

## Comportement vis-à-vis du flambage d'une structure multi-matériaux assemblée par collage

Pascal Coudor, Jean-François Destrebecq & Alexis Béakou

*LaMI - Laboratoire de Mécanique et Ingénieries  
Université Blaise Pascal - Clermont II - IFMA  
Campus scientifique de Clermont-Ferrand - Les Cézeaux  
BP 265, 63175 Aubière Cedex, France  
pascal.coudor@ifma.fr*

### Résumé :

*Ce travail s'intéresse au comportement et à la résistance du joint dans les composants unidimensionnels multi-matériaux assemblés par collage et sollicités en flexion par flambage. Une approche multi-échelle est développée pour l'analyse du mécanisme d'interaction entre support, raidisseur et joint de colle et pour la détermination des contraintes dans le joint de colle. Dans un premier temps, la structure est homogénéisée afin d'analyser son comportement global dans le cadre classique de la théorie des poutres. Puis une méthode de localisation permet d'explicitier l'état de contraintes au sein des éléments constitutifs du composant et notamment du joint de colle. L'approche est appliquée à des composants simplement fléchis, puis à des composants sollicités en flambage. La validité de l'approche analytique proposée est discutée par comparaison avec des simulations numériques de deux structures types.*

### Abstract :

*This paper deals with the stress analysis and strength evaluation of adhesive joints in unidimensional structures. A multiscale analysis has been developed in order to evaluate stress into the adhesive. First of all, the structure has been homogenized to get the global behaviour with the classic beam theory. Then, location method allowed to derive stress into the adhesive. This approach has been used on simple bended struts and to buckled beams. Obtained results are compared with finite element models.*

### Mots-clefs :

**Structure multi-matériaux ; assemblage collé ; flambage**

### 1 Introduction

Les progrès en terme de performance des matériaux et de tolérance aux dommages permettent une avancée dans le domaine des assemblages collés. Traditionnellement utilisée pour le renforcement, cette technologie trouve maintenant des applications pour l'assemblage de composants structurels. Ainsi, dans les panneaux raidis (composants de base des structures navales ou aéronautiques), les liaisons entre panneaux et renforts doivent transmettre des efforts importants. La technique d'assemblage par collage présente plusieurs avantages : usinage limité, préservation des propriétés mécaniques des composants, faible sensibilité à la fatigue... Il a été montré qu'un composant raidi assemblé par collage présente une charge critique de flambage proche de celle de la structure équivalente soudée ou rivetée [Coudor *et al.* (2006)]. Ceci suppose cependant que le joint collé soit capable de supporter les contraintes qui résultent du mécanisme d'interaction entre le renfort, le joint et le support au cours du processus de flambage.

Dans ce contexte, une approche multi-échelle est développée pour l'analyse des mécanismes d'interaction dans un composant multimatériaux unidimensionnel en phase de flambage. Dans

un premier temps, la structure est homogénéisée afin d'analyser son comportement global dans le cadre classique de la théorie des poutres. Puis une méthode de localisation permet la détermination des contraintes en tout point à partir de la courbure de l'élément fléchi, notamment des contraintes normale transverse et de cisaillement dans le joint de colle. Dans un second temps, la validité de la démarche est examinée par comparaison à des simulations par éléments finis pour deux cas types. L'objectif est la détermination des états bidimensionnels de contrainte dans le joint dont la connaissance est nécessaire pour l'évaluation du risque de rupture.

## 2 Approche analytique du mécanisme d'interaction

### 2.1 Description du composant multimatériaux

L'étude concerne un composant unidimensionnel constitué d'un substrat raidi par un renfort assemblé par collage (Figure 1). Les trois matériaux sont supposés élastiques linéaires isotropes. L'épaisseur  $t_i$  et le module d'Young  $E_i$  réfèrent à la  $i^{\text{ème}}$  sous section. La convention de signes adoptée dans ce travail est précisé sur la Figure 2.

