

## Une méthode de perturbation pour les problèmes de plasticité en grandes déformations

Mohamed Assidi, Hamid Zahrouni & Michel Potier-Ferry

LPMM-ISGMP

Université Paul Verlaine de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France

Email : [assidi@univ-metz.fr](mailto:assidi@univ-metz.fr)

### Résumé :

*Dans ce travail, on propose une nouvelle technique de régularisation pour résoudre des problèmes élastoplastiques dans le cadre de la MAN en grandes déformations. En effet, le comportement élastoplastique présente de fortes non linéarités et combine deux conditions unilatérales. Deux régularisations sont alors introduites; la première permet le passage du domaine élastique au domaine plastique et dépend du champ des contraintes. La deuxième, quant à elle, permet de prendre en compte la décharge élastique et dépend à la fois de la contrainte et de sa dérivée par rapport au temps. Une application sur des structures discrétisées par éléments finis est alors présentée pour évaluer l'efficacité de l'algorithme.*

### Abstract:

*In this work, we introduce new regularization technique to solve elastic plastic structures by ANM within finite strain framework. As, the elastic plastic behaviour exhibits strong non linearities and involves two unilateral conditions, we introduce two regularization functions; the first one permits the elastic plastic transition and depends upon the stress field. The second function allows us to take into account elastic unloading and depends on both the stress field and its time derivative. An application to structural plasticity problems using finite element method is presented to assess the ability of the proposed algorithm.*

### Mots-clefs :

### Technique de perturbation ; plasticité ; régularisation

#### 1 Introduction

La méthode asymptotique numérique (MAN) s'est révélée un outil très efficace pour résoudre des problèmes fortement non linéaires invoquant généralement des conditions unilatérales grâce à sa technique de régularisation [Aggoune06], [Cochelin07]. Elle combine la technique de perturbation et la méthode des éléments finis. Dans ce travail, on introduit une nouvelle technique de régularisation pour résoudre des problèmes de plasticité dans le cadre de la MAN en petites et grandes déformations. En effet, le comportement élastoplastique combine deux conditions unilatérales. La première concerne le passage du domaine élastique au domaine plastique et la seconde concerne la décharge élastique. Dans le cadre de la MAN, le problème non régulier est remplacé par un problème régulier afin de pouvoir appliquer la technique de perturbation qui consiste à développer toutes les variables du problème en séries entières. Deux

régularisations sont alors introduites permettant le passage élastique plastique et la décharge élastique. Pour avoir toute la branche solution, on utilise une technique de continuation. Les résultats sont évalués dans le cadre des éléments finis bidimensionnel en contraintes planes. Seuls les résultats en petites déformations sont présentés dans ce manuscrit.

## 2 Plasticité dans le cadre de la MAN

### 2.1 Cadre des petites déformations

On présente dans cette section la loi élastoplastique régularisée basée sur le modèle de Prandtl-Reuss. La formulation du problème est basé sur la décomposition additive du tenseur de déformation en une partie élastique et une plastique, la loi d'évolution  $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} n$  est déterminée à partir des conditions classiques de Kuhn-Tucker :  $\dot{\lambda} \geq 0, f_y \leq 0, \dot{\lambda} f_y = 0$ . On considère le critère de von Mises et un écrouissage isotrope en loi puissance (loi de Lüdwick) dans le cadre des petites perturbations. Ainsi, le modèle modifié s'écrit sous la forme suivante:

$$\dot{\sigma} = C^e : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} n \quad (2)$$

$$n = \frac{3}{2} \frac{\sigma^d}{q} \quad (3)$$

$$\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}_c GH \quad (4)$$

$$\eta_2^2 = H(H - \xi) \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_c \xi = n : \dot{\varepsilon} \quad (6)$$

$$f_y = \frac{q - \sigma_e}{\sigma_e} \quad (7)$$

$$G = \frac{\eta_1}{\frac{f_y^2 \sigma_e}{2\mu} + \eta_1 \left( \frac{3}{2} + \frac{\alpha h (\bar{\varepsilon}^p)^{\alpha-1}}{2\mu} (1 + f_y) \right)} \quad (8)$$

