

Identification de systèmes dynamiques dans un canal plan turbulent à l'aide de réseaux de neurones

Li Lorang, Florian Abéguilé, Yann Fraigneau & Christian Tenaud

UPR CNRS 3251

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI)

B.P. 133, 91403 Orsay Cedex

florian.abeguile@limsi.fr, yann.fraigneau@limsi.fr, li.vodinh@limsi.fr, christian.tenaud@limsi.fr

Résumé :

L'objectif de ce travail est de mettre en place un générateur de conditions aux limites amont pour les simulations d'écoulements turbulents compressibles. Une étude précédente, basée sur une reconstruction des grandeurs fluctuantes résultant d'une décomposition aux valeurs propres (POD), a permis d'extraire les structures dominantes de l'écoulement afin de minimiser la longueur caractéristique d'établissement de la turbulence. Ayant recueilli sur des temps assez longs les coefficients temporels associés aux modes POD, l'utilisation de systèmes dynamiques d'ordre bas est envisagée pour prédire la dynamique de l'écoulement à long terme. L'identification du système est effectuée grâce à un réseau de neurones. L'influence de la complexité de l'architecture neuronal sur la capacité du réseau à apprendre et à estimer a été étudiée.

Abstract :

The objective of this work is to set up a generator of inflow conditions for simulations of fully developed turbulent flows. A previous study, based on a reconstruction of the fluctuating quantities resulting from a Proper Orthogonal Decomposition (POD) allowed to extract dominant structures of the flow in order to minimize the characteristic length from which an equilibrium turbulent boundary layer is recovered. Having collected over rather long times the associated temporal coefficients, the use of dynamical systems is planned to predict the dynamic of the flow with long term. A method based on the identification by neural networks is preferred to traditional methods of POD-Galerkin projection and polynomial identification. The influence of the complexity of network architecture on the capacity of the network to learn and to estimate was studied.

Mots-clefs :

Identification ; Réseaux de neurones ; Systèmes dynamiques

1 Introduction

L'approche de la simulation des Grandes Echelles (LES) est une alternative à la DNS pour l'analyse d'écoulements turbulents à hauts nombres de Reynolds. Une des difficultés de mise en œuvre des simulations instationnaires réside dans le traitement des conditions aux limites aux frontières ouvertes du domaine de calcul. Le principe des méthodes pour pallier ce problème consiste à imposer des conditions aux limites réalistes, i.e. des conditions d'entrée présentant une répartition spectrale correcte ainsi qu'une organisation spatio-temporelle représentative de l'écoulement. Une étude précédente [Abéguilé et al. (2007)], point de départ de ce travail, basée sur une reconstruction des grandeurs fluctuantes résultant d'une décomposition aux valeurs propres (POD), a permis d'extraire les structures dominantes de l'écoulement et de minimiser

leur longueur caractéristique d'établissement dans une configuration de canal plan. La capacité des systèmes dynamiques à reproduire la dynamique des écoulements permet d'envisager leur utilisation pour des simulations sur des temps longs. Des systèmes dynamiques ont été développés avec succès mais toujours dans des configurations simples (couche de mélange [Perret (2004)], écoulement derrière un cylindre [Bergmann (2004)]. L'originalité de ce travail est double. D'une part, si la configuration du canal plan étudiée ici est simple, elle possède néanmoins toute la dynamique d'un écoulement pleinement turbulent et compressible. D'autre part, le développement des systèmes dynamiques est basé sur l'identification par réseaux de neurones et non pas sur les méthodes classiques de projection POD-Galerkin et d'identification polynomiale.

