

## Jonction forte entre deux solides : modèle simplifié et algorithme de résolution

Anne-Laure Bessoud<sup>\*,\*\*</sup>, Loïc Daridon<sup>\*</sup> & Françoise Krasucki<sup>\*</sup>

Université Montpellier II

<sup>\*</sup>LMGC, UMR-CNRS 5508

Case 48, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier Cedex 5

<sup>\*\*</sup>ACSIOM, UMR-CNRS 5149

Case 51, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier Cedex 5

bessoud@lmgc.univ-montp2.fr

### Résumé :

Nous étudions un problème modèle non classique de transmission décrivant une multistructure composée de deux solides reliés par une jonction forte. En utilisant une méthode de décomposition de domaines, le problème se ramène à une équation définie sur l'interface. Dans le cas thermique, cette équation est de la forme  $(\mathcal{I} + \mathcal{G})g = F$ . On montre que les propriétés de  $\mathcal{G}$  entraînent la convergence  $q$ -superlinéaire de l'algorithme GMRES.

### Abstract :

We consider a model non classical transmission problem corresponding to a multistructure composed by two bodies bonded by a thin strong layer. By using a domain decomposition the problem is reduced to an equation defined on the interface. In the thermic case, this equation has the form  $(\mathcal{I} + \mathcal{G})g = F$ . We prove that  $\mathcal{G}$  is compact, and hence the  $q$ -superlinearly convergence of the GMRES algorithm.

### Mots-clefs :

**Multi-structure, décomposition de domaine.**

## 1 Introduction

Nous étudions un problème modèle de transmission des contraintes entre deux solides assemblés par l'intermédiaire d'une couche très fine d'un matériau beaucoup plus rigide. Les différences de propriétés et d'épaisseur entre ces trois matériaux rendent le calcul numérique de la solution difficile. Ceci a motivé l'introduction d'un modèle simplifié permettant un calcul de la solution avec une bonne approximation. En utilisant une analyse asymptotique, semblable à Geymonat *et al.* (1999), la couche intermédiaire disparaît d'un point de vue géométrique, mais est remplacée par une énergie de membrane qui rend compte de conditions de transmission non classiques. Nous présentons ici le problème mathématique dans le cas de l'élasticité linéaire, et des résultats numériques dans le cas de la thermique.

## 2 Présentation du problème en élasticité linéaire

### 2.1 Position du problème

Soient  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  deux ouverts disjoints de  $\mathbb{R}^3$  de frontières  $\partial\Omega^+$  et  $\partial\Omega^-$ . Soit  $S = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ , on suppose que  $S$  a une mesure bidimensionnelle positive, et est projetable sur le plan  $x_3 = 0$ . On définit  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S$ .

On obtient le problème réel en translatant  $\Omega^+$  (resp.  $\Omega^-$ ) dans la direction  $e_3$  (resp.  $-e_3$ ) de

$\epsilon d/2$ , qui est la moitié de l'épaisseur du joint, où  $\epsilon > 0$  est un petit paramètre sans dimension, et  $d$  une grandeur caractéristique de  $\Omega^\pm$  (Fig.1.(a)). On définit alors  $\Omega_\epsilon^\pm = \{\mathbf{x} \pm \frac{\epsilon d}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in \Omega^\pm\}$ ,  $B_\epsilon = \{\mathbf{x} + \epsilon z \mathbf{e}_3, -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}, \mathbf{x} \in S\}$ ,  $S_\epsilon^\pm = \{\mathbf{x} \pm \frac{\epsilon d}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in S\}$  et  $\Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon^+ \cup \Omega_\epsilon^- \cup B_\epsilon \cup S_\epsilon^+ \cup S_\epsilon^-$ . On se place dans le cadre de l'élasticité anisotrope. Les tenseurs d'élasticité  $\mathbf{a}^+$ ,  $\mathbf{a}^-$ ,  $\mathbf{a}_\epsilon^s$  satisfont les propriétés habituelles de régularité, de positivité et de symétrie. On suppose que  $\mathbf{a}_\epsilon^s = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{a}^s$ , et  $\mathbf{a}^\pm, \mathbf{a}^s$  sont indépendants de  $\epsilon$ . L'assemblage est bloqué sur la partie  ${}^u\Gamma_\epsilon$  de sa frontière. Un chargement surfacique  $\mathbf{g} \in L^2({}^g\Gamma_\epsilon, \mathbb{R}^3)$  est imposé sur son complémentaire  ${}^g\Gamma_\epsilon$ . On suppose que  ${}^u\Gamma^- = \partial\Omega^- \cap {}^u\Gamma_\epsilon$  est de mesure non nulle, ainsi que  ${}^u\Gamma^s = \partial B_\epsilon \cap {}^u\Gamma_\epsilon$ . On suppose enfin que le complémentaire de  ${}^u\Gamma^s$  dans  $\partial B_\epsilon$  est libre de contrainte.  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_\epsilon, \mathbb{R}^3)$  est le chargement volumique.