$$q^2 = \frac{3}{2} \sigma^d : \sigma^d + \eta_3^2 \sigma_y^2 \quad (9)$$

$$\sigma_e = \sigma_y + h (\bar{\varepsilon}^p)^\alpha \quad (10)$$

où  $\sigma, \sigma^d, \varepsilon$  et  $\varepsilon^p$  désignent le tenseur des contraintes de Cauchy, sa partie déviatorique, le tenseur des déformations totales et le tenseur des déformations plastiques.  $C^e$  est la matrice des constantes élastiques.  $\mu$  est le module de cisaillement.  $\alpha$  et  $h$  sont des paramètres dépendant du matériau.  $\dot{\lambda}, n, q, \sigma_e$  et  $f_y$  étant le multiplicateur plastique, la normale à la surface de charge, la contrainte équivalente, la contrainte effective et la fonction de charge.  $\bar{\varepsilon}^p$  et  $\sigma_y$  représentent la déformation plastique équivalente et la contrainte limite d'écoulement initiale. Les variables  $G, H$  et  $\xi$  sont des fonctions introduites pour le besoin de la régularisation qui seront traitées de

la même façon que les variables principales du problème.  $\dot{\epsilon}_c$  est une vitesse de déformation caractéristique introduite pour rendre les régularisations adimensionnelles.

## 2.1 Cadre des grandes transformations

Dans cette section on présente les équations de plasticité en grandes déformations. Les variables du problème sont exprimées dans le cadre de la formulation lagrangienne actualisée. Pour satisfaire l'objectivité des taux des contraintes, on introduit la dérivée de Jaumann (dérivée objective) qui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\dot{\tau} = \tau^J - \tau w + w \tau \quad (11)$$

où  $\tau$  est la contrainte de Kirchoff  $\tau^J$  s'écrit comme suit :

$$\tau^J = C^e : (D - D^p) \quad (12)$$

où  $D, D^p$  et  $w$  sont respectivement le taux de déformation totale, le taux de déformation plastique et le taux des rotations qui représente la partie antisymétrique du gradient de vitesse de déformation  $L$  qui s'écrit comme suit :

$$L = \frac{\partial v}{\partial X} \quad (13)$$

où  $v$  est la vitesse de déformation. Nous utilisons les relations de comportement (2-10) avec les mêmes fonctions de régularisation  $G$  et  $H$ . Dans le cadre des transformations finies, les variables  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\epsilon}^p$  et  $\sigma^d$  sont remplacées respectivement par les variables  $D, D^p$  et  $\tau^d$ . Où  $\tau^d$  représente le déviateur des contraintes de kirchoff. Ainsi, on a défini le modèle élastoplastique régularisé dans le cadre des transformations finies.

## 3 Technique de résolution

### 3.1 Formulation variationnelle

Dans ce travail, on se limite à des problèmes quasi statiques en transformation finie. Ainsi le problème variationnel s'écrit dans la configuration lagrangienne:

$$\int_{\Omega_0} (\tau, f^t) : \delta L d\Omega = C(t) P_{ext}(\delta v) \quad (14)$$

où  $f$  est l'inverse du tenseur de gradient de déformation et  $P_{ext}$  est le travail virtuel des forces extérieures.  $C(t)$  est une fonction de chargement dépendante d'un paramètre de développement "t".

### 3.2 Technique de perturbation

Afin d'appliquer la technique de perturbation, les relations du problème doivent être régulières et de préférence écrites sous forme quadratique. Ce qui revient à réécrire les équations (3) et (7) sous une forme quadratique, à introduire des variables additionnelles dans (8) et à remplacer (9) par une relation différentielle [Potier-Ferry97]. Ainsi les équations (3) et (7) sont réécrites sous

une forme quadratique :  $nq = \frac{3}{2} \sigma^d$  et  $f_y \sigma_e = q - \sigma_e$ .