2 Principe du générateur de conditions aux limites

Pour générer les fluctuations des quantités avec une répartition spatio-temporelle caractéristiques de la turbulence de l'écoulement considéré, une POD a été effectuée dans un plan arbitraire du canal [Abéguilé et al. (2007)]. Le nombre de Reynolds, basé sur la demi-hauteur du canal est 3000 (correspondant à un Reynolds turbulent $Re_\tau \approx 200$), le Mach vaut 1,5. Dans les directions homogènes de l'écoulement, la POD se réduit à une décomposition harmonique [Lumley (1967)], on applique donc préalablement une décomposition de Fourier aux fluctuations des grandeurs conservatives $\psi_i(\underline{x}, t)' = (\rho', (\rho \underline{u})', (\rho E)')^T$ dans la direction transverse. Dans la base POD, le champ fluctuant est estimé comme suit : $(\widehat{\psi}')|^{est}(k_y, x, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} \widehat{a}^{(n)}(k_y, t) \cdot \widehat{\Phi}^{(n)}(k_y, x)$, où N_{POD} est le nombre de modes conservés pour la reconstruction. Les coefficients temporels associés aux modes POD sont donnés par : $\widehat{a}^{(n)}(k_y, t) = \int_{\mathcal{D}} \widehat{\psi}'_i(k_y, x, t) \widehat{\Phi}^{(n)}(k_y, x)$. Les fluctuations recomposées sont ensuite superposées à un champ moyen connu et injectées en entrée du domaine. Dans l'optique d'utiliser cette technique sur des temps longs, les coefficients temporels associés aux modes POD ont été recueillis. Les portraits de phase présentés sur la figure 1 illustrent le caractère chaotique de l'écoulement considéré.

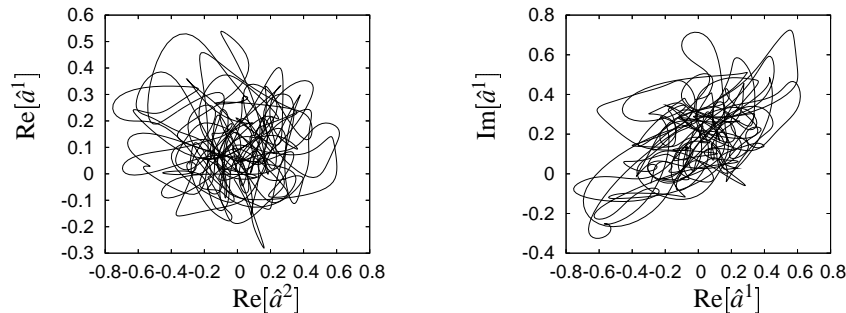


FIG. 1 – Portrait de phase du 1^{er} mode de Fourier : A gauche, $\text{Re}[\hat{a}^1]$ en fonction de $\text{Re}[\hat{a}^2]$. A droite, $\text{Im}[\hat{a}^1]$ en fonction de $\text{Re}[\hat{a}^1]$.

3 Systèmes dynamiques et réseaux de neurones

Classiquement, les systèmes dynamiques sont obtenus via une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base POD. De par son caractère optimal à capter l'énergie en un

nombre réduit de modes, la POD est adaptée au développement de modèles d'ordre bas. Cependant, la troncature réalisée lors de la projection élimine les modes d'ordre élevé responsables de la dissipation de l'énergie créée par les grandes structures et ces systèmes divergent aux temps longs. Pour pallier ce problème, plusieurs solutions ont été avancées (viscosité tourbillonnaire, correction des coefficients temporels inspirée des méthodes de contrôle optimal). Outre ces problèmes de divergence, ce type d'approche nécessite d'avoir accès à l'ensemble des variables (en compressible l'inverse de la masse volumique est aussi nécessaire) et de connaître les conditions aux limites. Le calcul des dérivées spatiales des fonctions propres POD, générateur de bruit numérique, pose aussi quelques difficultés. Pour ces différentes raisons, des méthodes d'identification polynomiale ont été proposées pour déterminer les coefficients du modèle réduit [Perret (2004)]. Une approche classique repose sur l'identification des coefficients du système dynamique en ayant au préalable fixée la forme de celui-ci. Une autre voie, reposant sur un système dynamique dont les coefficients sont déterminés par apprentissage à partir d'un réseau de neurones a été choisie.

