

# Générateur de conditions aux limites amont pour les simulations de type LES des écoulements de paroi

Florian Abéguilé, Yann Fraigneau, Li Lorang & Christian Tenaud

UPR CNRS 3251

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI)

B.P. 133, 91403 Orsay Cedex

florian.abeguile@limsi.fr, yann.fraigneau@limsi.fr, li.vodinh@limsi.fr, christian.tenaud@limsi.fr

## Résumé :

*L'objectif de ce travail est la génération de conditions aux limites amont pour les simulations d'écoulements turbulents compressibles instationnaires. La méthode repose sur une reconstruction des grandeurs fluctuantes résultant d'une décomposition aux valeurs propres (POD) d'un écoulement de référence. Les structures cohérentes ainsi générées en entrée du domaine permettent de minimiser la longueur caractéristique d'établissement de la turbulence. Dans cette étude, l'écoulement considéré est un canal plan turbulent bi-périodique. Cette configuration nous autorise à travailler dans l'espace spectral et permet ainsi de réduire le volume de données liées à la construction des générateurs. Nous présentons une étude de sensibilité entre plusieurs variantes de générateurs reposant sur la POD ainsi que la sensibilité de l'un d'entre eux à la variabilité des conditions d'écoulement (nombre de Mach). Les résultats sont en très bon accord avec l'écoulement de référence.*

## Abstract :

*The present study deals with the generation of inflow conditions for simulations of fully turbulent developed compressible flows. The method is based on the generation of conservative quantity fluctuations that result from a Proper Orthogonal Decomposition (POD) of a reference flow. The goal is to predict as correctly as possible the coherent structures at the inlet of the domain, in order to minimize the characteristic length from which an equilibrium turbulent boundary layer is recovered. We study a bi-periodic turbulent channel flow. We work in Fourier space in order to reduce the data size linked to the generator set-up. We perform a sensitivity analysis of generators based on different POD. In addition, the variability of flow conditions has been quantified for one of them. The results obtained are in good agreement with the reference flow.*

## Mots-clefs :

**LES ; POD ; conditions aux limites instationnaires**

## 1 Introduction

La Simulation des Grandes Echelles (LES), de par sa capacité à prédire correctement des instationnarités à grande échelle, est une technique adéquate pour l'analyse d'écoulements turbulents à hauts nombres de Reynolds. Une des difficultés majeures rencontrée dans le cadre des simulations instationnaires réside dans le traitement des conditions aux limites du domaine de calcul et particulièrement au niveau des conditions d'entrée. La conception d'un générateur de conditions aux limites instationnaires a pour objectif de minimiser la longueur caractéristique d'établissement de la turbulence en engendrant des champs de fluctuations appropriés, i.e., possédant les propriétés spectrales de la turbulence ainsi qu'une cohérence spatio-temporelle réaliste. Cette

problématique apparaît également dans le cadre des méthodes zonales (couplage RANS / LES). Le principe de la méthode proposée par Fraigneau et Tenaud (2005) repose sur la superposition d'un champ de fluctuations représentatif de la turbulence de l'écoulement —obtenu via une Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD)— à un champ moyen connu (obtenu par exemple à partir d'une simulation RANS). La POD a été choisie car elle assure une décomposition modale optimale au sens de l'énergie. La configuration de canal plan étudiée, bi-périodique, nous autorise à travailler dans l'espace spectral et permet ainsi de réduire le volume de données liées à la construction des générateurs. Plusieurs approches POD ont ainsi été réalisées et comparées dans l'espace physique et dans l'espace spectral.

## 2 Principe de la méthode

La démarche, proche de celle présentée par Fraigneau et Tenaud (2005) est brièvement exposée ici. Deux écoulements turbulents dans une configuration de canal plan infini (conditions périodiques dans les directions longitudinale et transverse  $(x, y)$ ) à parois isothermes sont simulés pour constituer la base de données permettant de construire les générateurs de conditions instationnaires. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées par un schéma couplé espace-temps d'ordre élevé [Daru et Tenaud (2004)].

