

Modélisation de l'écoulement de fluides en loi puissance en milieux fibreux anisotropes

Z. Idris^a, C. Geindreau^a, L. Orgéas^a, J.-F. Bloch^b, & J.-L. Auriault^a

^aLaboratoire Sols-Solides-Structures (3S), CNRS - Universités de Grenoble (UJF-INPG)
BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9

^bLaboratoire de Génie des Procédés Papetiers (LGP2), Ecole Française de Papeterie (INPG)
38000 Grenoble

Résumé :

L'écoulement de fluide en loi puissance à travers des milieux fibreux anisotropes est étudié en s'appuyant sur les résultats théoriques obtenus par la méthode d'homogénéisation des structures périodiques. Afin de déterminer la structure de la loi d'écoulement, des simulations numériques ont été réalisées sur des volumes élémentaires représentatifs d'un milieu fibreux modèle 2D constitué d'un arrangement carré de fibres parallèles de sections circulaires ou elliptiques. Enfin une méthodologie, basée sur l'étude de courbes d'iso-dissipation mécanique ainsi que la théorie de représentation des fonctions tensorielles, est proposée afin de formuler la loi d'écoulement macroscopique. Cette méthodologie est illustrée sur les résultats numériques obtenus.

Abstract :

The flow of power-law fluids through fibrous media is investigated using the homogenization method for periodic structures with multiple scale expansions. To determine the complete structure of the macroscopic flow law, numerical simulations have to be performed on representative elementary volume of porous media. In this paper, this has been achieved on 2D periodic arrays of parallel fibers with elliptical cross section of different aspect ratios. A novel methodology is proposed to establish the macroscopic tensorial seepage law within the framework of the theory of anisotropic tensor functions and using mechanical iso-dissipation curves. This methodology is illustrated through our numerical results.

Mots-clefs :

fluide non-Newtonien ; milieux poreux ; perméabilité

1 Introduction

Les écoulements de fluides non-Newtoniens dans les milieux poreux anisotropes concernent de nombreux domaines comme par exemple, la mise en forme des matériaux composites, l'impression du papier, l'exploitation de ressources naturelles comme le pétrole. Si dans le cas de fluides Newtoniens des extensions de la loi de Darcy ont depuis longtemps été proposées et sont largement utilisées, on recense en revanche très peu de modèles tensoriels d'écoulement dans le cas de fluides non-Newtoniens en milieux poreux anisotropes. Les travaux existants ne sont valables que pour des microstructures fibreuses élémentaires (Woods et al., 2003), et même dans ce cas, présentent des domaines de validité restreints (Idris et al., 2004; Orgéas et al., 2006). Suite à ce constat, une méthode permettant de formuler les lois d'écoulement macroscopiques est proposée. Cette méthode s'appuie d'une part sur les résultats théoriques obtenus par la méthode d'homogénéisation des structures périodiques et d'une autre part sur l'étude de courbes d'iso-dissipation mécanique ainsi que sur la théorie de représentation des fonctions tensorielles (Boehler, 1987). Son application au cas des milieux fibreux modèles étudiés dans ce travail, illustre les capacités du modèle d'écoulement macroscopique ainsi construit, et ce, dans un large domaine en terme de sollicitations, de rhéologie du fluide et de microstructures.

2 Microstructures étudiées

Nous nous intéressons à l'écoulement lent d'un fluide incompressible purement visqueux en loi puissance, dont la viscosité μ , *i.e.* $\mu = \mu_0 \dot{\gamma}^{n-1}$ où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement, au travers un milieu fibreux anisotrope. Les milieux fibreux modèles considérés sont constitués d'arrangements carrés de fibres parallèles de sections circulaires ou elliptiques. Le rapport de forme des sections est noté $r = b/a$. La compacité du milieu est $c = \pi a^2/l^2$.

