

Variations sur un thème de Biot - Une nouvelle formulation déplacement pour les matériaux poreux

Olivier Dazel, Bruno Brouard, Stéphane Griffiths & Claude Dépollier

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine
UMR CNRS 6613
Avenue O. Messiaen
olivier.dazel@univ-lemans.fr

Résumé :

Une nouvelle formulation du modèle de Biot pour les matériaux poroélastiques est ici proposée, cette formulation diffère par le choix des coordonnées généralisées. Elles sont choisies de manière à simplifier l'expression de l'énergie de déformation. Il est à noter qu'aucune hypothèse supplémentaire n'est ainsi formulée. Cette simplification du formalisme est étendue aux résultats classiques de la théorie de Biot. Une adaptation rigoureuse des modèles fluide équivalent et limp découle alors naturellement du nouveau formalisme. Il est aussi montré que dans le cas particulier de matériaux acoustiques, des simplifications additionnelles du formalisme peuvent être obtenues.

Abstract :

This paper proposes an alternative formulation of Biot's linear model for poroelastic materials. Its advantage is to simplify the formalism of the model without making any assumption. The main difference between the method proposed in this paper and the original one is in the choice of the generalized coordinates. In the proposed approach, the generalized coordinates are chosen in order to simplify the expression of the strain energy, which is expressed as the sum of two decoupled terms. A rigorous derivation of equivalent and limp models is then proposed. It is finally shown that for the particular case of acoustical materials, additional simplifications of the formalism can be obtained.

Mots-clefs :

Matériaux poreux ; Modèle de Biot

1 Introduction

Le but de ce papier est de proposer une écriture alternative de la théorie de Biot [Biot (1956)] qui sert à modéliser la déformation de solides poroélastiques saturés par un fluide visqueux compressible. Cette formulation est de nos jours la référence pour la modélisation du comportement dynamique des milieux poreux saturés. Le principal désavantage de cette théorie est sa lourdeur formelle impliquant des formules analytiques complexes. Ceci est souvent dissuasif et empêche bien souvent l'obtention de nouveaux résultats (analytiques ou numériques), en particulier lorsque les structures poreuses sont couplées avec d'autres composants. Il est aussi bien connu que les modèles numériques basés sur les équations de Biot sont complexes et impliquent des besoins de calculs énormes. Ainsi, il semble nécessaire de trouver des solutions alternatives et il est donc naturel de se concentrer en premier lieu sur les équations de Biot elles-mêmes puisqu'elles sont le point de départ de toutes ces différentes modélisations.

Dans ce papier, une formulation alternative en déplacement pour le modèle de Biot est proposée. Ses avantages sont de simplifier les équations du modèle linéaire sans faire d'hypothèses supplémentaires. L'originalité de ce papier est la simplification du formalisme en particulier dans le cas de matériaux acoustiques.

2 Formulation à énergie de déformation déformée

Les coordonnées cartésiennes sont notées $\{x_i\}$ avec $i = 1, 2, 3$. Le déplacement vectoriel de la phase homogénéisée solide (resp. fluide) est noté \mathbf{u}^s (resp. \mathbf{u}^f). Pour tous les champs de déplacement, la dérivée par rapport à l'espace est notée $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. La déformation est $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et la dilatation de la phase solide et fluide sont respectivement $e = u_{i,i}^s$ et $\varepsilon = u_{i,i}^f$ avec la convention des indices répétés. Le tenseur des déformations est noté sous forme tensorielle ε .