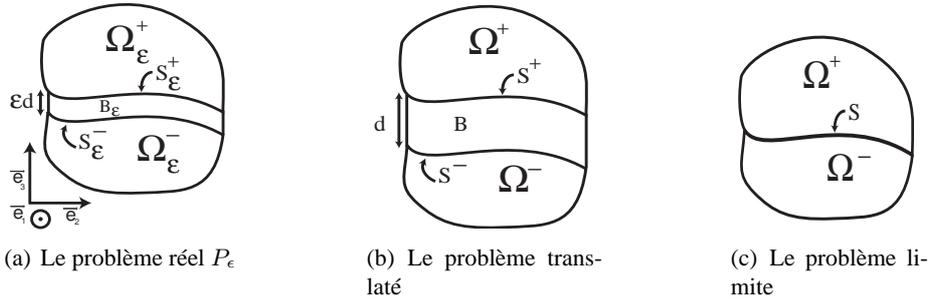


FIG. 1 – Les configurations de référence

On utilise la convention de sommation de l'indice répété, les indices latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , et les indices grecs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ . La formulation variationnelle de ce problème  $P_\epsilon$  s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_\epsilon \in V_\epsilon \text{ tel que} \\ a_\epsilon^+(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) + a_\epsilon^-(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\epsilon} a_\epsilon^s(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{v}) = L_\epsilon(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_\epsilon \end{cases} \quad (1)$$

où

$$\begin{aligned} a_\epsilon^\pm(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_\epsilon^\pm} a_{ijkl}^\pm \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega \\ a_\epsilon^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{B_\epsilon} a_{ijkl}^s \mathbf{e}_{kl}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega \\ L_\epsilon(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_\epsilon} \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i d\Omega + \int_{{}^g\Gamma_\epsilon} \mathbf{g}_i \mathbf{v}_i d\Gamma \end{aligned}$$

Ce problème admet une unique solution  $\mathbf{u}_\epsilon(\mathbf{x}) \in V_\epsilon = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_\epsilon, \mathbb{R}^3); \mathbf{v} = 0 \text{ sur } {}^u\Gamma_\epsilon\}$ .

## 2.2 Changement d'échelle et développement asymptotique

Afin d'obtenir des domaines indépendants de  $\epsilon$ , on dilate  $B_\epsilon$  d'un facteur  $\frac{1}{\epsilon}$  dans la direction  $\mathbf{e}_3$  (Fig.1.(b)). On note  $(y_1, y_2, y_3)$  les nouvelles coordonnées et on obtient ainsi les domaines  $B = \{\mathbf{y} + z \mathbf{e}_3; -d/2 < z < d/2; \mathbf{y} \in S\}$  et  $\Omega_{tr}^\pm = \Omega^\pm \pm d/2 \mathbf{e}_3$ . On définit alors  $S^\pm = \partial\Omega_{tr}^\pm \cap \partial B$  et  $\Omega_{tr} = \Omega_{tr}^+ \cup B \cup \Omega_{tr}^- \cup S^+ \cup S^-$ . Sous ces hypothèses, le problème translaté  $P(\epsilon)$  est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}(\epsilon) \in V \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V \\ a^+(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) + a^-(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) + a_{\alpha\beta}^s(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) + \frac{1}{\epsilon} a_{3\alpha}^s(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) + \frac{1}{\epsilon^2} a_{33}^s(\mathbf{u}(\epsilon), \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + \epsilon L^s(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (2)$$