En introduisant trois variables additionnelles dans l'équation (8), cette dernière est remplacée par les relations suivantes :

$$Den\ G = \eta_1$$

$$Den = \frac{F_y \sigma_e}{2\mu} + \eta_1 \left( \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2\mu} \beta (1 + f_y) \right)$$

$$F_y = f_y^2$$

$$\beta \bar{\epsilon}^p = \sigma_e - \sigma_y$$

Enfin, l'équation (10) est transformée en un système d'équations : une relation quadratique  $\sigma_e = \sigma_y + hZ$  et une équation différentielle:  $\bar{\epsilon}^p dZ = \alpha Z d\bar{\epsilon}^p$ . Ainsi, les équations du problème sont écrites dans un cadre favorable à l'application de la MAN. On applique donc la technique de perturbation qui consiste à développer toutes les variables du problème sous forme de séries entières tronquées à un ordre N choisi par l'utilisateur.

L'équation d'équilibre à l'ordre 'k' compris entre 1 et N s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega_0} (\tau_k f_0^t + \tau_0 f_k^t) : \delta L d\Omega = C_k P_{ext}(\delta v) \quad (15)$$

Les différentes équations (2-13) à l'ordre 'k' sont substituées dans l'équation (15) pour obtenir le problème linéaire qui est résolu par la méthode des éléments finis.

Pour avoir toute la branche solution, on utilise une technique de continuation qui consiste à déterminer le rayon de validité de toutes les variables en fonction d'un paramètre de contrôle  $\delta$  imposé par l'utilisateur et choisir le minimum comme longueur de pas asymptotique. La fin de chaque pas est utilisée comme point de départ pour le pas suivant.

#### 4 Application numérique

On propose dans cette section une application de la MAN pour la résolution d'un problème élastoplastique dans le cadre de petites perturbations. L'application concerne un test de flexion d'une structure poutre dont les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites sont présentées sur la figure (1).

Pendant le processus de chargement, la distribution des contraintes n'est pas homogène. En effet, la transition du domaine élastique au domaine plastique et la décharge élastique n'apparaissent pas en même temps pour tous les points de Gauss. Les résultats sont évalués dans le cadre bidimensionnel en contraintes planes avec des éléments finis quadrangulaires à quatre nœuds.

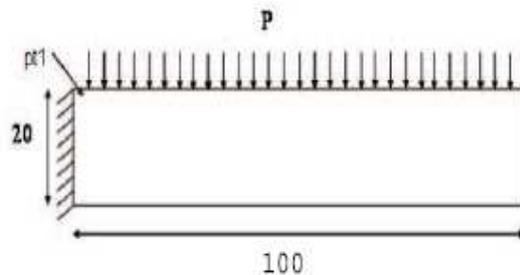


FIG. 1 Test de flexion : caractéristiques géométriques et conditions aux limites.

Les caractéristiques du matériau sont :  $E = 200000MPa$ ,  $\nu = 0.3$ . On considère deux cas d'érouissage ; le premier avec les paramètres ( $h = 2000MPa$ ,  $\alpha = 1$ ) qui correspond à un érouissage linéaire et le deuxième cas avec ( $h = 757MPa$ ,  $\alpha = 0.51$ ) pour la loi puissance. Les résultats sont obtenus avec un ordre de troncature  $N = 15$  et un paramètre de contrôle  $\delta = 10^{-5}$ . Les paramètres de régularisation sont : ( $\eta_1 = 10^{-4}$ ,  $\eta_2 = 0.1$ ,  $\eta_3 = 5.10^{-2}$ ).

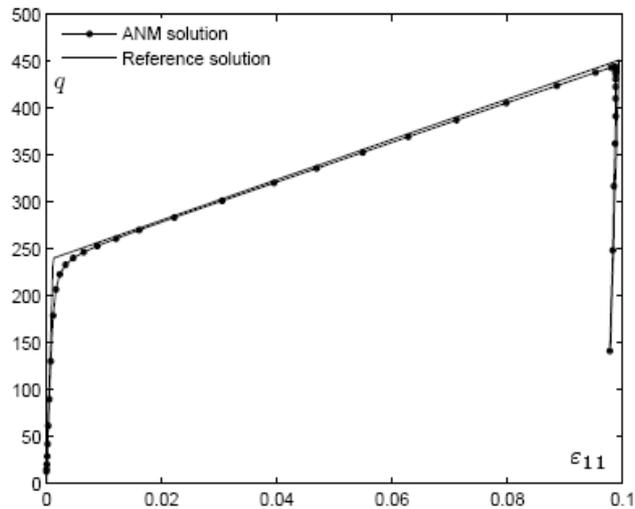


FIG. 2 – Courbe de réponse du point Pt1; contrainte équivalente déformation totale dans le cas d'un érouissage linéaire. Les points représentent les fins des pas asymptotiques.