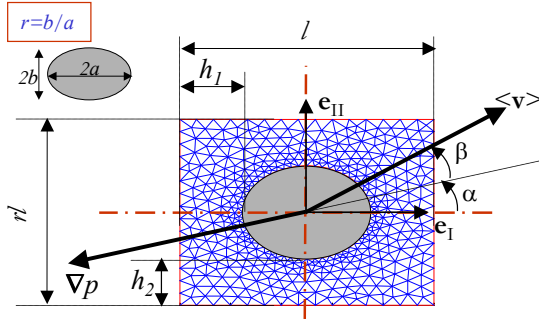


FIG. 1 – Arrangement carré de cylindres à section droite elliptiques. Le VER utilisé pour la simulation est donné par le maillage d'éléments finis.

En s'appuyant sur les résultats théoriques obtenus par homogénéisation (Auriault et al., 2002; Idris et al., 2004; Orgéas et al., 2006), on peut montrer que la loi d'écoulement au sein de ce milieu, *i.e.* la relation entre le gradient de pression macroscopique ∇p et la vitesse moyenne macroscopique $\langle \mathbf{v} \rangle$ peut être obtenue en résolvant sur un volume élémentaire représentatif (VER), le problème aux limites suivant :

$$2\mu_0 \nabla \cdot (\dot{\gamma}^{n-1} \mathbf{D}) - \nabla \tilde{p} - \nabla p = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{adherence à la paroi}, \quad (3)$$

où \mathbf{D} est le tenseur de vitesse de déformation. Les inconnues, *i.e.* la vitesse microscopique \mathbf{v} et la fluctuation de la pression \tilde{p} , sont périodiques. Afin de déterminer la loi d'écoulement, des simulations numériques 2D (code éléments finis COMSOL) sur des VER (figure 1) ont été réalisées en imposant un gradient de pression ∇p qui fait un angle α avec l'axe de symétrie \mathbf{e}_I puis en calculant la vitesse moyenne $\langle \mathbf{v} \rangle$ correspondante. Quand $n = 1$, on peut montrer théoriquement que la loi macroscopique d'écoulement est isotrope si $r = 1$ et orthotrope si $r \neq 1$. Quand $n \neq 1$, les résultats numériques montrent que de manière générale, la vitesse de filtration $\langle \mathbf{v} \rangle$ n'est pas alignée avec le gradient de pression macroscopique, sauf lorsque celui-ci se situe dans les axes de symétrie. L'ensemble de ces résultats montre que le couplage entre la rhéologie du fluide et la microstructure est complexe pour l'écoulement hors axes de symétrie. Afin de décrire ces couplages, nous proposons dans la suite d'établir la forme générale de la loi d'écoulement macroscopique, en s'appuyant sur les résultats de la théorie des représentations des fonctions tensorielles et les courbes d'isodissipation mécaniques.

3 Courbes d'isodissipation

On peut montrer théoriquement par la méthode de changement d'échelle utilisée que compte tenu du type de fluide étudié (fluide Newtonien en loi puissance), il est possible de définir un potentiel macroscopique de dissipation visqueuse $\Omega(\langle \mathbf{v} \rangle)$ proportionnel à la puissance mécanique macroscopique dissipée $\mathcal{P}(\langle \mathbf{v} \rangle)$:

$$\mathcal{P} = -\mathbf{f}(\langle \mathbf{v} \rangle) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = -\nabla p \cdot \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (4)$$

Dans le cas particulier des microstructures 2D étudiées, les courbes d'isodissipation peuvent être tracées dans l'espace des invariants de la vitesse (I_I, I_{II}) définis par (Boehler, 1987) : $I_i = \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{M}_i \cdot \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, $i = I, II$ où les \mathbf{M}_i sont appelés tenseurs de microstructure et les \mathbf{e}_i sont les axes d'orthotropie. La figure 2 présente les courbes d'isodissipation déduites des simulations numériques obtenues pour deux valeurs de rapport de forme r , deux compacités de fibres c et différentes valeurs de n . Ces figures montrent que :