Pour générer, en entrée du domaine de calcul, des fluctuations possédant les caractéristiques de la turbulence de l'écoulement considéré, une POD de chaque composante du vecteur des fluctuations des variables conservatives  $\psi'_i(\underline{x}, t) = (\rho', (\rho \underline{u})', (\rho E)')^T$  est effectuée dans un plan médian arbitraire  $(y, z)$  du canal. Dans la base POD, le champ fluctuant peut être estimé comme suit :  $(\psi')|^{est}(\underline{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_{POD}} a^{(n)}(t) \cdot \Phi^{(n)}(\underline{x})$ , où  $\Phi^{(n)}(\underline{x})$  est le vecteur propre associé à la  $n$ ème valeur propre  $\lambda^{(n)}$  du tenseur des corrélations en deux points  $R_{ij}(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{T} \int_T \psi_i(\underline{x}, t)' \cdot \psi_j(\underline{x}', t)' dt$ ,  $N_{POD}$  est le nombre de modes conservés pour la reconstruction. Ce nombre est choisi de telle sorte que les modes retenus participent à un certain pourcentage de l'énergie fluctuante (par exemple :  $\sum_{n=1}^{n=N_{POD}} \sum_{k_y} \lambda^{(n)}(k_y) / \sum_{n=1}^{n=N_{TOT}} \sum_{k_y} \lambda^{(n)}(k_y) \geq 99,9\%$ ). Les coefficients temporels  $a^{(n)}(t)$ , obtenus par projection sur la base orthogonale POD, sont donnés par :  $a^{(n)}(t) = \int_{\mathcal{D}} \psi'_i(\underline{x}, t) \Phi^{(n)}(\underline{x})$ . Considérant ensuite, un canal plan en développement spatial, de longueur finie, avec des conditions aux limites spécifiques pour l'entrée (champ moyen + fluctuations reconstruites) et la sortie (condition de non-reflexion) traitées par la méthode des caractéristiques, l'objectif est de reproduire l'écoulement en canal plan infini.

Dans les directions homogènes de l'écoulement, la décomposition orthogonale se réduit à une décomposition harmonique [Lumley (1967)]. Ainsi, on applique une décomposition de Fourier aux fluctuations des grandeurs conservatives dans la direction transverse. Le tenseur des corrélations en deux points  $R_{ij}(\underline{x}, \underline{x}')$ , les  $a^{(n)}(t)$ , les valeurs propres  $\lambda^{(n)}$  et les vecteurs propres associés  $\Phi^{(n)}(\underline{x})$  sont transformés respectivement en  $\Pi_{ij}(z, z', k_y)$ ,  $\hat{a}^{(n)}(k_y, t)$ ,  $\lambda^{(n)}(k_y)$ ,  $\hat{\Phi}^{(n)}(z, k_y)$  pour tous nombres d'onde  $k_y$ .

L'avantage de l'approche spectrale sur l'approche physique réside essentiellement dans la réduction du volume de données liées à la construction des générateurs. En effet, dans l'espace physique la matrice d'autocorrélation associée à chaque variable est de dimension  $(N_y \times N_z)^2$  alors que dans l'espace spectral,  $N_y/2$  systèmes indépendants de dimension  $(N_z)^2$  doivent être résolus. Différents types d'approches POD ont ainsi été réalisées : une POD effectuée de façon

indépendante sur chacune des variables conservatives (scalaire), une POD effectuée sur l'ensemble du vecteur des quantités conservatives (vectorielle) et une approche hybride résultant d'une combinaison linéaire des tenseurs des corrélations de la POD scalaire (pseudo-scalaire). Les approches POD scalaire et pseudo-scalaire ont été effectuées dans les espaces physique et spectral. En revanche, l'approche POD vectorielle a été réalisée uniquement dans l'espace spectral, du fait de son coût en mémoire trop important dans l'espace physique.

