

Un critère macroscopique approché pour les milieux plastiques anisotropes contenant des cavités sphéroïdales

V. Monchiet, E. Charkaluk, D. Kondo

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML)
UMR 8107, 59655 Villeneuve d'Ascq, France
vmonchiet@hotmail.com

Résumé :

On propose une extension du critère de Gologanu et Leblond [2, 3] initialement proposé pour les milieux plastiques rigides (régis par le critère de von Mises) et contenant des cavités sphéroïdales au cas d'une matrice anisotrope (régie par le critère quadratique de Hill (1948)). L'étude a été réalisée dans le cadre de l'analyse limite d'un sphéroïde creux contenant une cavité sphéroïdale confocale et en considérant comme champ test celui utilisé par [2, 3]. On montre que dans le cas des cavités de géométrie cylindrique et sphérique, le critère obtenu se réduit aux critères anisotropes existants. Dans le cas général d'une cavité non sphérique dans une matrice de Hill, la précision du critère approché obtenu est évaluée au travers de comparaisons avec des résultats numériques.

Abstract :

We propose an extension of the Gologanu and Leblond [2, 3] criterion initially proposed for a rigid-plastic medium (obeying von Mises criterion) containing spheroidal cavities to the case when the matrix is anisotropic (obeying quadratic Hill's (1948) anisotropic yield criterion). This study has been performed in the framework of the limit analysis of an hollow spheroidal unit cell containing a confocal spheroidal cavity and by considering the trial velocity fields used by [2, 3]. It is shown that for cylindrical and spherical void geometries, the obtained criterion reduces to existing anisotropic Gurson-like yield criteria. The accuracy of the proposed approximate yield criterion for plastic anisotropic containing non-spherical voids is assessed through comparison with numerical results.

Key-words :

Ductile porous metals, anisotropy, spheroidal cavities

1 Introduction

Depuis les travaux pionniers de Gurson qui a établi des expressions analytiques du critère de plasticité pour les milieux rigides plastiques contenant des cavités sphériques ou cylindriques, de nombreuses études ont permis des extensions de ce critère. Il s'agit d'une part de la prise en compte de la forme des cavités [2, 3] en étendant l'approche classique par analyse limite de la sphère creuse au cas d'un sphéroïde creux contenant une cavité sphéroïdale confocale au bord extérieur. La plupart des alliages métalliques manifestant un caractère anisotrope, des extensions du critère original de Gurson au contexte d'une matrice plastique anisotrope régie par le critère quadratique de Hill ont par la suite été proposées dans le cas de cavités cylindrique [6] et sphérique [1]. Le principal objectif de cette étude est d'étendre les résultats précédents à la prise en compte simultanée de la forme des cavités et de l'anisotropie plastique. Dans la section 2, on s'attachera d'abord à rappeler le cadre classique de l'analyse limite d'un sphéroïde creux tel qu'étudié par [2, 3] puis à décrire la méthodologie adoptée pour son extension à l'anisotropie plastique. Enfin, après avoir présenté le critère de plasticité macroscopique approché nous considérons les cas particuliers de cavités sphérique et cylindrique. Une première validation du critère sera effectuée dans le cas général de cavités non sphériques plongées dans une matrice

anisotrope en effectuant des comparaisons avec des résultats numériques pour les champ de vitesses test considérés ici.

