

Etude théorique et numérique des singularités pour les coques elliptiques

Fabien Béchet¹, Olivier Millet² & Evariste Sanchez-Palencia³

¹ Université des Sciences et Technologies de Lille 1, Laboratoire de Mécanique de Lille, Boulevard Paul Langevin, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cédex, fabien.bechet@ed.univ-lille1.fr

² Université de La Rochelle, Laboratoire d'Etude des Phénomènes de Transfert Appliqués aux Bâtiments

³ Université de Paris VI, Laboratoire de Modélisation en Mécanique

Résumé :

Dans cette communication, nous présentons des résultats théoriques et numériques pour des problèmes de coques elliptiques dans deux cas distincts. Le cas où la coque est bien inhibée (encastrée sur tout son bord) donne des résultats classiques (couches limites) et moins connus (singularités logarithmiques); tandis que si une partie du bord est libre (coque mal inhibée), il apparaît un phénomène de complexification quand l'épaisseur relative de la coque tend vers 0. Des calculs par éléments finis utilisant un maillage adaptatif anisotrope nous permettent d'obtenir des résultats précis au niveau des singularités des déplacements avec un nombre réduit d'éléments.

Abstract :

In this communication, we present theoretical and numerical results for two kinds of elliptic shell problems. When the shell is well-inhibited (clamped all along its boundary), we have classical internal layers but also logarithmic point singularities; whereas when the shell is ill-inhibited (a part of the boundary is free), a complexification phenomenon arises when the relative thickness tends towards zero. Numerical computations with finite element program using an anisotropic adaptative mesh procedure enables us to get a good description of the displacement singularities with only a small number of elements.

Mots-clefs :

Théorie des coques, problèmes sensitifs, maillage anisotrope

1 Introduction

Dans cette communication, nous abordons différents problèmes concernant les coques elliptiques. Nous utilisons le modèle de Koiter (pour un matériau élastique linéaire isotrope) qui dépend en particulier de l'épaisseur ε de la coque. La coque étant inhibée si au moins une partie du bord latéral est encastré, nous avons alors un problème de perturbations singulières dont le problème limite (quand $\varepsilon \searrow 0$) est le problème de membrane. Si une partie du bord est libre, la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite pour le problème limite sur cette partie du bord. Le problème limite est alors mal posé et il apparaît un phénomène de complexification quand $\varepsilon \searrow 0$.

La section 2 rappellera brièvement le modèle de Koiter ainsi que la condition de Shapiro-Lopatinskii. Dans la section 3, nous présenterons une réduction du problème membranaire à une équation différentielle en u_3 bien adaptée à l'étude des singularités du déplacement normal u_3 . Les sections 4 et 5 présenteront des résultats numériques dans les cas bien et mal inhibés. Ces calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel MODULEF (élément DKTC) couplé avec le maillage adaptatif anisotrope BAMG (adaptation par "metric control", voir Castro-Diaz *et al.* (1997)). Ceci permet en particulier de raffiner le maillage de façon anisotrope à l'intérieur des couches limites (voir De Souza *et al.* (2003), Béchet *et al.* (2007)).

2 Considérations théoriques

2.1 Rappels sur le modèle de Koiter

Soit une surface S définie par le domaine Ω de \mathbb{R}^2 et la carte $\Psi(y^1, y^2)$. Considérons une coque dont la surface moyenne est S et l'épaisseur constante égale à ε . La coque est supposée linéairement élastique et isotrope. Elle est soumise à un chargement \tilde{f} . La formulation variationnelle du problème de Koiter s'écrit alors (Bernadou (1994), Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia (1997)) :

$$\text{Trouver } u \in V, \quad \text{tq } a_m(u, v) + \varepsilon^2 a_f(u, v) = b(v) \quad \forall v \in V \quad (1)$$

avec $V = \{v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) ; v \text{ satisfaisant aux C.L. cinématiques } \}$

et où $a_m(u, v) = \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(u) \gamma_{\alpha\beta}(v) dS$, $a_f(u, v) = \frac{1}{12} \int_S A^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}(u) \rho_{\alpha\beta}(v) dS$

représentent les formes bilinéaires d'énergie de membrane et d'énergie de flexion et où on a posé $b(v) = \int_S \tilde{f}^i v_i dS$ avec $\tilde{f} = \varepsilon f$. Les expressions des coefficients de la loi de comportement élastique linéaire isotrope $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$, des déformations membranaires $\gamma_{\alpha\beta}$, et du tenseur de variation de courbure $\rho_{\alpha\beta}$ peuvent être trouvées par exemple dans Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia (1997). Notre but est d'étudier le processus asymptotique du problème de Koiter lorsque l'épaisseur relative tend vers zéro pour différentes conditions aux limites.

