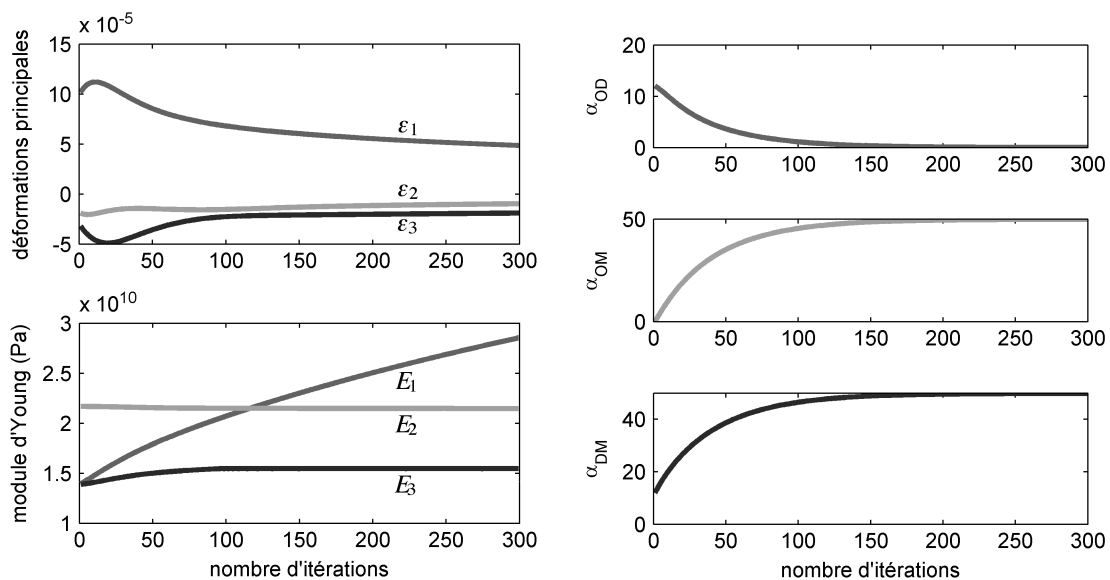


FIG. 4 – Evolution des déformations principales, des angles (en degrés) et des modules d'Young.

6 Conclusion

Nous avons un modèle de remodelage permettant de caractériser localement (à l'échelle mésoscopique) l'évolution des caractéristiques mécaniques de l'os trabéculaire en fonction de la contrainte subie et qui peut être variable. Les principales difficultés sont dans la valeur à attribuer au pas de temps (itérations) ainsi que dans la définition des seuils. Il convient par ailleurs de bien choisir les valeurs relatives des paramètres de remodelage qui permettent respectivement de rendre compte du réalignement de la microstructure et de sa consolidation ou fragilisation.

Références

- Harrigan, T. P., Jasty, M., Mann, R. W. & Harris, W. H. 1988 Limitations of the continuum assumption in cancellous bone. *J. Biomech.* **21**, 269-275.
- Katz, J. L. & Meunier, A. 1987 The elastic anisotropy of bone. *J. Biomech.* **32**, 1063-1070.
- Mehrabadi, M. M. & Cowin, S. C. 1990 Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **43**, 15-41.
- Wolff, J. 1892. Das Gesetz der Transformation der Knochen. A. Hirschwald, Berlin.
- Watzky, A. 1991 Displacement of slender axisymmetric bodies: A convenient change of basis. *J. Applied Math. Phys. (ZAMP)* **42**, 623-627.
- Watzky, A. & Naïli, S. 2003. Un modèle de remodelage orthotrope de l'os. *16ème Congrès Français de Mécanique*, communication n° 2-264, Nice.
- Watzky, A. & Naïli, S. 2004. Orthotropic bone remodeling: case of plane stresses. *Mech. Research Com.* **31**, 617-625.
- Watzky, A. & Naïli, S. 2005. Remodelage orthotrope de l'os - Cas tridimensionnel. *17ème Congrès Français de Mécanique*, communication n° 1206, Troyes.