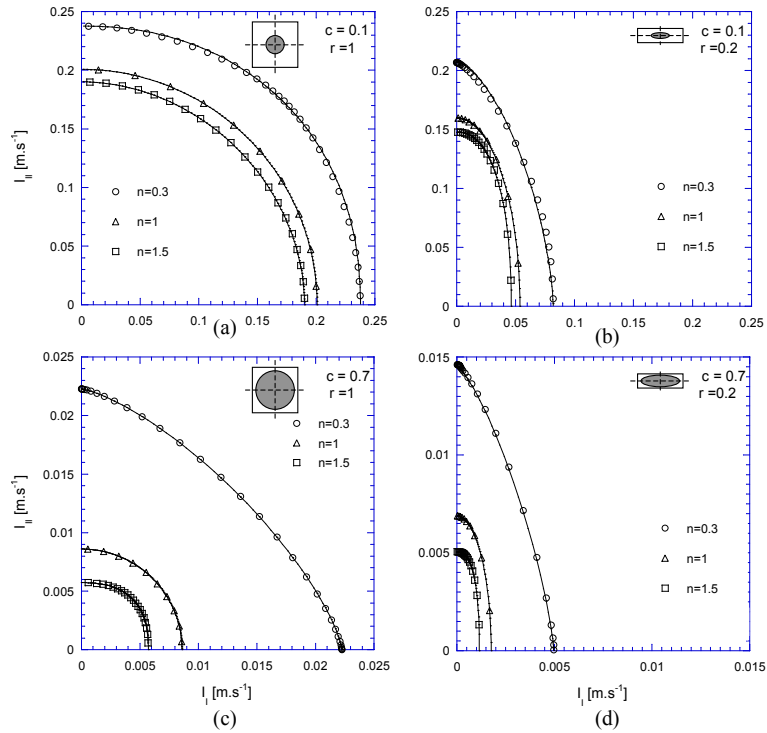


FIG. 2 – Courbes d'isodissipation mécanique obtenues pour deux compacités ($c = 0.1$ et 0.7), $l = 1$ m, deux rapports de forme ($r = 1$ et 0.2), $\mu_0 = 1 \text{ Pa s}^n$, $\mathcal{P}_0 = 1 \text{ W m}^{-3}$. Les marques représentent les résultats numériques. Les lignes continues sont l'ajustement de (8) avec les valeurs de m présentées dans la figure 3.

- quand $r = 1$ et $n = 1$, les courbes d'isodissipation sont circulaires (*cf.* figure 2-a) : ceci est une conséquence directe de l'isotropie de la loi d'écoulement dans cette situation.
- quand $r \neq 1$, les courbes d'isodissipation sont étirées verticalement : ceci caractérise l'anisotropie de la loi d'écoulement. Cette anisotropie est directement liée à la taille des entre-fer : $2h_2$ est plus petit que $2h_1$ (*cf.* la figure 1) si bien que l'écoulement dans la direction de \mathbf{e}_{II} est plus facile que dans la direction \mathbf{e}_I .
- la courbure des isodissipations dépend de n : la forme des isodissipations est proche de celle d'un losange pour les fluides rhéo-fluidifiants ($n < 1$) et d'un rectangle pour des fluides rhéo-épaississants ($n > 1$).

4 Règle de normalité

Nous avons vérifié numériquement que la force $\mathbf{f} = \nabla p$ respecte la règle de normalité (Orgéas et al., 2006). Par conséquent cette force peut s'écrire (Lemaitre and Chaboche, 1994) :

$$\mathbf{f} = \nabla p = - \frac{\partial \Omega(\langle \mathbf{v} \rangle)}{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}, \quad (5)$$

où Ω est un potentiel de dissipation visqueuse. La relation précédente fixe ainsi un cadre de modélisation intéressant : la force \mathbf{f} associée au vecteur vitesse $\langle \mathbf{v} \rangle$ est normale à la surface d'iso-dissipation mécanique tracée dans l'espace des vitesses. On peut choisir alors d'exprimer Ω en fonction d'une norme v_{eq} de la vitesse appelée "vitesse équivalente" :

$$\mathbf{f} = - \frac{\partial \Omega}{\partial v_{eq}} \frac{\partial v_{eq}}{\partial \langle \mathbf{v} \rangle} = f_{eq} \frac{\partial v_{eq}}{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}, \quad (6)$$