2 Concepts de base et méthodologie

2.1 La cellule élémentaire

Considérons une cellule élémentaire (Ω) de forme sphéroïdale, d'axe de révolution \underline{e}_3 , contenant une cavité également sphéroïdale d'axe \underline{e}_3 et confocale au bord extérieur. Les sphéroïdes extérieur et intérieur sont respectivement définis par les demi-axes a_2 et a_1 (suivant \underline{e}_3), et les demi-axes b_2 et b_1 (suivant \underline{e}_1 et \underline{e}_2). $a_2 > b_2$ (ou $a_1 > b_1$) correspond à une cavité allongée tandis que $a_2 < b_2$ (ou $a_1 < b_1$) est associé à une cavité aplatie. On note par c la distance focale et par e_1, e_2 , respectivement l'excentricité du bord extérieur et de la cavité intérieure. e_1, e_2 sont définis par : $c = \sqrt{|a_1^2 - b_1^2|}$ et $e_1 = c/a_1$ pour des sphéroïdes allongés et $e_1 = c/b_1$ pour des sphéroïdes aplatis. On désigne également par e_2 l'excentricité de la cavité extérieure, définie par $e_2 = c/a_2$ dans le cas d'un sphéroïde allongé et $e_2 = c/b_2$ dans le cas d'un sphéroïde aplati.

La porosité f est définie par : $f = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2}$.

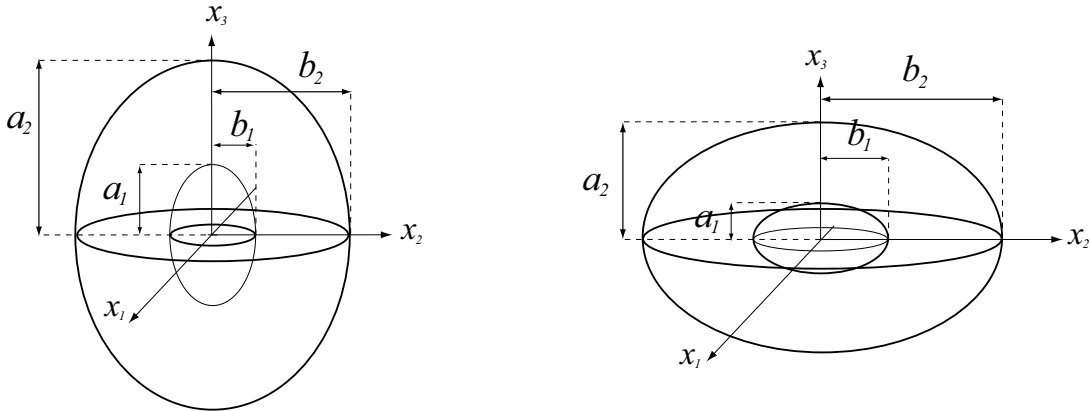


Figure 1: Schematic showing (a) prolate and (b) oblate spheroidal void embedded in a confocal spheroid relative to a Cartesian coordinate system (x_1, x_2, x_3).

Pour cette classe de géométrie il est judicieux d'introduire le système de coordonnées sphéroïdales λ, φ, θ défini, dans le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) par :

$$\rho = b \sin(\varphi) \quad x_3 = a \cos(\varphi) \quad (1)$$

Les iso- λ surfaces définissent des sphéroïdes confocaux, de demi-axes $a = c \cosh(\lambda)$ et $b = c \sinh(\lambda)$ et d'excentricité $e = c/a$, pour une cavité allongée. Pour une cavité aplatie, les iso- λ surfaces correspondent à des sphéroïdes confocaux, de demi-axes $a = c \sinh(\lambda)$, $b = c \cosh(\lambda)$ et d'excentricité $e = c/b$. L'iso-surface $\lambda = \lambda_1$ définit le bord de la cavité tandis que l'iso-surface $\lambda = \lambda_2$ correspond au bord extérieur de la cellule. Les vecteurs unitaires de la base sphéroïdale sont :

$$\underline{e}_\lambda = \frac{1}{L_\lambda} \{a \sin(\varphi) \underline{e}_\rho + b \cos(\varphi) \underline{e}_3\} \quad \underline{e}_\varphi = \frac{1}{L_\lambda} \{b \cos(\varphi) \underline{e}_\rho - a \sin(\varphi) \underline{e}_3\} \quad (2)$$

avec $L_\lambda = \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + b^2 \cos^2(\varphi)}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $\underline{e}_\rho = \cos(\theta)\underline{e}_1 + \sin(\theta)\underline{e}_2$.