où

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\beta}^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_B a_{i\alpha j\beta}^s u_{i,\alpha} v_{j,\beta} d\Omega, \\
a_{3\alpha}^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_B a_{i3j\alpha}^s (u_{i,3} v_{j,\alpha} + u_{j,\alpha} v_{i,3}) d\Omega, \\
a_{33}^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_B a_{i3j3}^s u_{i,3} v_{j,3} d\Omega, \\
L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_{tr}^+ \cup \Omega^-} f_i v_i d\Omega + \int_{g\Gamma_{tr}^+ \cup g\Gamma^-} g_i v_i d\Gamma, \\
L^s(\mathbf{v}) &= \int_B f_i v_i d\Omega
\end{aligned}$$

et  $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_{tr}, \mathbb{R}^3); \mathbf{v} = 0 \text{ sur } {}^u\Gamma\}$ .

La solution est alors cherchée sous forme d'un développement asymptotique du type :

$$\mathbf{u}(\epsilon) = \mathbf{u}^0 + \epsilon \mathbf{u}^1 + \epsilon^2 \mathbf{u}^2 + \dots \quad (3)$$

Cette hypothèse est mathématiquement justifiée par des résultats de convergence (Bessoud *et al.* (2007)). En injectant (3) dans (2) on obtient les problèmes suivants :

$$P_{-2} : a_{33}^s(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

$$P_{-1} : a_{33}^s(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}) + a_{3\alpha}^s(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0 \quad (5)$$

$$P_0 : a^\pm(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) + a_{\alpha\beta}^s(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) + a_{3\alpha}^s(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}) + a_{33}^s(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad (6)$$

On déduit du problème  $P_{-2}$  que  $u_{i,3}^0 = 0$  dans  $B$ . Ceci traduit la continuité du déplacement au premier ordre au niveau de l'interface :

$$\mathbf{u}_{|S^+}^0 = \mathbf{u}_{|S^-}^0 \quad (7)$$

Les deux problèmes  $P_{-1}$  et  $P_0$  entraînent que  $\mathbf{u}^0$  vérifie l'équation :

$$\int_{\Omega^\pm} a_{ijkh}^\pm u_{i,j}^0 v_{k,h} d\Omega + \int_B (a_{i\alpha j\beta}^s - a_{i3j\beta}^s (M^{-1})_{lk} a_{k3i\alpha}^s) u_{i,\alpha}^0 v_{j,\beta} d\Omega = L(\mathbf{v}) \quad (8)$$

$\forall \mathbf{v} \in V$  tel que  $\frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$  dans  $B$ , où  $(M^{-1})_{ij}$  est l'inverse du tenseur  $M_{ij} = a_{i3j3}^s$ . Afin d'alléger les notations, on désignera par  $\mathbf{u}$  le premier terme du développement asymptotique  $\mathbf{u}^0$ .

Les éléments intervenant dans l'intégrale sur  $B$  sont indépendants de  $x_3$ . On peut donc identifier  $S^+$  et  $S^-$  avec  $S$ , et reformuler le problème limite de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in W \text{ tel que} \\ a^+(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^-(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in W \end{array} \right. \quad (9)$$

avec  $W = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-) \in H^1(\Omega^+, \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega^-, \mathbb{R}^3); \mathbf{v}_{|S}^+ = \mathbf{v}_{|S}^- \in H^1(S, \mathbb{R}^3), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } {}^u\Gamma \right\}$   
et

$$a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d \int_S (a_{i\alpha j\beta}^s - a_{i3j\beta}^s (M^{-1})_{lk} a_{k3i\alpha}^s) u_{i,\alpha} v_{j,\beta} ds \quad (10)$$