où f_{eq} est une force de résistance "équivalente" telle que $\mathcal{P} = -f_{eq}v_{eq}$. La vitesse équivalente v_{eq} dépend des invariants (I_I, I_{II}) . En tenant compte de cette propriété, la loi d'écoulement (6) d'un fluide en loi puissance au sein d'un milieu poreux orthotrope 2D quelconque peut se mettre sous la forme (Orgéas et al., 2006) :

$$\mathbf{f} = -\frac{\zeta\mu_0}{l_c^2} \left(\frac{\zeta v_{eq}}{l_c}\right)^{n-1} \left(\frac{v_{eq}}{I_I} \frac{\partial v_{eq}}{\partial I_I} \mathbf{M}_I + \frac{v_{eq}}{I_{II}} \frac{\partial v_{eq}}{\partial I_{II}} \mathbf{M}_{II}\right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (7)$$

où ζ est une constante telle que $\zeta = v_c/v_{eq}$, et où v_c, l_c sont respectivement la vitesse et la longueur caractéristique à l'échelle microscopique. En introduisant la relation (7) dans (6), on peut montrer que les courbes d'issodissipations correspondent aussi à des courbes iso-vitesse équivalente.

5 Vitesse équivalente

Pour décrire l'écoulement au sein des microstructures 2D étudiées, nous proposons d'utiliser une forme simple de la vitesse équivalente, *i.e.* une superellipse, qui introduit un paramètre positif d'anisotropie, A , et un paramètre de courbure m ($1 < m < \infty$), qui dépendent tous deux de la rhéologie du fluide et de la microstructure du milieu poreux :

$$v_{eq}^m = I_I^m + \left(\frac{I_{II}}{A}\right)^m, \quad (8)$$

En utilisant (7) et (8), la loi macroscopique d'écoulement peut se mettre sous la forme (Orgéas et al., 2006) :

$$\mathbf{f} = -\frac{\mu_0 \left(\sqrt{\Phi}/ra\right)^{n+1} v_{eq}^{n-1}}{\left(\lambda_1(1-\sqrt{\Phi})\right)^{2n+1}} \left(\left(\frac{I_I}{v_{eq}}\right)^{m-2} \mathbf{M}_I + \frac{1}{A^m} \left(\frac{I_{II}}{v_{eq}}\right)^{m-2} \mathbf{M}_{II}\right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (9)$$

où λ_1 est une fonction rhéologique qui dépend de c, n , et r : $\lambda_1 = l_c/h_2$ (*cf.* figure 1) et $\Phi = c/c_{max}$. Notons qu'il est possible d'inverser cette loi d'écoulement, *i.e.* $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{g}(\nabla p)$. Cette expression est utile car combinée à l'équation d'incompressibilité, *i.e.* $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, elle permet de traiter des problèmes aux limites classiques à l'échelle macroscopique en terme de $\nabla p = \mathbf{f}$ uniquement.

Les valeurs de m ont été déterminées en ajustant (8) avec les résultats numériques présentés sur la figure 2. Cette figure montre que (8) permet un bon ajustement des résultats numériques. La figure 3 présente les valeurs de m obtenues pour deux valeurs de r et de c , et différentes valeurs de n . Cette figure montre que

- lorsque $n = 1$, $m = 2$ et $\forall c$ et r : la loi d'écoulement est linéaire,
- lorsque $n \neq 1$, m n'est pas constant et dépend de c, r et de n . Quand c tend vers c_{max} ou r tend ∞ , alors m tend $(n + 1)$. Une telle tendance montre que le modèle proposé par Woods et al. (2003), et le nouveau modèle (9) sont équivalents lorsque la compacité est proche de c_{max} ou lorsque les sections sont très allongées.

6 Comparaison avec la loi proposée par Woods et al. (2003)

Afin de vérifier l'amélioration apportée par le nouveau modèle, nous avons comparé les valeurs de $\|\langle \mathbf{v} \rangle\|$ et β (l'angle entre le gradient de pression macroscopique imposé et la vitesse macroscopique calculée, *cf.* figure 1) données par le modèle Woods et al. (2003) et par notre modèle (figures 4 et 5). Ces figures montrent que la nouvelle formulation permet une meilleure description des résultats numériques dans une large gamme de compacités des fibres (c), de rapports de forme (r) et d'exposants de loi puissance (n).

