

Calcul d'éléments finis par une technique de perturbation

Sylvain ZEZE & Michel POTIER-FERRY

Université Paul Verlaine-Metz
Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554, I.S.G.M.P.,
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01, France
zeze@univ-metz.fr

Résumé :

De nombreux problèmes de la physique et de la mécanique conduisent à des équations aux dérivées partielles dont la résolution nécessite une discrétisation du problème en éléments finis. Le but de cette étude est de proposer une nouvelle classe d'éléments finis utilisant une résolution locale des équations par une technique de perturbation. Cette technique est proche de la P-version des éléments finis. Au niveau élémentaire, on approxime la solution par une série entière d'ordre p .

Dans le cas d'une équation linéaire d'ordre deux, cette résolution locale permet de construire un élément de degré élevé, avec deux degrés de liberté par élément. Comme avec la p-version, la qualité de la solution est excellente lorsque le degré des polynômes est élevé. Notons que la résolution analytique permet d'éviter l'intégration qui est coûteuse lorsqu'il y a beaucoup de points de Gauss.

Des tests portant sur des équations linéaires et non-linéaires montrent les possibilités de la méthode.

Abstract :

The paper deals with the numerical solution of ordinary differential equations by a new variant of the finite element method. In a given element, the ordinary differential equation is solved by the perturbation technique and the unknown depends on the nodal values via high order interpolation polynomials. These polynomials are built up the perturbation technique and so they account for the ordinary differential equations inside the element. It seems that this new variant permits to recover some of the advantages of the p-version of the finite element, as an easy control of the discretization error and an accurate treatment of boundary layers. Tests concerning linear and nonlinear equations illustrate the possibilities of the method.

Mots-clefs :

éléments finis ; technique de perturbation ; P-version

1 Introduction

De nombreux problèmes issus de la physique et de la mécanique conduisent à des équations aux dérivées partielles dont la résolution nécessite une discrétisation du problème grâce à des techniques comme les éléments finis ou les différences finies.

Les méthodes des éléments finis classiques sont basées sur des approximations polynomiales de degré relativement bas. Plusieurs méthodes utilisant les éléments finis sont également utilisées pour la résolution de ces problèmes aux dérivées partielles. La P-Version des éléments finis en est une. Cette méthode a été l'objet de beaucoup d'études et a été développée par Babuska et Szabo dans [1] et a été aussi l'objet de conférences et de plusieurs articles [2]. Elle utilise les polynômes de Legendre et donne des résultats avec une très bonne précision. L'avantage de cette méthode est le contrôle facile de l'erreur de discrétisation. Les inconvénients sont, d'une part le coût de l'opération d'intégration, dû au grand nombre de points de Gauss, d'autre part par la taille importante des matrices élémentaires.

La technique de perturbation que nous traitons dans ce document utilise une approximation

d'ordre élevé. Dans chaque élément, on résout l'équation différentielle à partir d'un développement en série, entière tronquée à l'ordre p , à partir du centre de l'élément. Cette technique ressemble donc à la p -version des éléments finis, qui représente aussi la solution comme un polynôme de degré élevé. Toutefois, la p -version calcule ce polynôme par la méthode de Galerkin, alors que la technique de perturbation permet une résolution analytique sur l'élément, ce qui est beaucoup moins coûteux.

2 La technique de perturbation

Pour illustrer la technique de perturbation, on se place dans un cas simple 1D. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x)u(x) = g(x) ; -L \leq x \leq +L ; u(\pm L) = 0 \quad (1)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions données et $u(x)$ est l'inconnue du problème.

Le domaine $\Omega \equiv [-L, +L]$ est discrétisé en $N - 1$ éléments 1D à 2 nœuds (voir figure 1). N est le nombre de nœuds et x_c^e est la coordonnée du centre de l'élément e défini par $x_c^e = \frac{x_1^e + x_2^e}{2}$.

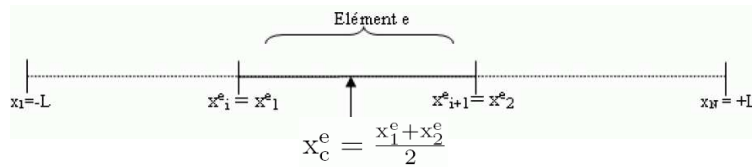


FIG. 1 – Maillage 1D

L'idée de ce travail est de chercher une solution analytique approchée du problème (1), dans l'élément e , sous la forme d'un développement en série entière au voisinage de x_c^e .