Les deux configurations d'écoulements étudiées sont les suivantes : subsonique,  $Ma_\infty = 0,5$  et supersonique  $Ma_\infty = 1,5$ . Le nombre de Reynolds, basé sur la demi-hauteur du canal, est  $Re_h = 3000$  ( $Re_\tau \approx 200$ ). Les dimensions du domaine dans les directions longitudinale, transverse et normale aux parois sont respectivement  $L_x = 2\pi$ ,  $L_y = 4\pi/3$  et  $L_z = 2$ .

### 3 Comparaison des différentes approches POD

Afin de confronter les différentes approches POD pour  $Ma = 1,5$ , l'erreur absolue (en norme  $L_1$ ), commise lors de la reconstruction des champs fluctuants du plan arbitraire sélectionné pour réaliser la POD a été mesurée. Le but étant de vérifier la qualité de chacune des approches. Le nombre de modes POD retenu est choisi de telle sorte que ces modes participent à au moins 99,9% de l'énergie fluctuante. Les niveaux des erreurs sont relativement similaires. Cependant, en terme de rapport qualité de reconstruction—taux de compression, l'approche POD pseudo-scalaire dans l'espace spectral est avantageuse (cf Table 3). Les résultats obtenus avec

type POD	taux de compression	$\Delta p$	$\Delta p_v$	$\Delta p_w$	$\Delta p_E$
(1)	91 %	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$4,45 \cdot 10^{-2}$	$7,07 \cdot 10^{-3}$	$4,56 \cdot 10^{-3}$
(2)	92 %	$2,10 \cdot 10^{-3}$	$4,78 \cdot 10^{-2}$	$3,15 \cdot 10^{-3}$	$2,83 \cdot 10^{-3}$
(3)	91 %	$1,87 \cdot 10^{-3}$	$3,03 \cdot 10^{-2}$	$6,92 \cdot 10^{-3}$	$4,68 \cdot 10^{-3}$
(4)	86 %	$2,02 \cdot 10^{-2}$	$2,35 \cdot 10^{-2}$	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^{-2}$
(5)	94 %	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$5,89 \cdot 10^{-3}$	$3,62 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{-3}$

TAB. 1 – Erreur commise lors de la reconstruction en fonction du type d'approche considéré. Approche physique : (1) POD scalaire, (2) POD pseudo-scalaire —taux de compression (T. C.) =  $N_{POD}/(N_y \times N_z)$ . Approche spectrale : (3) POD scalaire, (4) POD vectorielle, (5) POD pseudo-scalaire —(T. C.) =  $N_{POD}/(2 \times N_z)$ .

l'approche POD vectorielle ne répondent pas à nos attentes et demande de poursuivre nos investigations. Les calculs présentés dans la suite de cet article ont été effectués avec l'approche POD pseudo-scalaire dans l'espace spectral.

### 4 Développement spatial d'un écoulement turbulent supersonique

Le calcul présenté dans Fraigneau et Tenaud (2005), correspondant à la simulation d'un écoulement dans une configuration de canal plan turbulent supersonique avec des conditions instationnaires dans le plan d'entrée, a été reproduit. Les résultats obtenus avec cette approche POD pseudo-scalaire dans l'espace spectral sont très proches de ceux obtenus avec

l'approche POD scalaire dans l'espace physique. Malgré les perturbations engendrées par la remontée d'information des zones subsoniques en proche paroi dans le plan d'entrée, les fluctuations thermodynamiques et dynamiques sont en très bon accord avec les solutions de référence et les longueurs d'établissement sont très courtes (inférieures à  $x = L/4$ , cf. fig. 4). Les écarts-types des composantes sont légèrement sous-estimés dans la région centrale du canal, tandis que les corrélations  $u'w'$  présentent une tendance inverse.