Les réseaux de neurones présentent l'avantage d'être des approximateurs universels parcimonieux. En effet, pour obtenir un modèle non linéaire de précision donnée, le nombre de paramètres ajustables requis par le réseau de neurones est inférieur à celui requis par toutes autres méthodes de régressions classiques. Le réseau de neurones choisi dans cette étude est de type perceptron à une couche cachée et à fonction d'activation sigmoïde [Dreyfus et al. (2004)] (voir fig. 2).

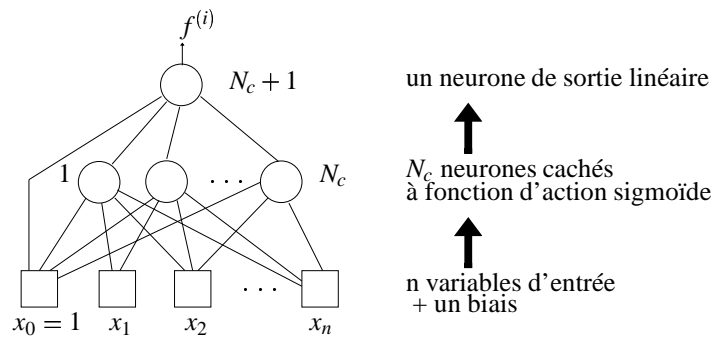


FIG. 2 – Réseau de neurones à $n + 1$ entrées, une couche de N_c neurones cachés à fonction d'activation sigmoïde et un neurone de sortie linéaire.

L'apprentissage est effectué sur les coefficients temporels qui sont des nombres complexes. On découple partie réelle et imaginaire mais on tient compte de leur influence réciproque dans la fonction à identifier. Le système dynamique qui régit l'évolution des coefficients temporels de la POD peut s'écrire comme suit pour chaque k_y :

$$\text{Re (resp. Im)} \left[\frac{d\hat{a}^{(i)}(k_y, t)}{dt} \right] = f^{(i)} \left(\text{Re}[\hat{a}^{(1)}(k_y, t)], \text{Im}[\hat{a}^{(1)}(k_y, t)], \dots, \text{Re}[\hat{a}^{(N_{POD})}(k_y, t)], \text{Im}[\hat{a}^{(N_{POD})}(k_y, t)] \right)$$

où $f^{(i)}$, la fonction décrivant la sortie du réseau de neurones, s'écrit :

$$f^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_c} \left[p_{ik}^1 \tanh \left(\sum_{j=1}^{N_{POD}} \left(w_{ijk}^1 \text{Re}[\hat{a}^{(j)}(k_y, t)] + w_{ijk}^2 \text{Im}[\hat{a}^{(j)}(k_y, t)] + p_{ik}^2 \right) \right) \right] + q_i$$

w_{ijk}^l , p_{ik}^l et q_i sont les vecteurs poids (inconnues du problème) associés respectivement à la

couche cachée, à la couche linéaire et au biais, N_c le nombre de neurones cachés et N_{POD} le nombre de modes POD. Après avoir défini le degré de complexité de l'architecture neuronale, la détermination des paramètres est effectuée lors d'une phase d'apprentissage sur une séquence de la base de données. Cette phase consiste à déterminer w qui minimise l'erreur entre la sortie du réseau et les échantillons par un algorithme de type simplex :

$$\text{erreur} = \sum_{j=1}^{N_{POD}} \left\| \text{Re(resp. Im) } \left[\frac{d\hat{a}^{(i)}(k_y, t)}{dt} \right] - f^{(i)} \right\|^2$$

Une fois cet apprentissage réalisé, i.e., dès l'obtention d'une bonne convergence des paramètres, l'intégration de la fonction $f^{(i)}$ est effectuée par une intégration de type Runge-Kutta (3^{ème} ordre), à partir d'une condition initiale donnée par les coefficients temporels originaux à un instant donné $\hat{a}^{(i)}(k_y, t_0)$.