Afin de simplifier la présentation, on s'intéressera (sans perte de généralité) au cas monoclinique. Dans ce cas, on obtient :

$$a^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d \int_S (a_{\alpha\beta\gamma\delta}^s - \frac{a_{33\alpha\beta}^s a_{33\gamma\delta}^s}{a_{3333}^s}) u_{\alpha,\beta} v_{\gamma,\delta} ds \quad (11)$$

Sous la forme (9), le problème limite est défini sur  $\Omega$ . La jonction disparaît d'un point de vue géométrique et intervient par l'intermédiaire de l'énergie de membrane  $a^s(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ . Le problème initial devient alors un problème d'élasticité classique, avec des conditions d'interface de type Ventcel :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- \\ [\sigma_N] = 0 \\ [\sigma_T] = d \operatorname{div}_2 \hat{\sigma} \end{cases} \quad (12)$$

où  $\hat{\sigma}$  est défini par  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(\mathbf{u})$ ,  $b_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta}^s - \frac{a_{33\alpha\beta}^s a_{33\gamma\delta}^s}{a_{3333}^s}$ ,  $\operatorname{div}_2$  est l'opérateur de divergence dans le plan de  $S$ , et  $[\sigma_N]$  et  $[\sigma_T]$  désignent respectivement le saut des composantes normale et tangentielles du vecteur contrainte  $\sigma \cdot \mathbf{n}$ . Il y a donc continuité du déplacement et de la composante normale de la contrainte normale au niveau de l'interface.

On montre, de façon classique, l'existence et l'unicité de la solution de (9).

### 3 Cas thermique : résolution par décomposition de domaine

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cas thermique et proposons une méthode de résolution basée sur une décomposition de domaine (Bessoud *et al.* (2006)). Les conditions de transmission dans le problème limite, sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} u^+ = u^- \\ K_{ij}^+ u_{,j}^+ n_i^+ + K_{ij}^- u_{,j}^- n_i^- = d H_{\alpha\beta} u_{,\alpha\beta} \end{cases} \quad (13)$$

$K^\pm$ ,  $K^s$  sont les matrices de conductivité des solides  $\Omega^\pm$  et de l'interface, et  $H_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^s - \frac{K_{3\alpha}^s K_{3\beta}^s}{K_{33}^s}$ . On a alors :  $a^s(u, v) = d \int_S (K_{\alpha\beta}^s - \frac{K_{3\alpha}^s K_{3\beta}^s}{K_{33}^s}) u_{,\alpha} v_{,\beta} dS$ .

#### 3.1 Décomposition de domaine

L'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine nous conduit à résoudre dans un premier temps un problème mixte classique sur chaque sous-domaine  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  avec la donnée  $u^\pm = g$  sur  $S$ . Dans un souci de simplifier les équations, on suppose que  $\partial S \subset^u \Gamma$ . Ainsi pour  $g \in H_0^1(S)$  donné, on considère les espaces  $V_g^\pm = \{v \in H^1(\Omega^\pm); v = g \text{ sur } S \text{ et } v = 0 \text{ sur } {}^u\Gamma^\pm\}$ , et  $a^\pm(\cdot, \cdot)$ ,  $L^\pm(\cdot)$  sont les équivalents thermiques des formes définies précédemment.

Soit  $u_g^\pm \in V_g^\pm$  tel que :

$$a^\pm(u_g^\pm, v - u_g^\pm) = L^\pm(v - u_g^\pm) \quad \forall v \in V_g^\pm, \quad (14)$$