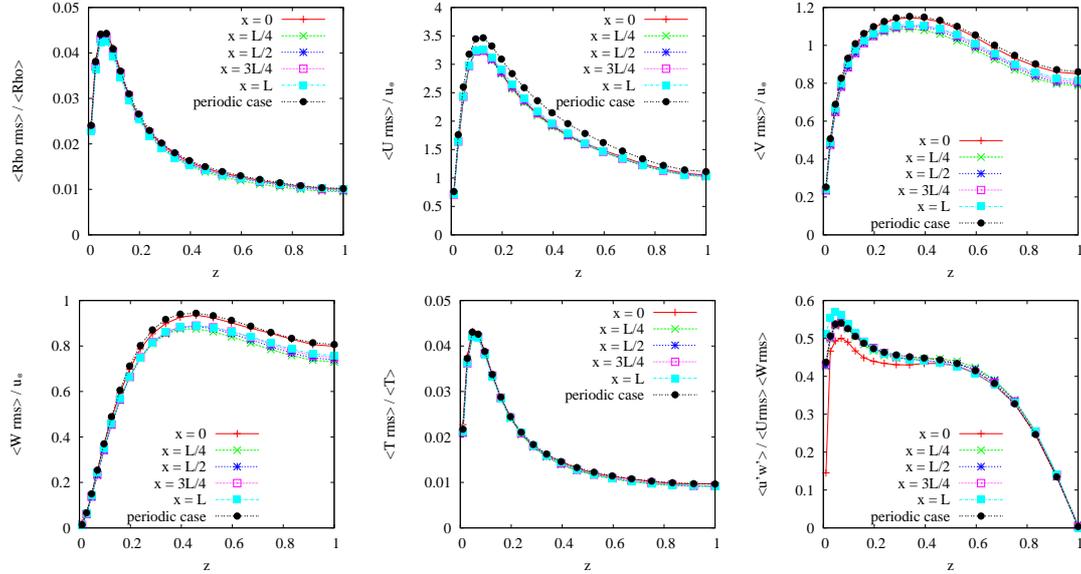


FIG. 1 – Canal plan  $Ma_\infty = 1,5$  avec génération de conditions d'entrée par POD pseudo-scalaire, comparé au canal plan infini : profils verticaux en cinq positions ( $x = 0, L/4, L/2, 3L/4, L$ ) de haut en bas et de gauche à droite :  $\langle \text{Rho}_{\text{rms}} \rangle / \langle \text{Rho} \rangle$ ,  $\langle U_{\text{rms}} \rangle / u_x$ ,  $\langle V_{\text{rms}} \rangle / u_x$ ,  $\langle W_{\text{rms}} \rangle / u_x$ ,  $\langle T_{\text{rms}} \rangle / \langle T \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle / \langle U_{\text{rms}} \rangle \langle W_{\text{rms}} \rangle$ .

## 5 Simulation du canal turbulent supersonique à partir d'un générateur subsonique

L'objet de cette section est l'étude de la sensibilité du générateur à la variabilité des conditions de l'écoulement, la variation portant sur le nombre de Mach. La simulation du canal plan turbulent supersonique ( $Re_h = 3000$  et  $Ma_\infty = 1,5$ ) en développement spatial est effectuée en imposant, dans le plan d'entrée, des fluctuations reconstruites à partir du générateur défini pour le cas subsonique. Globalement, les caractéristiques dynamique de l'écoulement ne présentent qu'une légère sensibilité à la variation du nombre de Mach sur le générateur de conditions instationnaires, contrairement aux grandeurs telles que la température et la densité. En effet, les fluctuations de température évoluent en fonction du carré du nombre de Mach, or ces fluctuations sont reconstruites à partir du générateur subsonique, elles sont donc beaucoup trop faibles en regard de celles de l'écoulement. L'influence du nombre de Mach entraîne un découplage des longueurs caractéristiques selon qu'il s'agit des grandeurs dynamiques ou thermodynamiques. Cependant, même si ces fluctuations restent sous estimées dans le domaine de calcul, les profils sont pratiquement convergés au delà de l'abscisse  $x = L/2$ .