2.2 Le champ de vitesse dans la matrice

Le champ de vitesse dans la matrice solide, noté \underline{v} , est classiquement décomposé en une première composante, $\underline{A}\cdot\underline{x}$, correspondant à un taux de déformation uniforme \underline{A} , et un champ hétérogène décrivant l'expansion et le changement de forme de la cavité, noté \underline{v}^E :

$$\underline{v} = \underline{A}\cdot\underline{x} + B\underline{v}^E(\lambda, \varphi, \theta) \quad (3)$$

Lee et Mear [5] ont proposé, pour \underline{v}^E , une famille de champs axisymétriques adaptée à l'étude de la croissance d'une cavité sphéroïdale. Cette classe de champs a par la suite été utilisée dans le cadre de l'analyse limite pour la détermination de la surface de charge des milieux poreux contenant des cavités sphéroïdales [2, 3]. Une critique peut être formulée quant à l'utilisation des mêmes champs dans un contexte anisotrope; toutefois, compte tenu de la difficulté supplémentaire introduite ici, c'est à dire la prise en compte de l'anisotropie plastique, on se restreint au champ adopté par Gologanu et al. [2, 3] et qui s'écrit :

$$\underline{v}^E = \frac{c^3}{bL_\lambda} \left\{ 1 + (1 - 3\alpha) \frac{3 \cos^2(\varphi) - 1}{2} \right\} \underline{e}_\lambda - \frac{3c^3(a^2 - b^2)}{4ab^2L_\lambda} (1 - \alpha - \beta) \sin(2\varphi) \underline{e}_\varphi \quad (4)$$

α et β sont deux fonctions de l'excentricité dont les expressions sont données en annexe.

Considérant des taux de déformation homogène au contour de la cellule élémentaire, $\underline{v}(\lambda_2) = \underline{D}\cdot\underline{x}$, on vérifie aisément que \underline{A} et B s'écrivent :

$$\underline{A} = \underline{D} - D_m \underline{T}; \quad B = \frac{a_2 b_2^2}{c^3} D_m \text{ avec : } \underline{T} = \frac{3}{2} (1 - \alpha_2) \mathbf{1} - \frac{3}{2} (1 - 3\alpha_2) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (5)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité d'ordre deux et où on a noté $\alpha_2 = \alpha(e_2)$.

2.3 Détermination du critère de plasticité macroscopique

On considère une cellule élémentaire décrite par des sphéroïdes confocaux tels que présentés en section 2.1 et obéissant au critère quadratique de Hill :

$$F(\underline{\sigma}) = \frac{3}{2} \underline{\sigma} : \mathbb{M} : \underline{\sigma} - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (6)$$

où $\underline{\sigma}$ est le champ de contraintes microscopique. \mathbb{M} est un tenseur d'ordre 4 correspondant à l'anisotropie plastique. Ce tenseur présente toutes les symétries (majeure et mineures) et satisfait la condition d'incompressibilité ($M_{iikl} = 0$ pour $k, l = 1, 2, 3$)¹. Ce tenseur est de nature orthotrope, dans les axes du matériau, toutefois, l'orientation de la cavité sphéroïdale peut être choisie de manière arbitraire par rapport aux axes d'orthotropie du matériau et dans ce cas présente une anisotropie générale, le cas particulier $\mathbb{M} = \mathbb{K}$ constitue celui d'une matrice de von Mises.