4 Apprentissage

La robustesse d'un réseau de neurones ne repose pas uniquement sur sa capacité à reproduire la séquence sur laquelle l'apprentissage a été effectué, mais aussi sur son aptitude à estimer une séquence inconnue. Théoriquement plus un réseau de neurones est complexe, i.e., plus le nombre de neurones cachés est important, plus il sera capable de reproduire fidèlement la séquence apprise. Néanmoins, il peut en résulter une perte de généralité préjudiciable pour l'estimation d'une séquence différente. Un compromis doit être trouvé entre ces deux types d'estimation.

4.1 Influence du nombre de neurones cachés

Pour des niveaux croissants de complexité de l'architecture neuronal, les erreurs commises sur la séquence apprise et sur une séquence ultérieure ont été reportées dans le tableau 1. On ob-

N_c	1	2	3	4
erreur	0,654	0,537	0,476	0,394

TAB. 1 – Influence du nombre de neurones cachés sur l'erreur d'apprentissage.

serve que l'erreur d'apprentissage diminue de 20% environ pour chaque neurone caché supplémentaire. Cependant, l'ajout de neurones cachés augmente de manière conséquente le temps de calcul de l'apprentissage (il augmente d'un facteur 10 entre 1 et 4 neurones cachés). Pour 4 neurones cachés, l'apprentissage donne des résultats très satisfaisants (voir fig. 4). Pour valider cette étape d'apprentissage, on a testé l'estimation des différents réseaux sur une séquence inconnue. Sur la figure 3, on a reproduit le spectre des différents $Re[d\hat{a}^1/dt]$ estimés pour cette séquence. Les hautes fréquences sont mieux capturées lorsqu'on augmente le nombre de neurones cachés. Cela met en évidence le lien entre complexité du réseau et robustesse de l'apprentissage pour l'estimation.

4.2 Influence de la troncature des modes POD

Considérant une architecture neuronale composée de 4 neurones cachés, l'influence du nombre de modes conservés sur l'erreur commise lors de la phase d'apprentissage est étudiée. Les effets de la troncature de la POD sur la longueur d'établissement de la turbulence ont été étudiés par Abéguilé et al. (2007). Il ressort de cette étude qu'en deçà de 10 modes utilisés pour la reconstruction, les longueurs d'établissement deviennent grandes et incompatibles dans le cadre des applications envisagées. Cette valeur a donc constitué le seuil de la troncature utilisé pour ce travail.

N_{POD}	10	14	17
erreur	0,542	0,445	0,394

TAB. 2 – Influence du nombre de modes POD conservés sur l'erreur d'apprentissage pour un réseau de neurones possédant 4 neurones cachés

Comme on pouvait s'en douter, l'erreur d'apprentissage diminue lorsqu'on augmente le nombre de modes POD pris en compte, car les modes élevés participent également à la dynamique de l'ensemble. Il est cependant intéressant de voir qu'avec un nombre réduit de modes, on obtient une bonne approximation de l'évolution des structures les plus énergétiques.

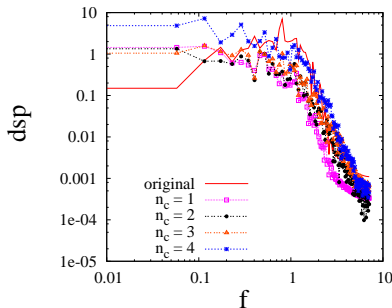


FIG. 3 – Spectre de $Re[d\hat{a}^1/dt]$ estimé sur une séquence temporelle inconnue pour différents réseaux : original, $n_C = 1$, $n_C = 2$, $n_C = 3$, $n_C = 4$

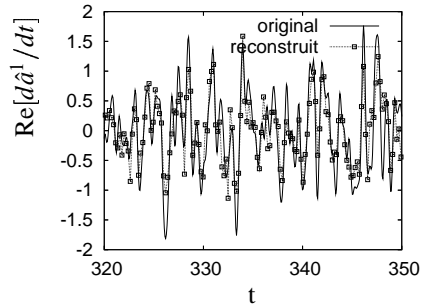


FIG. 4 – Séquences des coefficients temporels $Re[d\hat{a}^1/dt]$: originale et estimée par le réseau de neurones à 4 neurones cachés .

