

Stratégie multi-échelle pour l'optimisation de détails structuraux

Sandrine Buytet, Pierre-Alain Boucard & Pierre-Alain Guidault

LMT-Cachan
61 avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex
buytet@lmt.ens-cachan.fr

Résumé :

La prise en compte et l'optimisation de la forme et de la position de détails structuraux sont des étapes importantes dans le dimensionnement, entraînant très souvent des temps de calcul prohibitifs. Faire appel à une méthode d'optimisation multi-niveaux de modèles permet de réduire ces temps de calcul. La stratégie présentée ici s'appuie sur trois points fondamentaux. Le premier permet de décrire la géométrie du détail à optimiser indépendamment du maillage. Il combine une méthode d'enrichissement locale (X-FEM) et l'utilisation de fonctions Level-Set pour décrire facilement le détail. Le deuxième utilise une technique de résolution micro-macro. Elle est basée sur une méthode de décomposition de domaine mixte et une stratégie de résolution multi-échelle. Enfin, le troisième est une technique de multirésolution qui permet de réduire les coûts de calcul lorsque l'on traite un problème où certains paramètres peuvent varier.

Abstract :

The optimization of the position and shape of structural details is an important step for the design, that leads to large computational costs. A multi-level optimization method allows to reduce this computational times. In this paper, the proposed approach is based on three fundamental points. The first one allows to describe the structural detail without remeshing. It uses, on the one hand, a local enrichment method (X-FEM) and on the other hand, Level-Set functions to describe the detail. The second one deals with the micro-macro approach. It is based on a mixed domain decomposition and a multiscale resolution strategy. Finally, a multi-resolution approach is used in order to reduce the computational costs when design parameters are changed during the optimization process.

Mots-clefs :

optimisation multi-niveaux, approche micro-macro, multi-résolution

1 Introduction

L'optimisation complète d'un modèle de niveau fin conduit rapidement à des coûts de calcul prohibitifs. A l'opposé, la procédure d'optimisation d'un modèle beaucoup plus grossier, bien qu'économique risque d'engendrer des résultats peu fiables. Il apparaît donc nécessaire de pouvoir faire évoluer la finesse d'un modèle au cours du processus d'optimisation afin de rendre la procédure à la fois performante et abordable en terme de coûts de calcul. Cette stratégie de plus en plus utilisée, est ce que l'on appelle l'optimisation multi-niveaux de modèles. Elle est tout à fait adaptée pour traduire le comportement complexe d'une structure tout en prenant en compte l'influence d'un certain nombre de détails. Dans la littérature on distingue deux grandes catégories d'optimisation multi-niveaux de modèles : les modèles hiérarchiques et les modèles imbriqués. Dans les méthodes dites hiérarchiques, considérées par Robinson *et al.* (1999) et Keane *et al.* (2000), le modèle mécanique est enrichi progressivement à partir de la solution issue de l'optimisation du modèle de niveau supérieur. Dans cette approche le modèle dit «parent» est définitivement oublié lors de l'optimisation du niveau de modélisation plus fin dit «enfant». Dans notre étude, nous nous plaçons dans le cadre plus élaboré de l'optimisation imbriquée,

traitée par Engels *et al.* (2004). Dans cette approche, les modèles parent et enfant sont optimisés de façon couplée et peuvent ainsi communiquer entre eux. C'est à dire que l'optimisation à l'échelle fine du détail aura une influence sur l'optimisation globale à l'échelle de la structure et vice versa.

Ici, nous proposons une méthode multi-échelle comme nouvel outil pour l'optimisation multi-niveaux. L'optimisation d'un modèle nécessitant un nombre important d'appels à une fonction coût, nous proposons une méthode permettant de réduire considérablement le temps de calcul d'un appel à un autre. Nous présenterons brièvement les bases théoriques de notre approche avant d'introduire un exemple simple montrant les performances obtenues.