En développant chaque terme de l'équation (1), on arrive à exprimer la solution approchée $u(x)$ en fonction des deux premiers coefficients de son développement en série entière :

$$u^e(x) = \{P(x)\}^T \left(\{\gamma\} + [\alpha, \beta] \begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} \right) \quad (2)$$

où le vecteur $P(x)$ rassemble les polynômes de base $(x - x_c^e)^k$:

$$\{P(x)\}^T = \{1, x - x_c^e, \dots, (x - x_c^e)^k, \dots, (x - x_c^e)^p\}$$

Les coefficients du vecteur $\{\gamma\}$ et de la matrice $[\alpha, \beta]$ sont obtenus en fonction des coefficients des développements en série entière des fonctions f et g .

La formule (2) nous donne une approximation polynomiale de degré p de la solution de l'équation (1) sur l'élément e en fonction des deux nouvelles et seules inconnues u_0^e et u_1^e .

On réécrit la solution approchée (2) sous la forme d'une approximation nodale. Pour cela, on définit les variables nodales $q_1^e = u^e(x_1^e)$ et $q_2^e = u^e(x_2^e)$ à partir de l'équation (2) :

$$\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} = \{P_\gamma\} + [P_{\alpha\beta}] \begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \{P_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \{P(x_1^e)\}^T \{\gamma\} \\ \{P(x_2^e)\}^T \{\gamma\} \end{Bmatrix} \\ [P_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \{P(x_1^e)\}^T \{\alpha\} & \{P(x_1^e)\}^T \{\beta\} \\ \{P(x_2^e)\}^T \{\alpha\} & \{P(x_2^e)\}^T \{\beta\} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

On en déduit les deux coefficients du polynôme u_0^e et u_1^e en fonction des variables nodales :

$$\begin{Bmatrix} u_0^e \\ u_1^e \end{Bmatrix} = [P_{\alpha\beta}]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{Bmatrix} - \{P_\gamma\} \right) \quad (4)$$

L'inconnue élémentaire $u^e(x)$ est alors fonction des deux variables nodales q_1^e et q_2^e , par une formule qui fait apparaître trois fonctions de forme $N_0^e(x)$, $N_1^e(x)$, et $N_2^e(x)$:

$$u^e(x) = N_0^e(x) + N_1^e(x)q_1^e + N_2^e(x)q_2^e \quad (5)$$

$$\text{où } \begin{cases} N_0^e(x) = \{P(x)\}^T \left(\{\gamma\} - [\alpha, \beta][P_{\alpha\beta}]^{-1}\{P_\gamma\} \right) \\ \begin{Bmatrix} N_1^e(x) \\ N_2^e(x) \end{Bmatrix} = \{P(x)\}^T [\alpha, \beta][P_{\alpha\beta}]^{-1} \end{cases}$$

La formule (5) résume l'interpolation de l'inconnue $u^e(x)$ sur l'élément e . Par rapport à l'élément fini linéaire, elle fait apparaître trois fonctions de forme au lieu de deux. La nouvelle fonction $N_0^e(x)$ provient du second membre $g^e(x)$: c'est la solution approchée de l'équation différentielle avec des données nulles aux bords de l'élément. C'est un polynôme de degré p , de même que les autres fonctions $N_1^e(x)$ et $N_2^e(x)$ qui correspondent à la solution approchée de l'équation homogène ($g^e(x) = 0$) avec les valeurs données aux bords de l'élément :

$$N_1^e(x_1^e) = 1 \text{ et } N_1^e(x_2^e) = 0 \text{ et } N_2^e(x_1^e) = 0 \text{ et } N_2^e(x_2^e) = 1.$$

2.1 Problème global

Une fois les fonctions de forme $N_0^e(x)$, $N_1^e(x)$, et $N_2^e(x)$ déterminées, il ne reste plus qu'à vérifier la continuité de l'inconnue $u(x)$ ainsi que celle de sa dérivée aux nœuds. La première condition, continuité de $u(x)$ est imposée par le choix des fonctions de forme. Il reste donc à écrire la continuité de la dérivée aux nœuds. Cette continuité est établie à partir de la formulation faible des équations, en supposant que l'équation différentielle est résolue exactement par la technique de perturbation.

Cette résolution nécessite une seule inversion d'une matrice tridiagonale et symétrique dont la taille ne dépend que du nombre d'éléments N . L'avantage évident de la technique est donc le gain en temps de résolution.

3 Problème non-linéaire

Dans cette section, on couple la technique proposée avec la méthode de Newton pour la résolution des problèmes non linéaires. Nous illustrons cette façon de faire sur un problème régi par l'équation différentielle suivante :

$$-u''(x) + h(u(x)) = s(x) \quad ; -L < x < +L \quad u(\pm L) = 0 \quad (6)$$

où $h(u(x))$ est une fonction non linéaire de $u(x)$ et $s(x)$ est une fonction quelconque de x . Le principe de la méthode de Newton consiste à chercher un incrément $\Delta u(x)$ vérifiant le problème (6), linéarisé au voisinage d'une solution approchée $u_i(x)$, suivant :