5 Intégration de l'ODE

Une fois les fonctions $f^{(i)}$ identifiées, on intègre le système d'équations ordinaires pour obtenir l'évolution temporelle des $\hat{a}^{(i)}(k_y, t)$. Les résultats qui ont été obtenus pour l'apprentissage présenté n'ont pas abouti, le système dynamique se révélant instable. En découplant dans la fonction d'apprentissage les parties réelles et imaginaires de chaque mode, on a pu obtenir des évolutions temporelles stables. L'évolution des basses fréquences est bien reproduite (voir fig. 5), on n'observe pas de déphasage du signal (voir fig. 6). L'enjeu pour récupérer toute la

dynamique repose sur une optimisation de l'apprentissage et on développera par la suite des algorithmes d'intégration plus adaptés à des systèmes couplés.

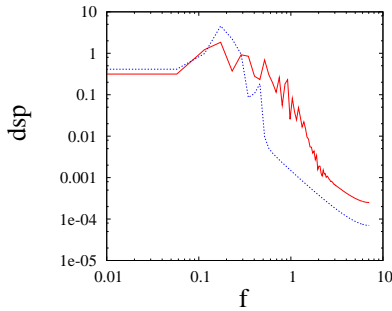


FIG. 5 – spectre de $Re[\hat{a}^{(1)}]$ original (rouge) et estimé (bleu)

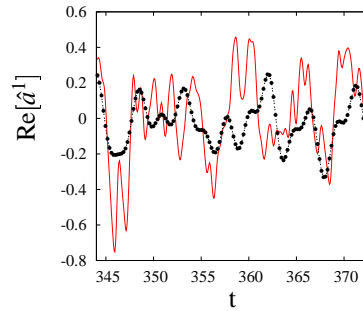


FIG. 6 – Evolution temporelle de $Re[\hat{a}^{(1)}]$ originale (—) et estimée (•)

6 Conclusion

Nous avons développé une méthode d'identification neuronale de systèmes dynamiques pour un écoulement pleinement turbulent et compressible. L'architecture du réseau a été optimisée pour l'apprentissage et nous avons également étudié l'influence de la troncature pour l'estimation des modes POD dans le domaine spectral. En découplant la partie réelle et imaginaire de chaque mode POD, on obtient des systèmes stables qui permettent d'obtenir une bonne dynamique des basses fréquences (pas de déphasage). Les résultats obtenus sont encourageants et nous poursuivrons l'étude sur les systèmes couplés pour obtenir de meilleurs résultats pour la dynamique des hautes fréquences.

Références

- Abéguilé F., Fraigneau Y., Lorang L. & Tenaud C. Générateur de conditions aux limites amont pour les simulations de type LES des écoulements de paroi. 18^{ème} Congrès Français de Mécanique Grenoble.
- Bergmann M. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire.* Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine. France, Nancy.
- Dreyfus G., Martinez J. M., Samuelides M., Gordon M. B., Badran F., Thiria S. & Hérault L. Réseaux de neurones. Méthodologie et applications. *Edition Eyrolles*
- Perret L. *Etude du couplage instationnaire calculs-expériences en écoulements turbulents.* Thèse de Doctorat, Université de Poitiers. France.
- Lumley J.L. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In A. M. Yagom and V. I. Tatarski, editors. *Atmospheric turbulence and Radio Wave Propagation*, pp 166-178. Nauka : Moskow.