2 Une méthode multi-échelle au service de l'optimisation multi-niveaux de modèles

L'approche appelée "micro-macro" proposée dans cette étude permet de séparer les différentes échelles de modélisation tout en permettant une communication naturelle entre ces échelles. Ce dernier point rentre tout à fait dans le cadre de l'optimisation multi-niveaux de modèles imbriqués. L'approche micro-macro s'articule autour de trois points :

Un partitionnement de la structure en sous-structures et interfaces

Une sous-structure E , occupant le domaine Ω_E , est soumise à l'action de son environnement (les interfaces voisines) qui se traduit par une distribution d'effort \underline{F}_E et une distribution de déplacement \underline{W}_E (Figure 1). Ce partitionnement confère le caractère mixte de cette méthode de décomposition de domaine. Le comportement d'une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures

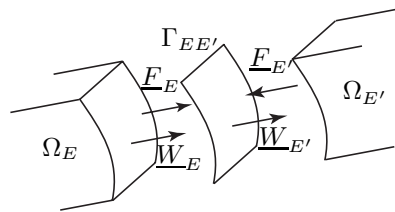


FIG. 1 – Echange sous-structures / interfaces

Ω_E et $\Omega_{E'}$ dépend de la liaison que l'interface doit modéliser. Ce comportement peut être écrit comme une relation de comportement mixte entre les interdéplacements et les interefforts agissant sur l'interface. Les deux comportements d'interface utilisés dans le cadre de notre étude sont :

- Interface parfaite

Les déplacements sont continus à travers l'interface et les efforts sont en équilibre. La relation de comportement se traduit alors par les deux équations : $\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0$ et $\underline{W}_E - \underline{W}_{E'} = 0$.

- Interface de contact unilatéral avec frottement

On note μ le coefficient de frottement de Coulomb. \underline{n} désigne le vecteur normal à $\Gamma_{EE'}$ au point courant et sortant par rapport à Ω_E . \mathbf{P}_t désigne le projecteur orthogonal associé. La relation de comportement se traduit alors par :

- équilibre des efforts : $\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0$,
- non-pénétration : $\underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \geq 0$ et $\underline{n} \cdot \underline{F}_E \leq 0$,
- complémentarité : $(\underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E))(\underline{n} \cdot \underline{F}_E) = 0$,
- lois de Coulomb :

$$\text{si } \|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| < \mu |\underline{n} \cdot \underline{F}_E|, \text{ alors } \mathbf{P}_t (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) = 0$$

$$\text{si } \|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| = \mu |\underline{n} \cdot \underline{F}_E|, \text{ alors}$$

(adhérence)

$$\mathbf{P}_t(W_{E'} - W_E) \wedge \mathbf{P}_t \underline{F}_E = 0 \text{ et } \mathbf{P}_t(W_{E'} - W_E) \cdot \mathbf{P}_t \underline{F}_E \geq 0 \quad (\text{glissement})$$

Un aspect multi-échelle introduit au niveau des interfaces

Contrairement à la plupart des approches multi-échelles, la séparation entre les échelles s'introduit ici au niveau des interfaces (voir Ladevèze *et al.* (2002)). Les quantités d'interface s'écrivent comme la somme d'une partie macro et d'une partie micro. Ainsi, $\underline{F}_E = \underline{F}_E^M + \underline{F}_E^m$ et $\underline{W}_E = \underline{W}_E^M + \underline{W}_E^m$. \underline{F}_E^M et \underline{W}_E^M sont choisis tels qu'ils vérifient le découplage des travaux micro et macro.

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} dS = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M dS + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m dS \quad (1)$$

Une stratégie de résolution spécialisée

L'algorithme itératif LATIN développé par Ladevèze (1999) permet d'une part de résoudre de façon indépendante les problèmes «micro» au sein des différentes sous-structures, et d'autre part de transmettre l'information «macro» via les interfaces par un problème global assurant une convergence rapide de l'algorithme.