Posons \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 un jeu de coordonnées généralisées adapté. Sans perte de généralité, les relations linéaires suivantes peuvent être écrites :

$$\mathbf{u}^s = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 \quad , \quad \mathbf{u}^f = c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2.$$

L'énergie de déformation W_2 s'écrit alors :

$$W_2 = \frac{e_1^2}{2} (Aa^2 + Rc^2 + 2Qac) + \frac{e_2^2}{2} (Ab^2 + Rd^2 + 2Qbd) \\ + e_1e_2 (Aab + Rcd + Q(ad + bc)) + 2N (a^2\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{ij}^1 + b^2\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{ij}^2 + 2ab\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{ij}^2).$$

Afin de simplifier l'écriture, il semble naturel d'éliminer les termes $\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{ij}^2$ et $\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{ij}^2$ ce qui implique que $b = 0$ est un bon choix. De plus le terme e_1e_2 est également éliminé si $c = -\frac{Q}{R}a$ ainsi nous obtenons :

$$W_2 = a^2 \hat{A} \frac{e_1^2}{2} + d^2 R \frac{e_2^2}{2} + 2N a^2 \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^1,$$

avec $\hat{A} = \left(A - \frac{Q^2}{R} \right)$. Les termes a et d pouvant être choisis arbitrairement, un bon choix est donc $a = 1$ afin que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}^s$ et $d = \phi^{-1}$, choix qui s'avèrera simplifiant la suite des développements. Les nouvelles coordonnées généralisées sont maintenant totalement déterminées et la nouvelle formulation généralisée est appelée formulation $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^W\}$ avec

$$\mathbf{u}^W = \phi \left(\mathbf{u}^f + \frac{Q}{R} \mathbf{u}^s \right),$$

et

$$W_2 = \hat{A} \frac{e^2}{2} + K_{eq} \frac{\zeta^2}{2} + 2N \varepsilon_{ij}^s \varepsilon_{ij}^s \quad , \quad \zeta = \nabla \cdot \mathbf{u}^W \quad , \quad K_{eq} = \frac{R}{\phi^2}.$$

K_{eq} correspond à la compressibilité du modèle de fluide équivalent. La relation contrainte-déformation s'écrit alors :

$$\hat{\sigma}_{ij}^s = 2N \varepsilon_{ij}^s + \hat{A} e \delta_{ij} \quad , \quad p_f = -K_{eq} \zeta$$

L'énergie de déformation fait apparaître 3 termes au lieu de 4 dans les formulations de Biot. Remarquons que chaque contrainte est associée à son déplacement conjugué et que la pression p_f s'exprime à partir de la divergence de \mathbf{u}^W , faisant apparaître une similitude avec les fluides classiques. Dans le cas d'une phase solide immobile, on obtient $\mathbf{u}^W = \phi \mathbf{u}^f$ et \mathbf{u}^W correspond donc à la moyenne du déplacement microscopique du fluide sur le volume total du poreux. En

exprimant le tenseur des contraintes totales, cela fait apparaître un coefficient γ' intéressant qui joue un rôle central dans la suite du papier :

$$\tau_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} - \gamma' p_f \quad , \quad \gamma' = \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right) .$$

3 Energie cinétique et équations du mouvement

Les équations du mouvements s'obtiennent à l'aide du lagrangien et nous devons donc encore écrire l'énergie cinétique. Celle-ci est obtenue en substituant les expressions de \mathbf{u}^f dans l'expression donnée par Biot. On obtient :

$$T_2 = \frac{\rho_s}{2} \dot{\mathbf{u}}^s{}^2 + \frac{\rho_{eq}}{2} \dot{\mathbf{u}}^W{}^2 + \rho_{eq} \gamma \dot{\mathbf{u}}^s \dot{\mathbf{u}}^W ,$$

où

$$\gamma = \phi \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} - \frac{Q}{R} \right) \quad , \quad \rho_s = \rho_1 + \rho_2 \left(\frac{Q}{R} \right)^2 - \rho_{12} \frac{\gamma'^2}{\phi^2} .$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1 - \phi) \rho_s \quad , \quad \rho_2 = \phi \rho_f \quad , \quad \rho_{12} = -\phi \rho_f (\alpha_\infty - 1) , \\ \rho_{11} &= \rho_1 - \rho_{12} \quad , \quad \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} \quad , \quad \rho_{eq} = \frac{\rho_{22}}{\phi^2} . \end{aligned}$$

où ρ_s est la densité du solide ρ_f est la densité du fluide, ρ_{12} est un terme de couplage inertiel relié à la tortuosité α_∞ et ρ_{eq} est la densité du modèle de fluide équivalent.