$$-[\Delta u]''(x) + h_{,u}(u_i)\Delta u(x) + R^i(u_i(x)) = 0 \quad (7)$$

où $h_{,u}$ est la dérivée de la fonction $h(u)$ par rapport à u et $R^i(u_i(x))$ est le résidu défini par :

$$R^i(u_i(x)) = -u_i''(x) + h(u_i) - s(x) \quad (8)$$

Le problème (7) a la même forme que le problème linéaire (1) où $f(x)$ et $g(x)$, dans ce cas, sont données par : $f(x) = h_{,u}(u_i)$ et $g(x) = -R^i(u_i(x))$. La solution du problème (7) est obtenue en appliquant la technique de perturbation proposée pour la résolution du problème (1), quand l'incrément $\Delta u(x)$ tend vers zéro.

4 Rappel de la P-version

Comme nous l'avons déjà souligné dans l'introduction, cette méthode a déjà été l'objet de plusieurs études. Le rappel que nous faisons ici est tiré de [1]. Nous vous invitons pour plus de détails à lire le chapitre 3 de [1]. Nous allons illustrer la méthode sur le problème général (9) suivant :

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x)u(x) = g(x) ; -L \leq x \leq +L ; u(\pm L) = 0 \quad (9)$$

Après avoir ramené chaque élément à l'élément standard par la transformation $x = Q_k(\xi) = \frac{1-\xi}{2}x_k + \frac{1+\xi}{2}x_{k+1}$, on définit les fonctions de forme par :

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}; N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}; N_i(\xi) = \Phi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots \quad (10)$$

où la fonction Φ_j est fonction du polynôme de Legendre P_{j-1} :

$$\Phi_j(\xi) \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots \quad (11)$$

On note que $\Phi_j(\xi)$ est un polynôme de degré j . De la définition de Φ_j et de l'orthogonalité des polynômes de Legendre, on a :

$$\Phi_j(-1) = \Phi_j(1) = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{d\Phi_i}{d\xi} \frac{d\Phi_j}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots \quad (12)$$

A l'aide d'une formulation variationnelle et en prenant la solution sur chaque élément sous la forme de

$$u = \sum_{i=1}^{p_k+1} a_i^{(k)} N_i(\xi) \quad (13)$$

on résoud le problème (9) avec une très bonne précision.

5 Evaluation des résultats

Afin de faire une étude comparative, on prend le problème (1) avec : $f(x) = g(x) = 1$ c'est-à-dire : $-u''(x) + u(x) = 1 ; -L \leq x \leq +L ; u(\pm L) = 0$ dont la solution exacte est : $u(x) = 1 - \frac{\cosh(x)}{\cosh(L)}$

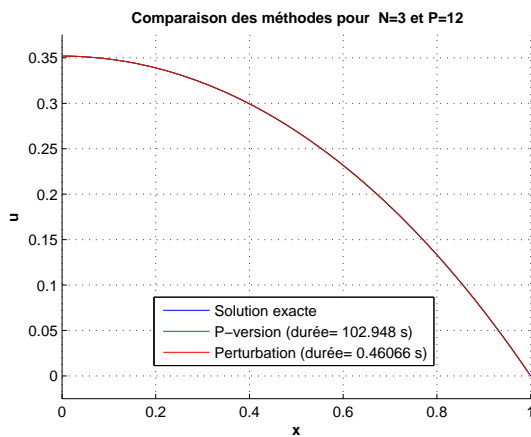
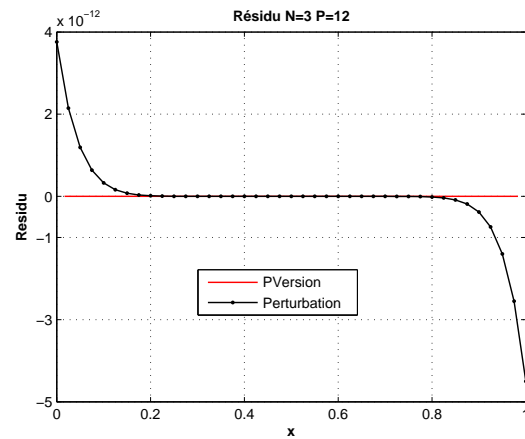
FIG. 2.a : Solution de (1), $L=1$ 

FIG. 2.b : Résidu engendré par chaque technique

FIG. 2 – Comparaison de la P-version et de la technique de perturbation

La figure (2.a) nous montre bien la bonne précision de la solution obtenue avec la P-version et la technique de perturbation. La figure (2.b) confirme l'excellente qualité de la solution avec un résidu de l'ordre de 10^{-12} pour un petit maillage (3 éléments, degré $p = 12$). Sur cette figure, on voit aussi que pour un même degré $p = 12$, la P-version donne une précision encore meilleure que la technique de perturbation.