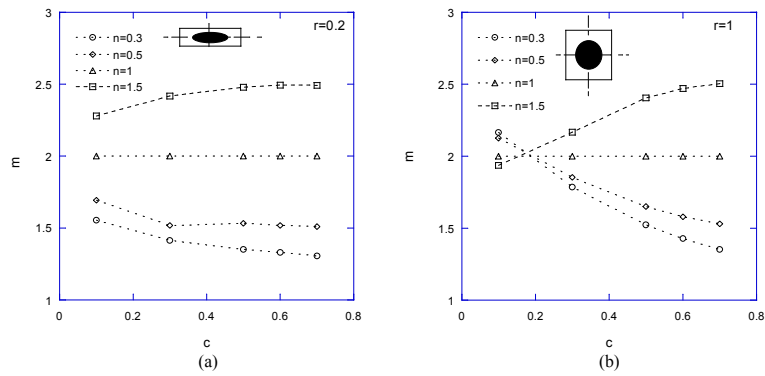


FIG. 3 – Evolution du paramètre m en fonction de la compacité c , pour différentes valeurs de n et pour $r = 1$ et 0.2 .

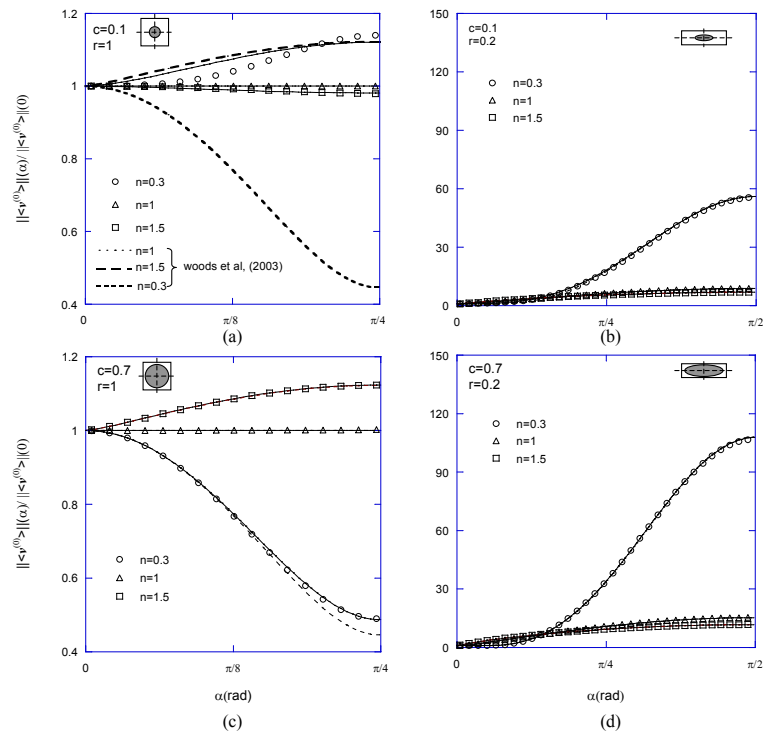


FIG. 4 – Evolution de $\|\langle \mathbf{v} \rangle(\alpha)\| / \|\langle \mathbf{v} \rangle\|$ en fonction de α , pour différentes valeurs de n , pour deux compacité ($c = 0.7$ et 0.1) et pour deux rapports de forme ($r = 1$ et 0.2). Les marques sont les résultats numériques obtenus. Les lignes et traits continus représentent les prévisions données par notre modèle et celui de Woods et al. (2003).