Les équations du mouvement peuvent donc s'écrire :

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}^s) = \rho_s \ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{eq} \gamma \ddot{\mathbf{u}}^W \quad \text{et} \quad K_{eq} \nabla \zeta = \rho_{eq} \gamma \ddot{\mathbf{u}}^s + \rho_{eq} \ddot{\mathbf{u}}^W . \quad (2)$$

Ces équations sont équivalentes à celle proposées par Biot mais il n'y a pas de terme de couplage élastique, chaque tenseur de contraintes est seulement fonction du déplacement correspondant et la symétrie est préservée pour les termes inertiels.

4 Adaptation des résultats classiques de Biot

Biot et Willis [Biot *et al.* (1957)] ont présenté quatre expériences pensées permettant d'obtenir des expressions pour les coefficients élastiques apparaissant dans la théorie de Biot. L'application de ces trois expériences pensées permet d'obtenir des expressions plus simples des coefficients \hat{A} , N , K_{eq} et γ' apparaissant dans le modèle simplifié ici présenté. Ces expériences peuvent être adaptées à notre formalisme et nous donnerons ici seulement les résultats :

$$\hat{A} = K_b, \gamma' = 1 - \frac{K_b}{K_s} \quad \text{et} \quad K_{eq} = K_f / \left[\phi + (1 - \phi) \frac{K_f}{K_s} - \frac{K_b K_f}{K_s^2} \right] \quad (3)$$

où K_s et K_b sont respectivement le module d'incompressibilité du squelette et le module d'incompressibilité de l'air. N reste inchangé. Il est intéressant de noter que premièrement \hat{A} ne dépend pas de K_f contrairement au coefficient A de Biot et deuxièmement γ' est indépendant la compressibilité du fluide et il est possible d'exprimer \mathbf{u}^W par :

$$\mathbf{u}^W = \phi \mathbf{u}^f + (1 - \phi) \mathbf{u}^s - \frac{K_b}{K_s} \mathbf{u}^s = \mathbf{u}^t - \frac{K_b}{K_s} \mathbf{u}^s .$$

où \mathbf{u}^t est le déplacement total du matériau poreux. Il est montré ici que le déplacement total est en fait indépendant de la porosité.

Pour obtenir les nouvelles expressions des nombres d'ondes de Biot, on réécrit les déplacements en terme de potentiels. Les potentiels scalaires, associés aux ondes de compression, sont solutions d'un problème aux valeurs propres dont les nombres d'ondes constituent les valeurs propres et s'écrivent :

$$\delta_i^2 = \left[(\delta_{s2}^2 + \delta_{eq}^2) \pm \sqrt{(\delta_{s2}^2 + \delta_{eq}^2)^2 - 4\delta_{eq}^2 \delta_{s1}^2} \right] / 2,$$

à l'aide des 3 nombres d'ondes intrinsèques suivant

$$\delta_{eq} = \omega \sqrt{\frac{\rho_{eq}}{K_{eq}}} \quad , \quad \delta_{s1} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\hat{P}}} \quad , \quad \delta_{s2} = \omega \sqrt{\frac{\rho_s}{\hat{P}}} \quad \text{et} \quad \rho = \rho_s - \gamma^2 \rho_{eq}. \quad (4)$$

Ces expressions sont équivalentes à celles obtenues par [Allard (1993)] et on peut également obtenir les relations de symétrie. Les vecteurs propres, définis par les rapports μ_i^W peuvent être exprimés sous les deux formes équivalentes :

$$\mu_i^W = \frac{u^W}{u^s} = \gamma \frac{(\delta_i^2 - \delta_{s2}^2)}{\delta_{s2}^2 - \delta_{s1}^2} = \gamma \frac{\delta_{eq}^2}{\delta_i^2 - \delta_{eq}^2}.$$

Il est également intéressant d'introduire les rapports suivants :

$$\mu'_i = \frac{\mu_i^W}{\mu_i^W - \mu_j^W} = \frac{\delta_j^2 - \delta_{eq}^2}{\delta_j^2 - \delta_i^2} \quad \text{avec} \quad (i, j) \in \{1, 2\}.$$

La même démarche à partir d'un potentiel vecteur pour l'onde de cisaillement nous permet d'obtenir les expressions suivantes $\delta_3 = \omega \sqrt{\rho/N}$ et $\mu_3^W = -\gamma$.