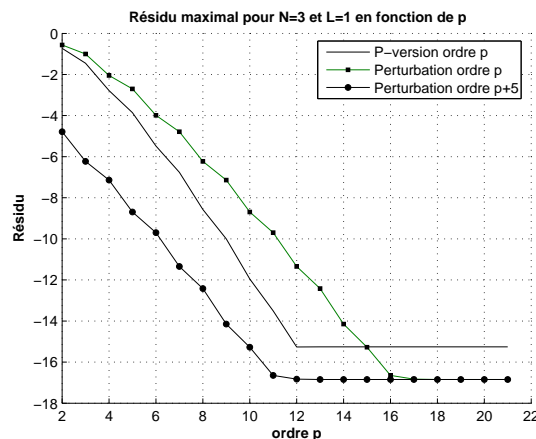


FIG. 3.a : Solution de (1)

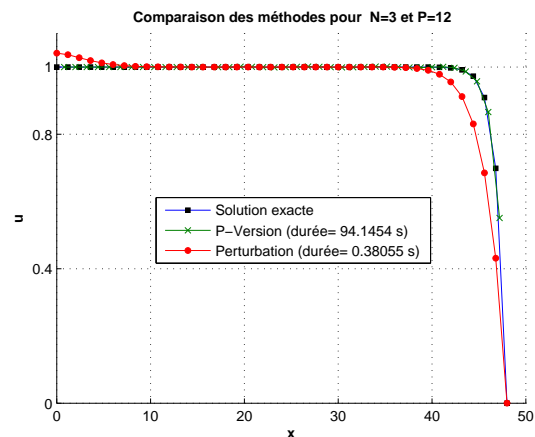


FIG. 3.b : Comparaison de la Convergence

FIG. 3 – Solution et convergence

Sur la figure (3.a), on compare la convergence de la technique de perturbation avec la P-version. On constate que les techniques convergent de manière comparable, ce qui signifie que la précision devient excellente quand on augmente le degré p . Comme il est normal, la P-version converge plus vite avec le degré, mais on peut aussi constater que, sur cet exemple, la technique de perturbation à l'ordre $p + 5$ est plus précise que la P-version à l'ordre p .

On traite ensuite un autre cas en changeant la longueur ($L = 48$) (3.b). Il est beaucoup plus difficile à cause d'une couche limite. Avec trois éléments, la technique de perturbation décrit assez mal la couche limite avec un degré $p = 12$. Dans ce cas, en prenant un ordre $p = 28$ (non représenté sur la figure), on arrive à représenter cette couche limite. Dans le cas de la P-version, on obtient une bonne approximation de cette solution avec seulement $p = 12$ mais pour un coût de calcul beaucoup plus grand qu'avec la technique de perturbation même à l'ordre $p = 28$.

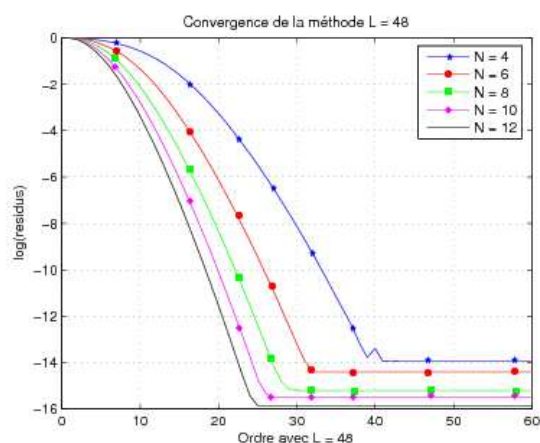


FIG. 4 – Convergence de la méthode de perturbation avec avec le nombre d’éléments ou avec le degré

Sur la figure (4) on voit que la technique de perturbation converge en augmentant le nombre d’éléments N ou l’ordre p de troncature des séries. Cette figure montre également que pour un nom d’éléments N correspond une valeur limite de l’ordre p qui optimise le résidu.

6 Conclusion

La technique de perturbation étudiée donne une très grande satisfaction puisqu’elle donne une solution avec une excellente précision. Bien que la p-version converge un peu plus rapidement, la technique de perturbation a l’avantage de nécessiter un faible coût de calcul, ce qui lui permet d’être efficace. Sa précision dépend du nombre d’éléments N et de l’ordre p de troncature des séries dont l’augmentation n’a pas grande influence sur le temps de cacul. Ainsi, on peut utiliser des approximations d’ordre élevé en ayant un coût de calcul raisonnable.

Références

- [1] Barna Szabo et Ivo Babuska, *Finite Element Analysis* John Wiley & sons, New York, Wiley classics library edition, 1991
- [2] Stefan M. Holzer, *Fully automatic higher-order finite element analysis of plate-like structures* WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics Eds. : H.A. Mang, F.G. Rammerstorf, Vienne, 7-12 Juillet 2002