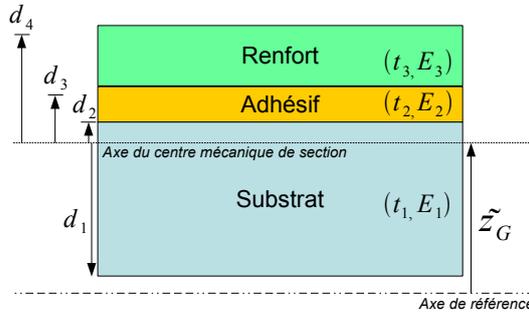


FIG. 1 – Constitution du composant raidi

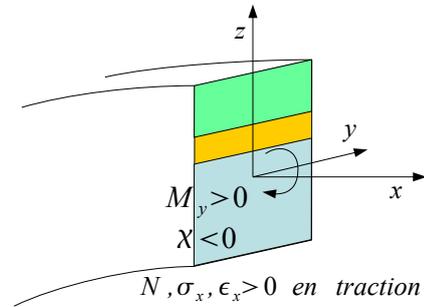


FIG. 2 – Convention de signes

Le centre mécanique de la section homogénéisée est donné par  $\tilde{z}_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i E_i \Omega_i}{\sum_{i=1}^n E_i \Omega_i}$ , sa rigidité en flexion s'écrit  $\tilde{K} = \sum_{i=1}^n E_i I_i$  et sa rigidité en traction  $\tilde{L} = \sum_{i=1}^n E_i \Omega_i$ . L'hypothèse d'adhésion parfaite entre les trois couches est considérée dans ce travail : continuité des composantes longitudinales et transversales du déplacement aux interfaces.

### 2.2 Equilibre local en zone courante

L'analyse repose sur les hypothèses classiques de la théorie des poutres (hypothèse de Bernoulli). L'équilibre statique local se trouve défini par les équations 1a et 1b en tenant compte de l'influence de la courbure  $\chi_0(x)$  du composant fléchi (grands déplacements).

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \chi_0(x) \sigma_x = 0 \quad (1b)$$

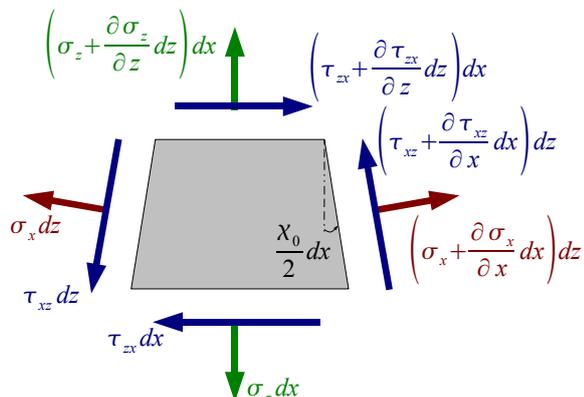


FIG. 3 – Equilibre local dans un composant fléchi

Dans la première équation, l'expression de la contrainte normale longitudinale résulte de l'équilibre de flexion composée :

$$\sigma_x(x, \xi) = E(\xi) (\varepsilon_0 - \xi \chi_0(x)) \quad (2)$$

avec,  $\xi$  : distance au centre mécanique de la section,  $E(\xi) = E_i$  : module d'Young des sous sections concernées (fonction de  $\xi$ ),  $\varepsilon_0 = N/\tilde{L}$  : allongement longitudinal au centre mécanique de la section,  $\chi_0(x) = -M_y(x)/\tilde{K}$  : courbure de la section fléchie. La résolution des équations 1 et 2 fournit l'état de contrainte en tout point de la zone courante du composant raidi (en supposant  $\tau_{xz}(x, d_1) = 0$  et  $\sigma_z(x, d_1) = 0, \forall x$ ) :

– Contrainte de cisaillement :

$$\forall \xi \in [d_i, d_{i+1}], \tau_{xz}(x, \xi) = \tau_{xz}(x, d_i) + \frac{E_i}{2} [\xi^2 - d_i^2] \chi_0'(x) \quad (3)$$

– Contrainte normale transverse :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in [d_i, d_{i+1}], \sigma_z(x, \xi) = & \sigma_z(x, d_i) - \frac{\chi_0(x)}{b} [N_x(x, \xi) - N_x(x, d_i)] \\ & - [\xi - d_i] \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}(x, d_i) - \frac{E_i}{6} \chi_0''(x) [2d_i^3 - 3d_i^2 \xi + \xi^3] \end{aligned} \quad (4)$$