5 Modèles de fluide équivalent et modèle limp

Le modèle de fluide équivalent correspond à une phase solide immobile ($\mathbf{u}^s = \mathbf{0}$). L'équation (2) devient une simple équation de propagation dans un fluide :

$$K_{eq} \nabla^2 \mathbf{u}^W = \rho_{eq} \ddot{\mathbf{u}}^W$$

dont le nombre d'onde (resp. l'impédance caractéristique) est δ_{eq} (resp. $Z_{eq} = p_f / \|\mathbf{v}^W\| = \sqrt{\rho_{eq} K_{eq}}$).

Le modèle limp est également un modèle avec une seule onde de compression mais contrairement au modèle précédent, la phase solide n'est pas sans mouvement. Le modèle limp (souple en anglais) prend en compte l'inertie du squelette et néglige la rigidité de celui-ci. Il est adapté aux matériaux dont la raideur est négligeable (laine minérale légère, coton...)

L'énergie de déformation de la phase solide est négligeable en comparaison des autres phénomènes. Cela implique $\hat{A} \simeq 0 \simeq N$ donc le terme de compression $\nabla \cdot \hat{\sigma}$ peut être négligé dans (2) ce qui donne la relation suivante

$$\rho_s \ddot{\mathbf{u}}^s = -\rho_{eq} \gamma \ddot{\mathbf{u}}^W.$$

Elle peut être injectée dans (2) afin d'obtenir l'équation de propagation suivante pour \mathbf{u}^W :

$$K_{eq} \nabla \zeta = \rho_{eq} \left(1 - \frac{\rho_{eq} \gamma^2}{\rho_s} \right) \ddot{\mathbf{u}}^W.$$

La différence entre les deux modèles est donc dans la définition de la densité :

$$\rho_{limp} = \rho_{eq} \left(\frac{\delta_{s1}}{\delta_{s2}} \right)^2 .$$

Le nombre d'onde peut s'exprimer comme une fonction des 3 nombres d'ondes intrinsèques définis en (4)

$$\delta_{limp} = \omega \sqrt{\frac{\rho_{limp}}{K_{eq}}} = \delta_{eq} \frac{\delta_{s1}}{\delta_{s2}}$$

et l'impédance caractéristique s'écrit $Z_{limp} = p_f / \|\mathbf{v}^W\| = \sqrt{\rho_{limp} K_{eq}}$.

6 Avantages de la formulation $\{\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^W\}$ pour les matériaux acoustiques

Pour les matériaux acoustiques, la grande rigidité de la partie solide du matériau implique : $|\tilde{K}_b| \ll |\tilde{K}_s|$ et $|\tilde{K}_f| \ll |\tilde{K}_s|$ ce qui simplifie les expressions de $\gamma' \simeq 1$ et de $\mathbf{u}^W \simeq \mathbf{u}^t$. Par conséquent, \mathbf{u}^W correspond au déplacement total dans le matériau poreux. Dans la suite du papier, tous les exposants W seront donc remplacés par t .

Il est également possible de simplifier \tilde{R} et \tilde{K}_{eq} dans (3) de la manière suivante :

$$\tilde{R} = \phi \tilde{K}_f \quad , \quad \tilde{K}_{eq} = \frac{\tilde{K}_f}{\phi} .$$

En ce qui concerne les relations de continuité, les simplifications suivantes apparaissent. Le couplage avec un milieu élastique (exposant e) s'écrit :

$$\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{t} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{n} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \cdot \mathbf{n} - p_f \mathbf{n}) \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \cdot \mathbf{t} ,$$

celui avec un milieu fluide (exposant a) :

$$\mathbf{u}^a \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \text{et} \quad p_a = p_f \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} ,$$

et celui entre deux milieux poreux :

$$\mathbf{u}_1^s = \mathbf{u}_2^s \quad , \quad \mathbf{u}_1^t \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2^t \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad p_{f,1} = p_{f,2} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^s = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^s .$$

Dans les équations précédentes, \mathbf{n} désigne la normale à l'interface et \mathbf{t} sa tangente. Ces simplifications concernent à la fois les déplacements et les contraintes.