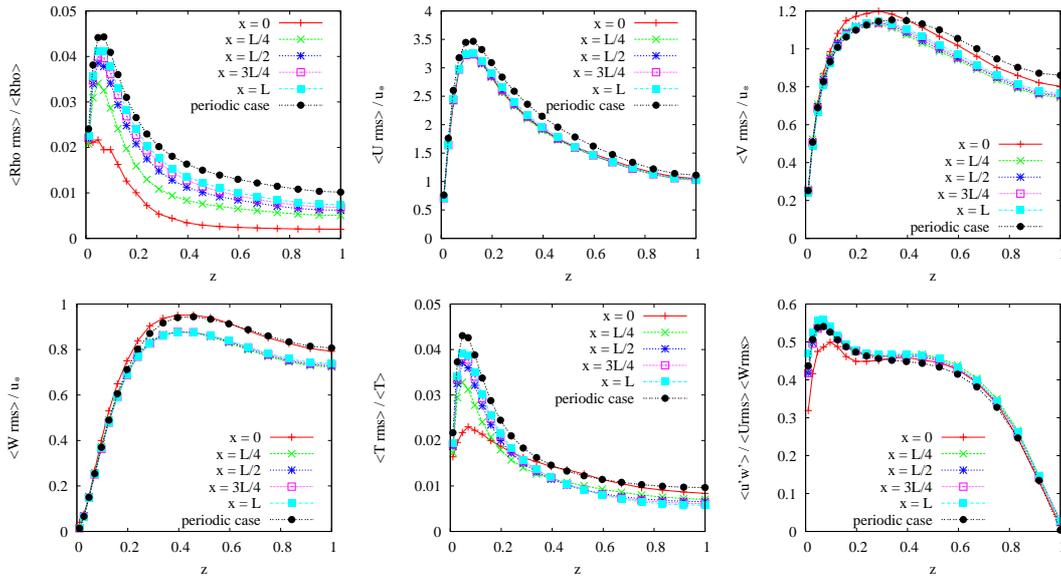


FIG. 2 – Canal plan  $Ma_\infty = 1,5$  avec des conditions d'entrée définies par le générateur subsonique, comparé au canal plan infini : profils verticaux en cinq positions ( $x = 0, L/4, L/2, 3L/4, L$ ) de haut en bas et de gauche à droite :  $\langle \rho_{rms} \rangle / \langle \rho \rangle$ ,  $\langle U_{rms} \rangle / u_*$ ,  $\langle V_{rms} \rangle / u_*$ ,  $\langle W_{rms} \rangle / u_*$ ,  $\langle T_{rms} \rangle / \langle T \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle / \langle U_{rms} \rangle \langle W_{rms} \rangle$ .

## 6 Influence de la réduction du nombre de modes de la base du générateur

Cette section est consacrée à l'étude de l'influence du nombre de modes définissant la base du générateur de conditions instationnaires. De nouvelles simulations du développement spatial de l'écoulement supersonique ont été réalisées en conservant 99% puis 90% de l'énergie, correspondant respectivement à 14 et 10 modes conservés. L'écart entre les principales valeurs caractéristiques de l'écoulement et les valeurs de référence augmente avec la diminution du nombre de modes pris en compte (cf. Table 2). Pour les fluctuations, on observe les mêmes tendances (cf. fig. 3). Pour un seuil énergétique de 90%, les longueurs d'établissement de la turbulence deviennent de l'ordre de la taille du domaine.

	$T_c$	$\rho_c$	$\frac{\rho_p}{\rho_\infty}$	$Re_t$	$U_c$	$\frac{du}{dz} _p$	$u_\tau \cdot 10^{-2}$
periodic LES	1.368	0.978	0.731	223	1.170	12.30	5.62
LES + POD 99,9 %	1.370	0.979	0.728	220	1.171	11,99	5.45
LES + POD 99 %	1.371	0.979	0.727	220	1.171	11.97	5.44
LES + POD 90 %	1.372	0.990	0.725	210	1.172	10.81	5.14

TAB. 2 – Caractéristiques de l'écoulement turbulent dans un canal plan supersonique pour différents degrés de réduction de la base POD