7 Conclusion

Une nouvelle loi macroscopique d'écoulement a été proposée les résultats de la théorie des représentations des fonctions tensorielles et en s'appuyant sur les courbes d'isodissipation mécaniques. Ce modèle permet une meilleure description des résultats numériques dans une large gamme de compacités du réseau fibreux c , de rapports de forme r et de sensibilités à la vitesse n . Par rapport au modèle proposé par Woods et al. (2003), ce modèle exige uniquement un paramètre constitutif additionnel. Celui-ci peut être déterminé à partir des courbes d'isodissipation. Les courbes d'isodissipation peuvent être déduites des simulations numériques sur le volume élémentaire représentative (VER), mais également par des expériences de filtration

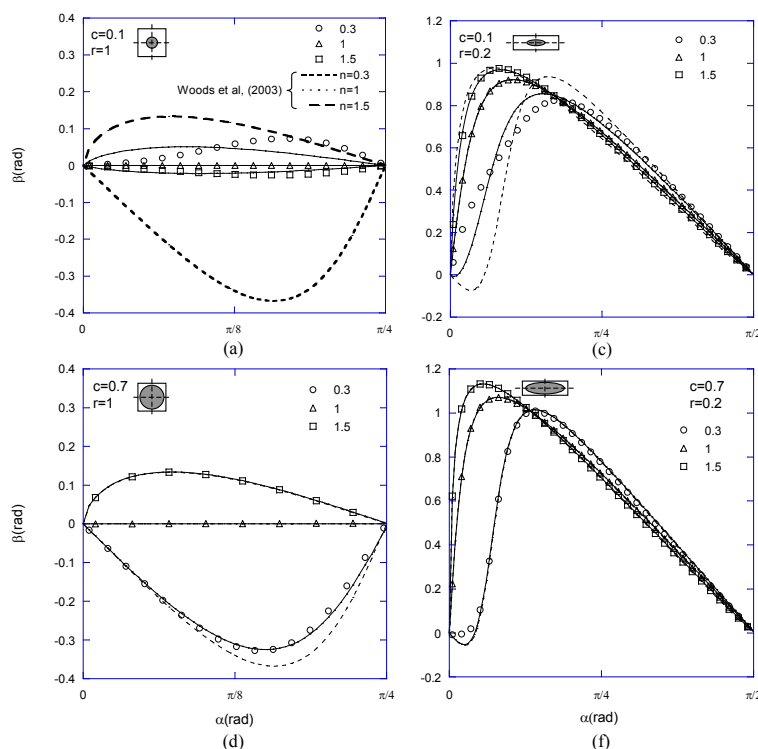


FIG. 5 – Evolution de l'angle β en fonction de α , pour différentes valeurs de n , pour deux compacité ($c = 0.7$ et 0.1) et pour deux rapports de forme ($r = 1$ et 0.2). Les marques sont les résultats numériques obtenus. Les lignes et traits continus représentent les prévisions données par notre modèle et celui proposé par Woods et al. (2003).

avec différentes orientations du gradient de pression par rapport à la microstructure. La méthodologie présentée a été validée pour des microstructures 2D et des fluides en loi puissance. Elle peut être étendue à des microstructures 3D complexes et des fluides non-newtoniens généralisés (Carreau...).

Références

- Auriault, J.-L., Royer P., Geindreau C. : 2002, *A Filtration law of power law fluids in anisotropic porous media*. *Int. J. Eng. Sci.* **40**, 1151-1163.
- Boehler, J.-P. : 1987, *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*. Wien, NY. : CISM Courses and Lectures, Springer Verlag.
- Idris, Z., L. Orgéas, C. Geindreau, J.-F. Bloch, and J.-L. Auriault : 2004, 'Microstructural Effects on the Flow Law of Power Law Fluids Through Fibrous Media'. *Mod. and Sim. in Mat. Sc. and Eng.* **12**, 995–1015.
- Lemaitre, J. and J.-L. Chaboche : 1994, *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge, 3rd edition.
- Orgéas, L., Z. Idris, C. Geindreau, J.-F. Bloch, and J.-L. Auriault : 2006, 'Modelling the Flow of Power-Law Fluids Through Anisotropic Porous Media at Low-Pore Reynolds Number'. *Chem. Eng. Sci.* **61**, 4490–4502.
- Woods, J. K., P. D. M. Spelt, P. D. Lee, T. Selerland, and C. J. Lawrence : 2003, 'Creeping Flows of Power-Law Fluids Through Periodic Arrays of Elliptical Cylinders'. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **111**, 211–228.