Pour une matrice parfaitement plastique régie par le critère de Hill (6), La dissipation macroscopique, $\Pi(\underline{D})$, est définie classiquement comme la moyenne sur cellule de la dissipation microscopique :

$$\Pi(\underline{D}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega - \omega} \sigma_0 d_{eq} dV \quad (7)$$

où $|\Omega| = \frac{4\pi}{3} a_1 b_1^2$ représente le volume de la cellule élémentaire (matrice+vide) et $\Omega - \omega$ le domaine occupé par la matrice plastique. \mathbb{H} est un tenseur d'ordre quatre, anisotrope, défini par

¹la règle de sommation sur i est appliquée

$\mathbb{H} : \mathbb{M} = \mathbb{K}$; outre les conditions de symétrie (majeure et mineures), \mathbb{H} satisfait également la condition d'incompressibilité de la matrice, $H_{iikl} = 0$ pour $k, l = 1, 2, 3$. De manière classique, la surface de charge macroscopique est ensuite déduite de la dissipation macroscopique :

$$\Sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial D} \quad (8)$$

3 Une expression approchée de la surface de charge macroscopique

3.1 Expression générale du critère de plasticité

Le critère de plasticité macroscopique s'écrit alors sous la forme [7] :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2(1-h_2\zeta)} \left[h_2\eta^2\Sigma_p^2 + \zeta\Sigma_q^2 + 2\eta\Sigma_p\Sigma_q \right] \\ + 2(1+g)(f+g) \cosh \left\{ \frac{\kappa\Sigma_p}{\sigma_0} \right\} - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

où $g = \frac{c^3}{\chi a_2 b_2^2}$ est une porosité fictive, $\Sigma_q = \frac{1}{2}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) - \Sigma_{33}$ et les paramètres η , ζ , κ et χ sont donnés en annexe. La dépendance du critère (9) vis à vis de l'anisotropie plastique de la matrice s'illustre d'une part par la définition de Σ_{eq} qui s'écrit $\Sigma_{eq}^2 = \frac{3}{2}\Sigma : \mathbb{M} : \Sigma$ mais également dans la définition de κ (14) qui dépend de h_1 , h_2 et h_3 (fonctions des composantes du tenseur \mathbb{H}) et par la présence de h_2 dans (9) :

$$h_1 = \frac{1}{4}(2H_{11} + 2H_{22} + 2H_{66} - H_{33}); \quad h_2 = \frac{3}{2}H_{33}; \quad h_3 = \frac{1}{2}(H_{44} + H_{55}) \quad (10)$$

3.2 Cas particuliers des cavités sphériques et cylindriques

Considérons le cas de la sphère creuse, constituant un cas particulier de la cavité allongée et de la cavité aplatie, correspondant à $e_1 \rightarrow 0$ et $e_2 \rightarrow 0$. On a dans ce cas $g = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}$ et $\Sigma_p = \Sigma_m$. Le critère de plasticité (9) macroscopique s'écrit donc :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \kappa \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad \text{avec} \quad : \quad \kappa = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2h_1 + h_2 + 2h_3}} \quad (11)$$

On retrouve ainsi le résultat déjà établi par Benzerga et al. [1].

Le cas de la cavité cylindrique est obtenu avec $e_1 \rightarrow 1$ et $e_2 \rightarrow 1$, et par conséquent $\eta = \zeta = 0$. Σ_p est donné par $\Sigma_p = (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2$. On vérifie alors que le critère de plasticité macroscopique se réduit à :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{h_1}} \frac{(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})}{\sigma_0} \right\} - 1 - f^2 = 0 \quad (12)$$

qui coïncide parfaitement avec le critère établi par [6].

3.3 Applications dans le cas de cavités non sphéroïdales en milieu plastique anisotrope

On propose maintenant des comparaisons, dans le cas de cavités aplatie ou allongée, du critère (9) avec des solutions exactes, obtenues numériquement. Ces dernières sont issues de la solution