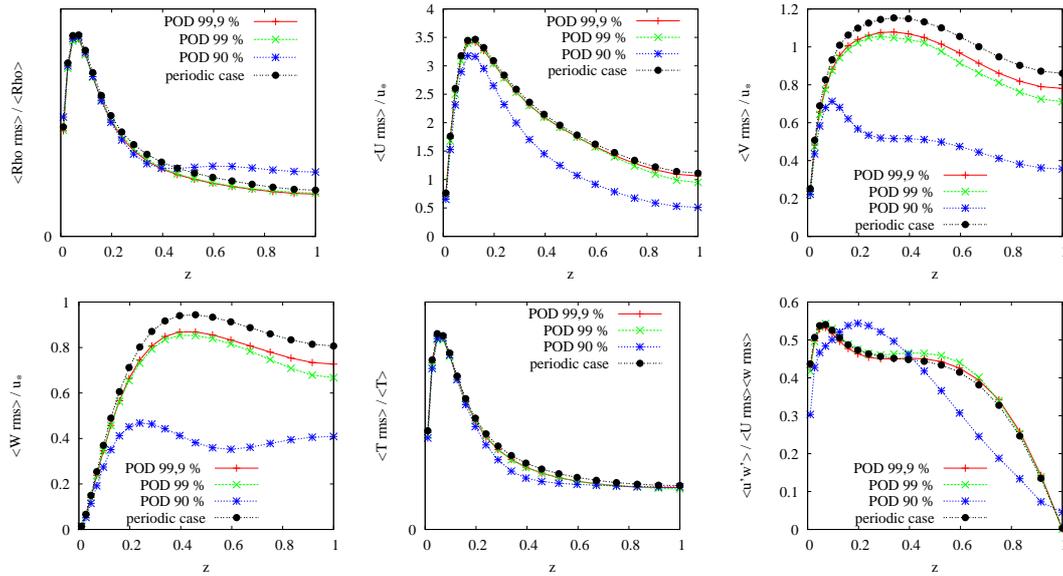


FIG. 3 – Canal plan  $Ma_\infty = 1,5$  avec des conditions d'entrée générées par des bases réduites, comparé au canal plan infini : profils verticaux en  $x = L/8$  de haut en bas et de gauche à droite :  $\langle \text{Rho rms} \rangle / \langle \text{Rho} \rangle$ ,  $\langle U \text{ rms} \rangle / u_*$ ,  $\langle V \text{ rms} \rangle / u_*$ ,  $\langle W \text{ rms} \rangle / u_*$ ,  $\langle T \text{ rms} \rangle / \langle T \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle / \langle U \text{ rms} \rangle \langle W \text{ rms} \rangle$ .

## 7 Conclusion

Différents types d'approches POD (POD scalaire, POD vectorielle et POD pseudo-scalaire) ont été confrontés dans l'espace physique et spectral. L'approche spectrale a permis une compression du volume de données substantielles. En terme de rapport qualité de reconstruction—taux de compression, l'approche POD pseudo-scalaire dans l'espace spectral s'est révélée être la plus avantageuse, le générateur basé sur cette approche POD a donc été étudié plus en détail. Lorsque le fonctionnement de ce générateur s'écarte de la situation optimale—nombre de Mach identique pour le générateur et l'écoulement et prise en compte d'un nombre de modes POD pour construire le générateur correspondant à 99,9% de l'énergie— les longueurs d'établissement augmentent mais restent néanmoins compatibles avec les enjeux fixés dans le cadre du couplage de méthode.

## Références

- Daru V. & Tenaud C. High order one-step monocity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *Journal of Computational Physics* 193 :563-594.
- Fraigneau Y. & Tenaud C. Générateur de conditions aux limites amont pour les simulations de type LES des écoulements en turbulence établie. 17<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique Troyes.
- Lumley J.L. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In A. M. Yagom and V. I. Tatarski, editors. *Atmospheric turbulence and Radio Wave Propagation*, pp 166-178. Nauka : Moscow.