En posant :

$$N_x(x, \xi) = b \int_{d_1}^{\xi} \sigma_x(x, z) dz, \forall \xi \in [d_1, d_4] \quad (5)$$

### 2.3 Correction de la contrainte transverse dans l'adhésif en zone d'extrémité

Deux mécanismes complémentaires doivent être pris en compte dans la zone d'extrémité :

– L'existence d'une zone d'ancrage dans laquelle le transfert d'effort entre le renfort et le substrat s'accompagne d'un pic de contrainte dans le joint de colle [Sierra-Ruiz *et al.* (2002)]. Dans le cas d'un composant fléchi, ce phénomène est négligeable lorsque l'extrémité du renfort coïncide avec le point de moment nul.

– Le tassement élastique du joint dont le module élastique est généralement inférieur à ceux des deux éléments collés. Le renfort peut alors être considéré comme une poutre élastiquement appuyée sur le substrat par le biais du joint (Figure 4).

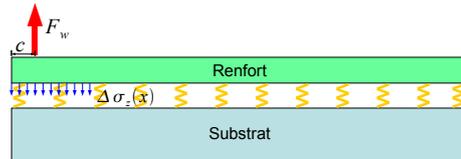


FIG. 4 – Poutre sur appuis continus élastiques

Ce dernier mécanisme provoque l'apparition dans le joint de colle d'une contrainte normale transverse complémentaire  $\Delta\sigma_z(x)$  proportionnelle au tassement du joint. En conséquence, l'équilibre statique transverse global du renfort s'écrit (cas d'un composant symétrique) :

$$\int_0^{L/2} q(x) dx - b \int_0^{L/2} (\sigma_z(x, d_3) + \Delta\sigma_z(x)) dx = 0 \quad (6)$$

où  $q(x)$  est le chargement extérieur appliqué à la surface du renfort. On en déduit la résultante de  $\Delta\sigma_z(x)$  sur  $[0, L/2]$  :

$$F_w = \int_0^{L/2} [q(x) - b\sigma_z(x, d_3)] dx \quad (7)$$

Finalement, la correction  $\Delta\sigma_z(x)$  à ajouter à  $\sigma_z(x, d_3)$  donné par l'équation 4 peut être évaluée en modélisant le renfort comme une poutre sur appui continu élastique soumise à une force ponctuelle  $F_w$  appliquée dans la zone de Saint-Venant à une distance  $c$  de son extrémité (Figure 4). La solution de ce problème s'écrit [Goulet *et al.* (1998)] :

$$\Delta\sigma_z(x) = \frac{F_w\gamma}{2b}W(x-c) + \frac{F_0\gamma}{2b}W(x) + \frac{C_0\gamma^2}{b}X(x), \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{kb}{4E_3I_3}} \quad (8)$$

Avec,

$$\begin{aligned} F_0 = F_w [Y(c) - 2Z(c)] & \quad \left| \quad W(x) = -e^{-\gamma x}(\cos \gamma x + \sin \gamma x) \right. & \quad \left. X(x) = e^{-\gamma x} \sin \gamma x \right. \\ C_0 = \frac{F_w}{\gamma} [Y(c) - Z(c)] & \quad \left| \quad Y(x) = e^{-\gamma x}(\cos \gamma x - \sin \gamma x) \right. & \quad \left. Z(x) = -e^{-\gamma x} \cos \gamma x \right. \end{aligned}$$

### 3 Validations

L'approche est appliquée à un assemblage collé soumis à deux modes de chargement : flexion simple sous un chargement  $q$  uniformément réparti, flambement sous un effort de compression appliqué à mi-hauteur du substrat (Figure 5 et 6). Les caractéristiques géométriques et

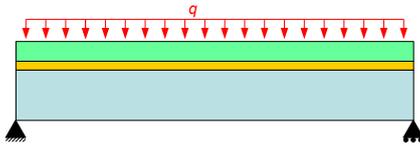


FIG. 5 – Assemblage collé simplement appuyé sous chargement uniforme

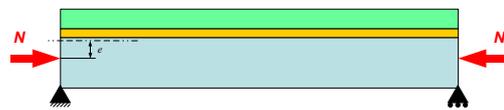


FIG. 6 – Assemblage collé simplement appuyé sous flambage avec excentricité

mécaniques sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} b = 10 \text{ mm} & \quad t_3 = 1 \text{ mm} & \quad t_2 = 0.2 \text{ mm} & \quad t_1 = 3 \text{ mm} \\ L = 100 \text{ mm} & \quad E_3 = 72000 \text{ MPa} & \quad E_2 = 1950 \text{ MPa} & \quad E_1 = 72000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Pour le modèle éléments finis,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$ . Dans chaque cas, la validation consiste à comparer les états de contraintes donnés par une modélisation éléments finis à ceux déduits de l'approche analytique développée ci-dessus.