numériques du problème d'analyse limite (7) avec les champs de vitesse considérés dans cette étude (4). On considère un chargement axisymétrique dans les axes de la cavité sphéroïdale $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ et $\Sigma_{12} = \Sigma_{13} = \Sigma_{23} = 0$ si bien que $\Sigma_q = \Sigma_{11} - \Sigma_{33}$. Sur les figures 2 et 3 sont respectivement tracés les critères macroscopiques de plasticité dans le cas d'une cavité allongée (rapport d'aspect $a_1/b_1 = 5$) et d'une cavité aplatie (rapport d'aspect $b_1/a_1 = 5$); pour chacun des cas étudiés, la porosité est choisie égale à $f = 0.1$ et $f = 0.01$. A titre de comparaison, ont été représentés sur ces figures les critères dans le cas isotrope et anisotrope; les coefficients d'anisotropie adoptés pour les applications numériques sont issus de [1]: $M_{11} = 0.733$, $M_{22} = 0.57$, $M_{33} = 0.499$, $M_{44} = 3.669$, $M_{55} = 1.141$, $M_{66} = 2.2$. On observe un effet significatif de l'anisotropie plastique.

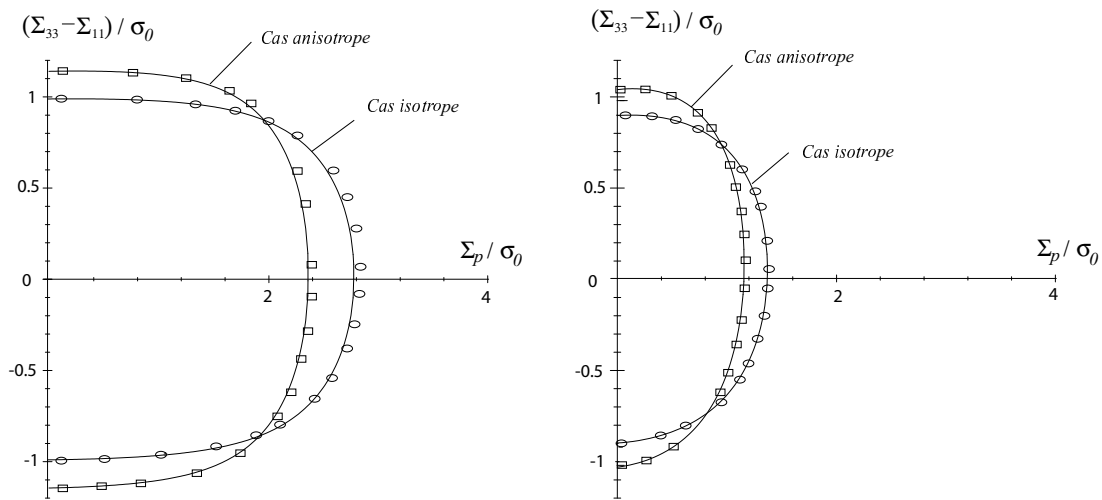


Figure 2: Cavité allongée avec un rapport d'aspect $a_1/b_1 = 5$ et une porosité : a) porosité $f = 0.01$ b) porosité $f = 0.1$. Comparaison du critère (9) dans le cas isotrope et anisotrope (en trait plein) avec les solutions exactes obtenues numériquement (carrés pour l'anisotrope et cercles pour l'isotrope).