alors  $u_g = (u_g^+, u_g^-)$  est solution du problème limite si et seulement si  $g$  est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } g \in H_0^1(S), \text{ tel que pour tout } g^* \in H_0^1(S) \\ a^s(g, g^*) = - \left\langle K_{ij}^+ u_{g,j}^+ n_i^+ + K_{ij}^- u_{g,j}^- n_i^-, g^* \right\rangle \end{cases} \quad (15)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-\frac{1}{2}}(S)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(S) \cap H_0^1(S)$ . Notons  $G : H^{-1}(S) \rightarrow H_0^1(S)$  l'opérateur solution du problème de Dirichlet associé à la forme  $a^s$ ,  $g$  est solution de (15) si et seulement si  $g = -G \left( K_{ij}^+ u_{g,j}^+ n_i^+ + K_{ij}^- u_{g,j}^- n_i^- \right)$ . Les applications  $g \mapsto K_{ij}^\pm u_{g,j}^\pm n_i^\pm$  étant affines de  $H_0^1(S) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(S)$  on peut écrire  $G \left( K_{ij}^+ u_{g,j}^+ n_i^+ + K_{ij}^- u_{g,j}^- n_i^- \right) = \mathcal{G}g + F$ , où  $\mathcal{G}g = G \left( K_{ij}^+ (u_{g,j}^+ - u_{0,j}^+) n_i^+ + K_{ij}^- (u_{g,j}^- - u_{0,j}^-) n_i^- \right)$ ,  $F = G \left( K_{ij}^+ u_{0,j}^+ n_i^+ + K_{ij}^- u_{0,j}^- n_i^- \right)$ , et

$u_0^\pm$  désigne la solution de (14) pour  $g = 0$ . On est ainsi ramené à la résolution du système linéaire :

$$(\mathcal{I} + \mathcal{G})g = -F. \quad (16)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème limite impliquent existence et unicité de la solution de (16). De plus on montre que l'opérateur linéaire  $\mathcal{G}$  est continu et compact. En appliquant les résultats de Moret (1997), on peut résoudre (16) avec un algorithme de type GMRES avec une convergence q-superlinéaire.

### 3.2 Résultats numériques

Nous avons choisi d'implémenter le problème décomposé dans Cast3m. Un des intérêts de la méthode de décomposition de domaine, est que l'on peut résoudre indépendamment les problèmes (14) et (16), et donc avec des maillages différents (Fig.2).

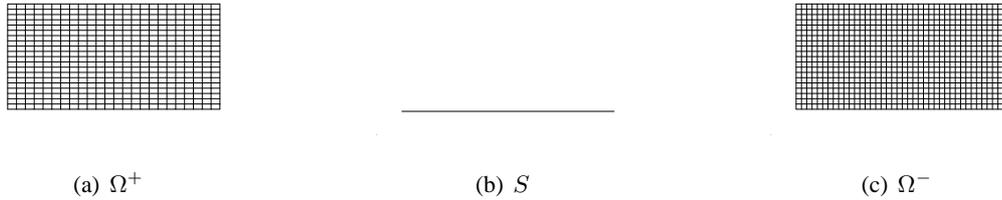
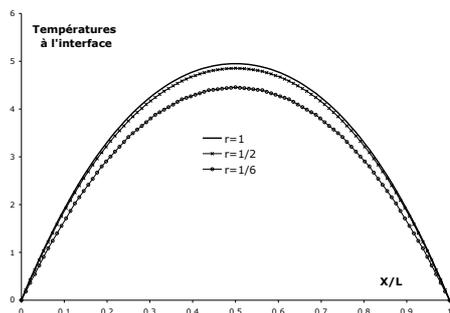


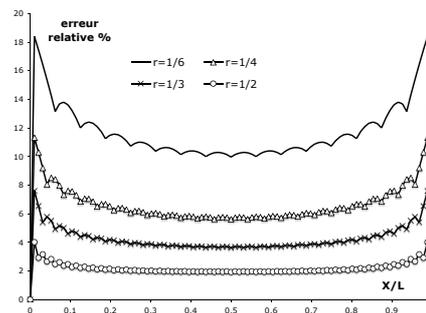
FIG. 2 – Décomposition du problème limite