Le problème limite (pour $\varepsilon = 0$) dépend directement de l'espace des déplacements inextensionnels $G = \{v \in V ; a_m(v, v) = 0\}$. Si $G = \{0\}$, le problème (1) est un problème de perturbations singulières et le problème limite est "le problème de membrane" qui s'écrit : $a_m(u, v) = b(v)$. La nature de ce problème dépend alors de la nature de la surface moyenne. Il est elliptique dans le cas d'une coque elliptique. Mais le problème limite n'est bien posé que s'il respecte la condition de Shapiro-Lopatinskii qui est explicitée dans la section suivante.

2.2 La condition de Shapiro-Lopatinskii

La condition de Shapiro-Lopatinskii, pour un système donné et les conditions aux limites associées, représente en quelque sorte le fait que le système soit en harmonie ou non avec ses conditions aux limites. Pour vérifier si cette condition est satisfaite, il faut considérer localement près du bord étudié, le problème homogène dans un demi-plan avec les conditions aux limites homogènes associées. On cherche alors des solutions sinusoïdales le long du bord et décroissantes exponentiellement dans la direction perpendiculaire au bord vers l'intérieur du domaine. S'il existe de telles solutions non nulles, la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite. Cela conduit à une sorte de non-unicité de la solution. Lorsque l'on considère le problème général dans un domaine Ω , ces solutions apparaissent comme locales au voisinage du bord en question. En cherchant des solutions de ce type, on peut démontrer que :

- la condition de Shapiro-Lopatinskii est satisfaite au niveau d'un bord fixé ou encasté
- la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est pas satisfaite au niveau d'un bord libre.

3 Le problème membranaire à l'intérieur de Ω

Dans le cas d'un problème membranaire modèle simplifié où les 2 formes fondamentales de S sont supposées constantes sur Ω , on peut montrer que, dans la base principale des courbures b_α^β , on a (voir Béchet *et al.* (2007)) :

$$E [b_{22} \partial_1^2 + b_{11} \partial_2^2]^{(2)} u_3 = a^2 [a^{11} \partial_1^2 + a^{22} \partial_2^2]^{(2)} f^3 \quad (2)$$

où a est le déterminant de la première forme fondamentale $a_{\alpha\beta}$ la surface S .

Les opérateurs au premier et au second membre étant tous les deux elliptiques du quatrième ordre, on peut montrer que u_3 a les mêmes singularités que f^3 dans le cas où f^3 est singulier le long d'une courbe.

Cependant, il peut y avoir d'autres types de singularités. Les deux membres de l'équation (2) étant elliptiques, on peut montrer (voir Egorov et Schultze (1997)) que pour un exposant caractéristique spécifique λ_k , des singularités du type $r^{\lambda_k} [\varphi_k(\theta) + \log(r) \psi_k(\theta)]$, voire des puissances plus élevées en $\log(r)$, peuvent apparaître (en considérant localement un paramétrage en coordonnées polaires (r, θ)). Les λ_k sont les valeurs propres d'un certain opérateur, et, en général, ne peuvent être obtenues que numériquement (voir Leguillon & Sanchez (1987)). Cependant, dans certains cas impliquant le laplacien ou des opérateurs analogues, un développement en série de Fourier par rapport à θ permet d'obtenir une description complète de la structure de la solution. Par chance, l'équation (2) peut se ramener à ce type d'équation par un changement de variable. On montre alors qu'une singularité de type $\log(r) \psi_k(\theta)$ peut exister en un point P à condition que la frontière de la zone de chargement possède un coin et que les 2 opérateurs elliptiques de (2) ne soient pas proportionnels en P .