3 Description du détail structural indépendamment du maillage

La seconde force de la méthode provient de la description même du détail à partir des méthodes X-FEM et des fonctions Level-Set. Au cours de l'optimisation, la variation de la position du détail ne nécessite pas de remaillage de la structure. Dans toute la suite, on se restreindra à l'étude d'un trou circulaire.

3.1 Modélisation d'un trou par la X-FEM

L'aspect multi-échelle n'étant introduit qu'au niveau des interfaces, il est possible d'enrichir l'approximation du champ de déplacement \underline{u}_E sur une sous-structure E en utilisant la X-FEM Guidault *et al.* (2006). En considérant un trou :

- L'interpolation du champ de déplacement par la X-FEM est donnée par (voir Sukumar *et al.* (2000)) :

$$\underline{u}_{E_h}(\underline{x}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{u}_i \quad \text{où} \quad H(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \text{ est dans la matière} \\ 0 & \text{si } \underline{x} \text{ est dans le vide} \end{cases} \quad (2)$$

N étant l'ensemble des nœuds du maillage, \underline{u}_i les degrés de liberté correspondants et H la fonction d'enrichissement .

Seuls les éléments traversés par la frontière du trou font l'objet d'un traitement spécifique.

- L'intégration numérique de la formulation faible ne se fait pas sur la portion de l'élément située dans le vide.

- Les nœuds à l'intérieur du trou dont aucun élément n'est coupé par sa frontière sont éliminés du maillage en supprimant leurs degrés de liberté dans le système final.

3.2 Description du détail par level-set et multi-résolution

La méthode des level-sets proposée par Osher *et al.* (1988) est une technique numérique permettant de suivre l'évolution d'une surface mobile facilement indépendamment du maillage. Dans le cas d'un trou la fonction level-set est donnée par $\varphi(\underline{x}) = \min(\|\underline{x} - \underline{x}_c\| - r_c)$, où \underline{x}_c et r_c sont respectivement la position de l'origine et le rayon du trou.

Il est facile alors d'exprimer la fonction d'enrichissement H en fonction de la fonction distance φ comme suit :

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(\underline{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \varphi(\underline{x}) < 0 \end{cases}$$

Lors de la phase d'optimisation, une simple mise jour de φ et de H est réalisée, le maillage éléments finis et la structure du problème restant inchangés.

On profite aussi dans le processus d'optimisation de la stratégie multi-résolution. On utilise les résultats d'un précédent calcul pour un jeu de variables de conception données comme solution pour initialiser l'algorithme itératif LATIN de l'approche micro-macro d'un nouveau calcul. Un faible nombre d'itérations est alors suffisant pour atteindre la convergence associée au nouveau jeu de paramètres (voir Boucard *et al.* (2003)). L'algorithme général d'optimisation multi-niveaux à partir de la méthode multi-échelle est donné sur la figure 2.