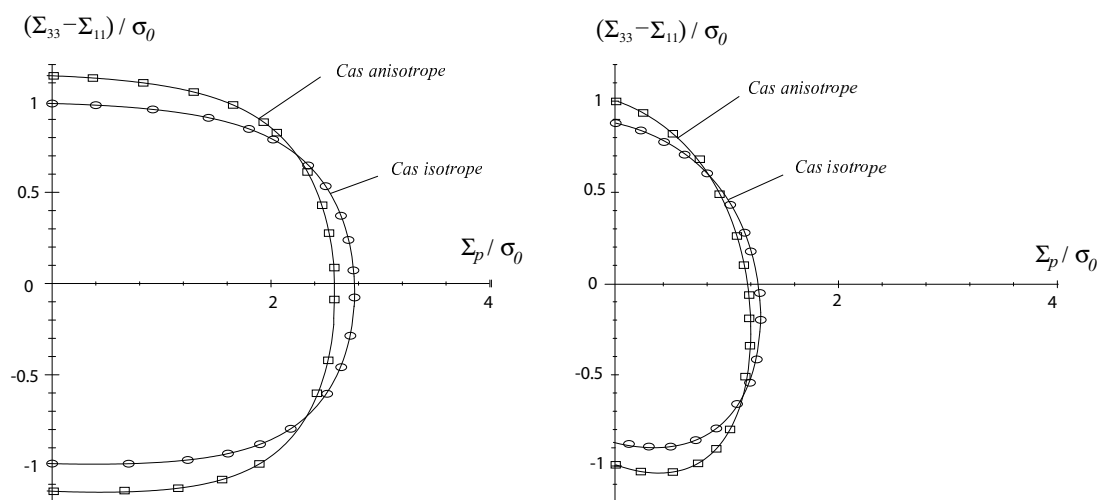


Figure 3: Cavité aplatie avec un rapport d'aspect $b_1/a_1 = 5$ et une porosité : a) porosité $f = 0.01$ b) porosité $f = 0.1$. Comparaison du critère (9) dans le cas isotrope et anisotrope (en trait plein) avec les solutions exactes obtenues numériquement (carrés pour l'anisotrope et cercles pour l'isotrope).

References

- [1] **A.A. Benzerga, J. Besson.**
Plastic potentials for anisotropic porous solids. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 20 : 397-434, 2001.
- [2] **M. Gologanu, J.B. Leblond.**
Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(11) : 1723-1754, 1993.
- [3] **M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, J. Devaux.**
Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *J. Engrg. Mat. Tech.*, 116 : 290-297, 1994.
- [4] **A.L. Gurson,** Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I. - Yield criterion and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mat. Tech.* 99, 2-15, 1977.
- [5] **B.J. Lee, M.E. Mear,** Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *J. Mech. Phys. Solids* 40, 1805-1836, 1992.
- [6] **K. Liao, J. Pan, S. Tang,** Approximate yield criteria for anisotropic porous ductile sheet metals. *Mech. Materials*, 26 : 213-226, 1997.
- [7] **V. Monchiet and C. Gruescu and E. Charkaluk and D. Kondo,** Approximate yield criteria for anisotropic metals with prolate or oblate voids. *C.R. Mécanique*, 334 : 431-439, 2006.
- [8] **V. Monchiet.**
Contributions à la modélisation micromécanique de l'endommagement et de la fatigue des métaux ductiles. Thèse de doctorat de l'université de Lille1, 2006.

Annexe

α et β sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha(e) &= \frac{ab^2}{c^3} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{c}{a} \right\} - \frac{b^2}{c^2}; & \beta(e) &= (1 - 3\alpha) \frac{a^2}{c^2} \quad (\text{prolate void}) \\ \alpha(e) &= -\frac{ab^2}{c^3} \operatorname{arctan} \left\{ \frac{c}{a} \right\} + \frac{b^2}{c^2} & \beta(e) &= -(1 - 3\alpha) \frac{a^2}{c^2}; \quad (\text{oblate void}) \end{aligned} \quad (13)$$

les paramètres η , ζ , κ et χ qui interviennent dans l'expression du critère sont définis par :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\kappa^2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)}{(1-f)}; & \zeta &= \frac{\kappa^2(1+g)(f+g)(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(1-f)^2} \\ \kappa &= 3 \left[\frac{3(1+g)(f+g)}{2f(1-f)} \left[(\beta_1 - f\beta_2)(h_1 + 3h_2 - 4h_3) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 6 \left\{ \alpha_1(1 - \alpha_1) - f\alpha_2(1 - \alpha_2) \right\} h_2 + \left\{ 1 - \alpha_1 - f(1 - \alpha_2) \right\} (h_1 - 3h_2 + 4h_3) \right] \right]^{1/2} \\ \chi &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi^2 + \frac{32}{3}} \end{aligned} \quad (14)$$