Le calcul se décompose en deux étapes. Dans un premier temps, on résout (16) sur  $S$  avec l'algorithme GMRES. On construit les équivalents discrets de  $F$  et  $\mathcal{G}$  (en gardant les mêmes notations).  $F$  est obtenu après résolution de (15) en prenant au second membre  $u_0^\pm$  solutions de (14) avec  $g = 0$ . Pour  $g$  donné, la  $k$ -ième colonne de  $\mathcal{G}$  est égale à la solution de (15) avec au second membre  $K_{ij}^+ (u_{g,j}^+ - u_{0,j}^+) n_i^+ + K_{ij}^- (u_{g,j}^- - u_{0,j}^-) n_i^-$ , où  $u_{g^k}^\pm$  est la solution de (14) avec comme condition aux limites  $u^\pm = 1$  au noeud  $k$  et  $u = 0$  en tous les autres noeuds de  $S$ .  $\mathcal{G}$  est ainsi construit colonne par colonne en résolvant autant de fois (14) qu'il y a de noeuds sur  $S$ . Une fois la solution  $g^*$  de (16) obtenue, on résout (14) avec la condition  $u = g^*$  sur  $S$  pour obtenir la solution du problème limite.

Nous avons réalisé des calculs avec des maillages identiques et avec des maillages différents mais compatibles. Nous avons pris dans le premier cas  $N_S = N_{S^+} = N_{S^-} = 96$  éléments sur  $S, S^+$ , et  $S^-$ . Dans le deuxième cas, nous avons réalisé les calculs pour différentes valeurs de  $N_S$ , en faisant varier le rapport  $r = \frac{N_S}{\max(N_{S^+}, N_{S^-}) = 96}$ . On impose un flux de la forme  $3x^2$  sur le bord supérieur de  $\Omega^+$ , et la température est imposée nulle sur tous les autres bords. La construction de  $\mathcal{G}$  est d'autant plus coûteuse en temps de calcul qu'il y a de noeuds sur  $S$ . Il est donc intéressant d'étudier l'erreur relative en fonction du rapport  $r$ . Avec une interpolation linéaire, l'évolution des températures au niveau de l'interface dans les différents cas, et l'erreur relative sont représentées par les figures suivantes :



(a) évolution des températures à l'interface



(b) erreur relative

La condition de continuité des températures est bien respectée dans tous les cas, et les courbes ont une allure semblable. L'erreur relative est de 3% pour  $r = \frac{1}{2}$ , le temps de calcul de l'opérateur est alors divisé par deux, et varie de 12 à 18% lorsque  $r = \frac{1}{6}$ .

#### 4 Conclusions

Dans le cas thermique, la méthode proposée est stable et efficace. Elle utilise un outil performant qui est l'algorithme GMRES. L'utilisation de maillages différents nous permet de diminuer le temps de calcul de l'opérateur  $\mathcal{G}$ , d'autant plus important que le maillage est fin. L'utilisation d'opérateurs de projection plus fins que l'interpolation linéaire permettrait sûrement d'améliorer les résultats. Nous travaillons également sur le cas de l'élasticité, mais nous rencontrons des difficultés pour traiter le système linéaire correspondant, sur  $S$ .

#### Références

- A-L. Bessoud, F. Krasucki 2006 Q-Superlinear Convergence of the GMRES Algorithm for Multi-Materials with Strong Interface *C. R. Acad. Sc. Paris, s. I, Vol.343, pp 279–282, 2006*.
- A-L. Bessoud, F. Krasucki, G. Michaille 2007 Three Models of Multi-Materials with Strong Interface *en préparation*.
- G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci 1999 Mathematical Analysis of a Bonded Joint with a Soft Thin Adhesive *Mathematics and Mechanics of Solids Vol.7, pp.201-255*.
- G. Geymonat, F. Krasucki, D. Marini, M. Vidrascu 1998 A Domain Decomposition Method for a Bounded Structure *Mathematics Models and Methods in Applied Sciences Vol.8, pp. 1387-1402*.
- I. Moret 1997 A Note On The Superlinear Convergence of GMRES *Society for Industrial and Applied Mathematics Vol.34, pp.513-516*.