#### 3.1 Modèle fléchi sous chargement réparti

La figure 7 compare les valeurs obtenues par les deux méthodes pour la contrainte de cisaillement dans une section transversale située à 30 mm de l'appui ( $q = 1 \text{ kN.m}^{-1}$ ). Les valeurs numériques et analytiques sont concordantes. Les conditions aux limites pour les faces inférieure et supérieure sont respectées (cisaillement nul). Aux extrémités, la contrainte de cisaillement maximale dans le joint vaut 13,7 MPa pour le modèle éléments finis et 13,8 MPa pour le modèle théorique, soit une différence relative de 1%.

La figure 8 compare les valeurs obtenues par les deux méthodes pour la contrainte normale transverse dans la même section. Là encore, les résultats analytiques et numériques sont concordants. On note la forte sensibilité vis-à-vis des effets du 2<sup>nd</sup> ordre (influence de la courbure). La figure 9 présente la distribution de la contrainte normale transverse le long du joint. Le pic visible à chaque extrémité résulte du mécanisme d'interaction transverse discuté à la section 2.3. On note un léger écart entre le modèle analytique et les résultats numériques dans cette zone.

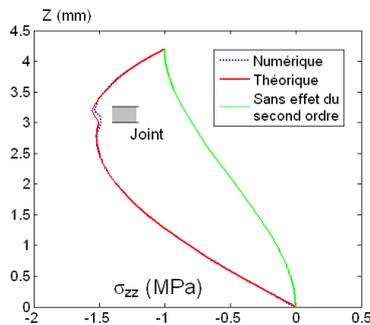


FIG. 8 – Répartition de la contrainte normale transverse au droit d'une section transversale

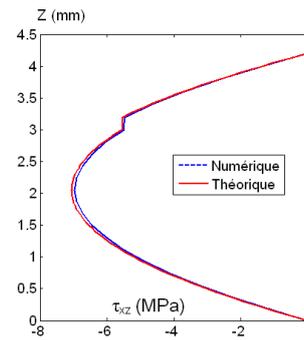


FIG. 7 – Répartition de la contrainte de cisaillement dans une section transversale

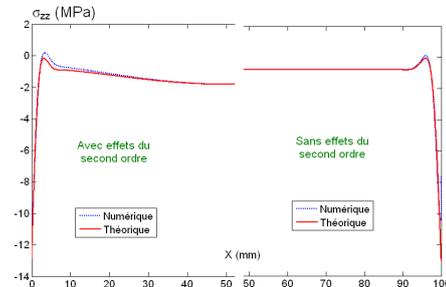


FIG. 9 – Répartition de la contrainte normale transverse le long du joint

### 3.1.1 Modèle sollicité en flambage

L'effort de compression appliqué au centre du substrat se trouve excentré par rapport au centre mécanique de la section, ce qui provoque le flambage du modèle. Les résultats discutés ci-dessous correspondent à  $N = -3,4 \text{ kN}$ , soit 80% de la force critique. L'expression théorique de la flèche utilisée pour la mise en oeuvre du modèle théorique est la suivante [Timoshenko *et al.* (1961)] :

$$w(x) = e \left[ 1 - \cos kx + \frac{\cos kL - 1}{\sin kL} \sin kx \right], \quad k^2 = \frac{N}{\tilde{K}} \quad (9)$$

L'écart avec la flèche obtenue par éléments finis est de 2% environ.

La figure 10 représente la répartition de la contrainte de cisaillement le long du joint. La valeur maximale de cisaillement vaut 7,8 MPa pour le modèle numérique et 8,8 MPa pour le modèle théorique, soit une différence relative d'environ 11%. L'écart observé aux extrémités correspond au mécanisme d'ancrage qui n'est pas pris en compte dans le modèle analytique [Sierra-Ruiz *et al.* (2002)].