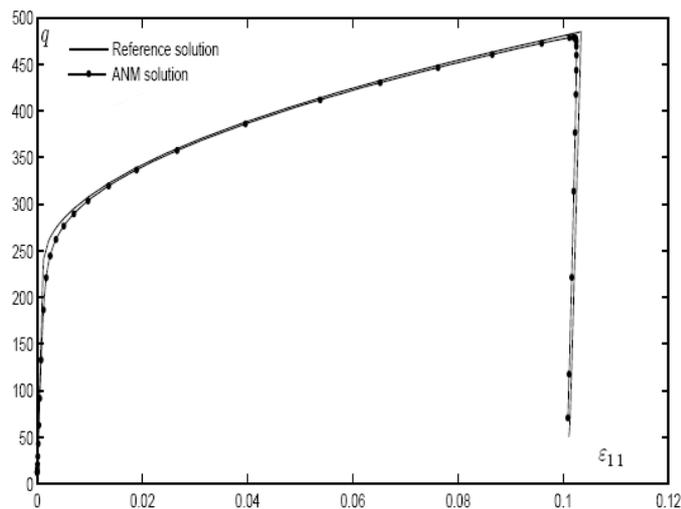


FIG. 3 – Courbe de réponse du point Pt1; contrainte équivalente déformation totale dans le cas d'un érouissage loi puissance. Les points représentent les fins des pas asymptotiques.

Les courbes de réponse sont comparées avec celles obtenues à l'aide du code industriel Abaqus qui utilise la méthode de Newton-Raphson pour son algorithme itératif au niveau de l'équilibre globale et la technique du retour radial pour les équations de plasticité au niveau de chaque point d'intégration [Belytschko], [Chen]. Les résultats sont en bon accord et le nombre de pas reste raisonnable par rapport aux algorithmes classiques. Plusieurs tests ont été réalisés avec succès en utilisant différentes valeurs du paramètre de contrôle  $\delta$  et pour différentes valeurs des paramètres de régularisation ce qui confirme la robustesse et l'efficacité de notre algorithme dans le traitement des problèmes de plasticité.

Les solutions sont obtenues en utilisant seulement des séries entières. L'utilisation des approximants de Padé apportera une amélioration appréciable en réduisant le nombre de pas.

## 5 Conclusion

On a présenté dans ce travail une approche par méthode de perturbation pour résoudre des problèmes de plasticité. Cette technique consiste à introduire une nouvelle technique de régularisation qui permet à la fois le passage élastoplastique et la prise en compte de la décharge élastique. Contrairement aux méthodes classiques qui nécessitent des itérations au niveau local pour satisfaire la loi de comportement et au niveau global pour satisfaire l'équilibre, la MAN n'a besoin d'aucune correction.

L'extension de la MAN pour des problèmes dans le cadre des transformations finies, ne pose aucun souci ni au niveau du comportement ni au niveau de la cinématique. Les résultats des grandes déformations seront présentés prochainement.

## Référence :

- W. Aggoune, H. Zahrouni & M. Potier-Ferry, *Asymptotic numerical method for unilateral contact*, International Journal for Numerical Method in Engineering, pp 605-631, 2006.
- B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry, *Méthode Asymptotique Numérique, une technique de résolution des équations non linéaires*, Hermes Science Publishing, 2007
- M. Potier-Ferry et al. *Traitement des fortes non linéarités par la méthode asymptotique numérique*. Comptes Rendus de l'Académie des sciences Séries IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, pp 171-177, 1997.
- T. Belytschko, K. L. Wing & B. Moran. *Non linear finite elements for continua and structures*, John Willey & sons, New York, Wiley, 2000.
- W.F. Chen & D.J. Han, *Plasticity for structural engineers*, New York: Springer-Verlag, 1988.