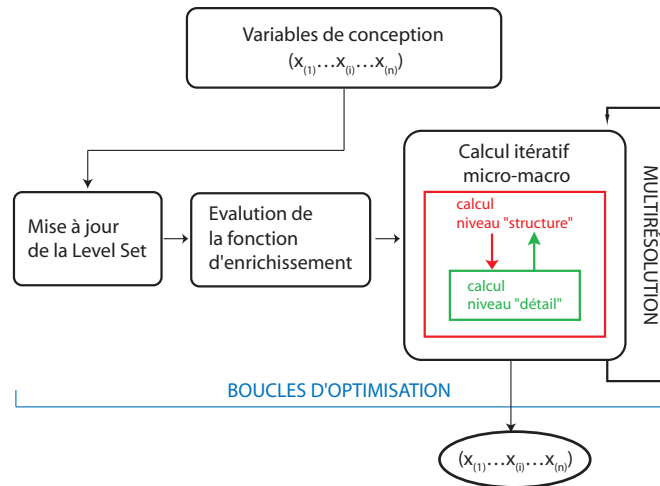


FIG. 2 – Algorithme général de résolution

4 Résultats numériques

On considère une structure Ω_1 encadrée suivant sa longueur et en contact avec frottement avec une structure Ω_2 soumise à une pression uniforme $p = 100 Pa$ sur ses bords. Les constantes du matériau et le coefficient de frottement sont respectivement égales à $E = 210000 MPa$, $\nu = 0.3$ et $\mu = 0.6$. Le domaine est décomposé en 13 sous-structures identiques et l'interface de contact est représentée en gras rouge sur la figure 3 (a). Un trou de rayon $8 mm$ est percé dans la structure du haut. À l'échelle du système ($L = 243 mm$ et $l = 162 mm$), le trou est assimilé à un détail structural. Les coordonnées de son centre x_c et y_c constituent les variables de conception du problème. Elles sont optimisées de façon à ce que la répartition de pression normale au niveau de l'interface de contact, assimilée à la fonction coût, soit la plus uniforme possible. La fonction coût f est alors donnée par $f = (p_{max} - p_{min})/p_{moy}$ où p_{max} , p_{min} et p_{moy} sont respectivement les pressions maximale, minimale et moyenne.

L'optimisation s'effectue en trois temps :

- On construit un méta-modèle constituant le premier niveau de modèle. Pour cela, on calcul en multi-résolution la fonction coût pour différentes positions du trou variant à l'intérieur de la zone grisée, (points noirs sur la figure 3 (b)). La surface de réponse est ensuite obtenue par interpolation cubique.

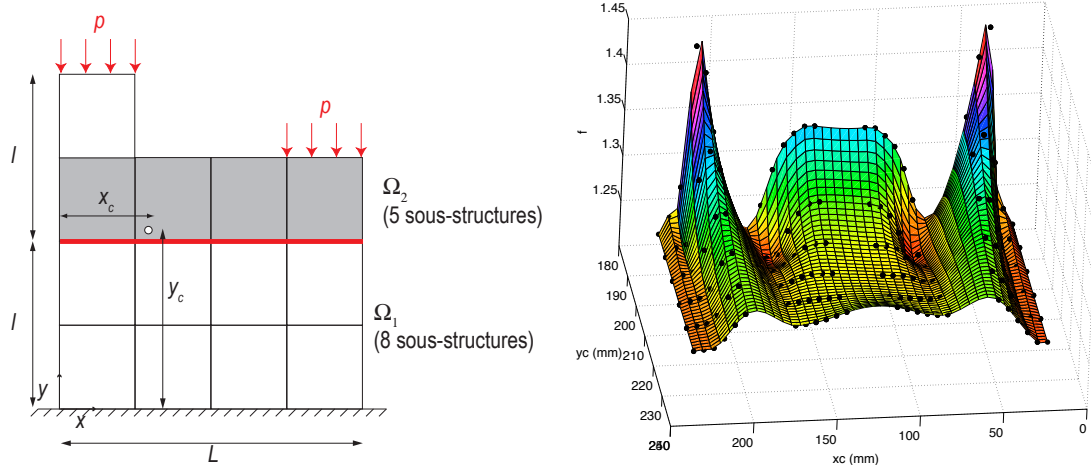


FIG. 3 – (a) Modèle (b) Surface de réponse

- L'optimisation avec le méta-modèle, pauvre en terme de temps de calcul, effectuée par exemple avec un algorithme génétique, permet de déterminer très rapidement la (les) zone(s) d'intérêt. Concrètement, l'information obtenue à l'issue de l'optimisation de la fonction coût est la sous-structure à l'intérieur de laquelle se situe le trou.