La figure 11 montre la concordance entre résultats analytiques et numériques pour la

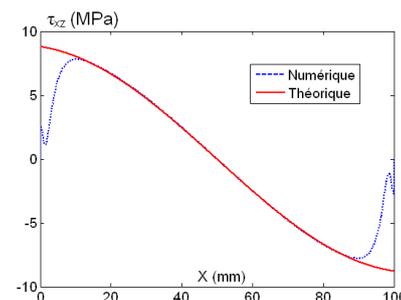


FIG. 10 – Contrainte de cisaillement dans le joint

contrainte transverse dans une section située à 30 mm de l'appui. La figure 12 donne la répartition de la contrainte transverse dans le joint de colle, avec ou sans la correction donnée par l'équation 8. On observe sur ces trois figures que le fonctionnement de l'assemblage collé est correctement décrit en zone courante par le modèle analytique proposé (à l'exception de la zone d'ancrage). Comme pour l'élément fléchi, on observe l'existence d'un pic de la contrainte normale transverse dû au tassement du joint. L'existence de ce pic est déterminante pour l'évaluation du risque de rupture du joint. L'écart observé sur la figure 12 montre que l'analyse de la zone d'extrémité doit être affinée afin de mieux comprendre la mécanique d'interaction dans cette zone.

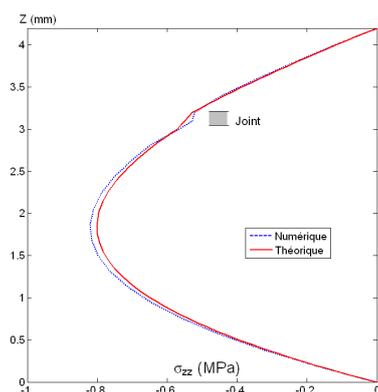


FIG. 11 – Répartition de la contrainte normale transverse au droit d'une section transversale

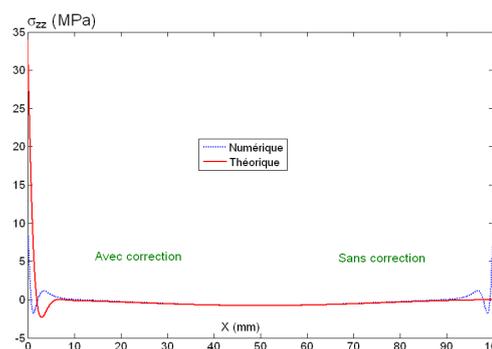


FIG. 12 – Répartition de la contrainte normale transverse le long du joint

## 4 Conclusions

Ce papier propose une démarche pour l'analyse du mécanisme d'interaction au sein de composants unidimensionnels multi-matériaux fléchis assemblés par collage. La méthode fournit une solution analytique de l'état de contrainte dans le joint de colle. Cette solution intègre une correction apportée à l'extrémité du renfort pour tenir compte de l'effet de tassement transverse du joint dans cette zone. Les résultats obtenus pour deux cas types montrent l'existence d'un pic de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale transverse dans cette zone. La bonne connaissance de ce pic est essentielle pour l'évaluation du risque de rupture du joint. Ce travail ouvre des perspectives pour l'analyse des renforts bi-dimensionnels.

## Références

- Coudor, P. , Van der Veen, S. , Béakou, A. 2006 Global-local analysis of bonded skin-to-stiffener joints in post-buckled panels. ICAS2006.
- Goulet, J. , Boutin, J.P. 1998 Aide-mémoire de Résistance des matériaux. Paris : Dunod.
- Sierra-Ruiz, V., Destrebecq, J.-F., Grédiac, M. 2002 The transfer length in concrete structures repaired with composite materials : a survey of some analytical models and simplified approaches. *Composite Structures* **55** 445-454.
- Stephen P.T., James M.G. 1961 Theory of elastic stability. McGraw-Hill, Inc.
- Tong, L., Luo, Q. 2007 Fully-coupled nonlinear analysis of single lap adhesive joints. *International Journal of Solids and Structures* **44** 2349-2370.