Une expression simplifiée de l'impédance de surface d'un matériau collé sur un sol rigide en incidence normale est maintenant donnée. Grâce à la nouvelle formulation proposée, l'expression des conditions aux limites permet d'aboutir directement à l'expression de l'annulation d'un déterminant qui mène à l'expression suivante :

$$Z = \frac{\tilde{K}_{eq}}{j\omega} / \left[\frac{\mu'_2}{\delta_2} \tan(\delta_2 l) + \frac{\mu'_1}{\delta_1} \tan(\delta_1 l) \right] ,$$

où μ'_i est défini par l'équation (4). Cette expression est très simple et il a été montré qu'elle fournissait des résultats identiques à ceux obtenus à partir de calculs à l'aide de matrice de transfert. On peut d'ailleurs le remarquer sur la figure 1. Des expressions alternatives plus simples pour les coefficients de réflexion et transmission d'une couche en incidence normale ont également été obtenues [Dazel *et al.* (2007)].

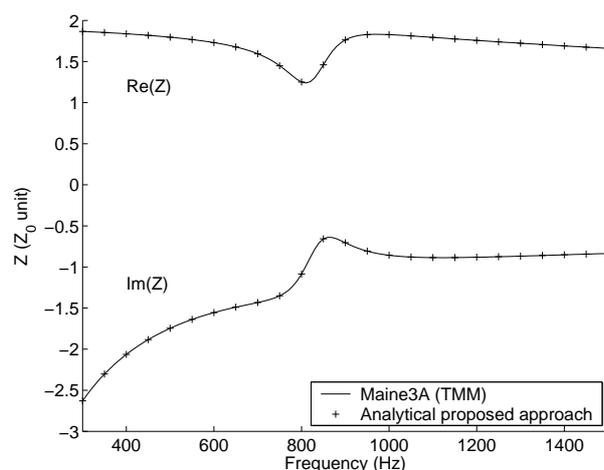


FIG. 1 – Impédance de surface sur fond rigide

7 Conclusions

Une nouvelle formulation des équations poroélastique de Biot a été proposée. Elle permet une expression plus simple des différents paramètres du modèle de Biot grâce à un choix de coordonnées généralisées qui permet un découplage de l'énergie de déformation dans le poreux. Les termes de couplage en contraintes disparaissent de l'équation du mouvement. L'expression des coefficients constitutifs est plus simple. La formulation est bien adaptée à la définition du modèle de fluide équivalent et du modèle limp. Des simplifications supplémentaires peuvent être faites pour les matériaux utilisés en acoustique menant à des expressions beaucoup plus simples des indicateurs classiques tels que l'impédance de surface d'une couche de matériau poreux par exemple. Cet acte avait pour but de présenter en détail les éléments relatif à l'obtention de la formulation. Des compléments sur celle-ci ainsi que des résultats physiques supplémentaires peuvent être trouvés dans [Dazel *et al.* (2007)].

Références

- M. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid", *Journal of the Acoustical Society of America* **28**, 168–191 (1956).
- M. Biot, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media", *Journal of Applied Physics* **33(4)**, 1482–1498 (1962).
- J. Allard, *Propagation of sound in porous media, Modelling sound absorbing materials* (New York and London) (1993).
- N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue, "A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials", *Journal of the Acoustical Society of America* **104**, 1444–1452 (1998).
- M. Biot and D. Willis, "The elastic coefficients of the theory of consolidation", *Journal of Applied Mechanics* **24**, 179–191 (1957).
- O. Dazel, B. Brouard, C. Depollier and S. Griffiths, "A new displacement formulation for porous material", *Journal of the Acoustical Society of America* *accepted for publication*.