- On procède à l'optimisation de niveau fin à proprement parler. La fonctionnelle coût est calculée à chaque appel à partir du code multi-échelle. La minimisation s'effectue sous les contraintes traduisant que le trou doit rester à l'intérieur de la sous-structure préalablement identifiée. La minimisation sous contrainte se fait à partir d'un algorithme de descente où les gradients de f sont évalués numériquement par différences finies. En initialisant à $(x_c^0, y_c^0) = (83, 183.5)$, l'algorithme converge en 14 boucles d'optimisation et 84 appels à la fonction coût f pour la position optimale $(x_c, y_c) = (79.5, 186, 9)$.

Dans notre approche, seul le premier appel à f est réellement coûteux, que se soit lors de la construction du méta-modèle ou au cours du processus d'optimisation. Pour les calculs suivants, lorsque la position du trou varie, on initialise l'algorithme LATIN avec la solution convergée issue du calcul précédent. De plus grâce à la décomposition de domaine, on ne re-évalue la matrice de rigidité que des sous-structures concernées par le détail. Pour illustration, le tableau ci-après compare pour les trois phases de calcul, les temps CPU requis par notre méthode à ceux évalués pour une méthode «classique» (sans multi-résolution). Pour évaluer ce temps «classique», on estime que le temps de calcul de chaque fonction coût est toujours égal à celui nécessaire au premier calcul de notre approche. Le ratio «temps classique / temps multirésolution» supérieur à 6 montre sans équivoque la force de la méthode multi-échelle/multi-résolution. Lors de la phase d'optimisation du modèle fin, on distingue deux types d'appel à la fonction coût, les appels «réels» qui requièrent en moyenne 50 s de temps CPU et tous les appels nécessaires pour évaluer les gradients. Ces derniers impliquant de plus petites variations de la position du trou engendrent par conséquent des temps de calculs plus faibles de l'ordre de 20 s. Notons tout de même que les calculs ayant été effectués sous un code MATLAB orienté objet, les temps CPU, bien que réduits grâce à notre approche, peuvent paraître importants, ils ne sont donnés qu'à titre comparatif.

Etape	Nombre d'appels à la fonction coût	Temps calcul LATIN	Temps calcul LATIN (multirésolution)
Construction méta-modèle (calcul LATIN)	144	144 × 326 s	326 + 10716 s
Optimisation modèle fin (algorithme de descente + LATIN)	84	84 × 386 s	386 + 2595 s
	total	79368 s	14023 s

5 Conclusions

La méthode proposée ici, est une alternative intéressante aux techniques d'optimisation multi-niveaux de modèle. L'approche micro-macro permet un couplage naturel entre les deux échelles de modélisation constituant ainsi un atout majeur pour l'optimisation imbriquée de modèles. De plus la technique de multirésolution réinitialisant le calcul LATIN à partir de la solution issue d'un calcul précédent, permet d'effectuer un nombre important d'appels à la fonction coût et ceci pour des temps de calcul relativement raisonnables.

Ces travaux ont reçu le soutien de l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du programme RNTL 2005.

Références

- Robinson G.M, Keane A.J 1999 A case for multi-level optimisation in aeronautical design *Aeronautical Journal* **103** 481-485
- Keane A.J., Petruzzeli N. 2000 Aircraft wing design using GA-Based multi-level strategies *AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 8th, Long Beach, CA* Sept. 6-8, 2000.
- Engels H., Becker W., Morris A. 2004 Implementation of a multi-level optimisation methodology within the e-design of a blended wing body *Aerospace Science and technology* **8** 145-153
- Ladevèze P., Nouy A., Loiseau O. 2002 A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **191** 4680-4891
- Ladevèze P. 1999 Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation *Springer Verlag*
- Guidault P.A, Allix O., Champanay L., Cornuault C. Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local *Revue Européenne de Mécanique Numérique* **15** 187-198
- Sukumar N., Chopp D.L, Moës N. , Belytschko T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method *Comput. methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 6183-6200
- Osher S., Sethian J.A 1988 Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations *J. Comput. Phys.* **79** 12-49
- Boucard, P.A., Champaney, L. 2003 A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **57** 1259-1282