4 Calculs pour une coque bien inhibée

4.1 Présentation du problème

Nous considérons ici une coque elliptique dont la surface moyenne est un paraboléoïde elliptique définie par :

$$\psi(y^1, y^2) = (y^1, y^2, (y^1)^2 + (y^2)^2), \quad (y^1, y^2) \in \Omega \quad (\text{voir Fig.1}) \quad (3)$$

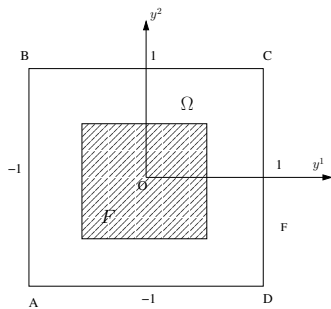


FIG. 1 – Domaine Ω

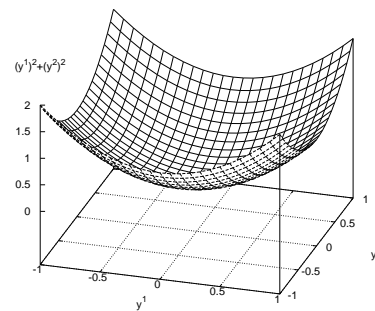


FIG. 2 – Surface moyenne S

On considère alors un chargement normal $f = f^3 e_3$. La coque est encastrée sur tout son bord, et est donc bien-inhibée. Les symétries de chargement et de géométrie nous permettent de ne modéliser qu'un quart du problème. Les figures 3 et 4 montrent le maillage final à l'issue de l'adaptation et les résultats obtenus avec ce maillage pour le déplacement normal u_3 .

Le maillage final est raffiné d'une manière anisotrope le long de la frontière du domaine de chargement F et de manière isotrope au niveau du coin de F . Ceci reflète bien les 2 types de singularités visibles sur la figure 4 : la singularité de type Heavyside perpendiculairement à la frontière de chargement et la singularité logarithmique présente tout autour du coin.

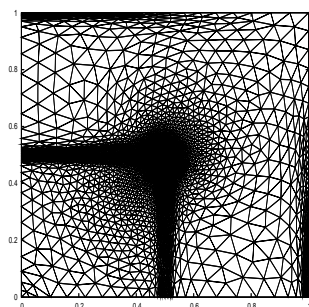
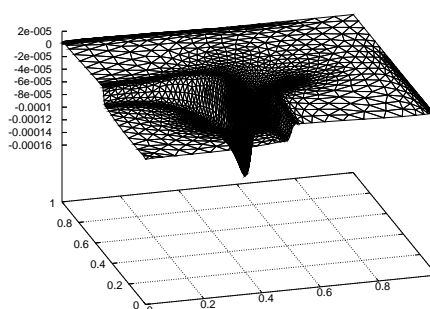
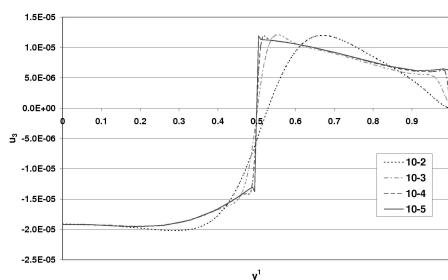
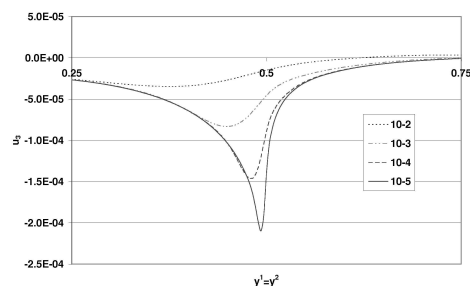


FIG. 3 – Maillage final

FIG. 4 – u_3 pour $\varepsilon = 10^{-4}$

4.2 Evolution du problème avec ε

A mesure que ε diminue, les solutions se rapprochent de celles du problème limite. Le déplacement u_3 tend vers une singularité de type Heavyside en $y^1 = 0,5$ (Fig. 5), et en $(0,5; 0,5)$ il se rapproche d'une fonction logarithmique (Fig. 6).

FIG. 5 – Evolution de u_3 pour $y^2 = 0$ FIG. 6 – Evolution de u_3 sur la ligne $y^2 = y^1$

5 Etude d'un problème mal-inhibé

5.1 Présentation du problème

Nous considérons ici exactement le même problème qu'à la section 4 sauf pour les conditions aux limites. Le bord CD est maintenant libre tandis que le reste du bord de la coque est encastré. D'après la section 2.2, la condition de Shapiro-Lopatinskii n'est plus satisfaite sur le bord CD . Le problème limite est alors mal posé. La figure 7 montre le déplacement u_3 pour $\varepsilon = 10^{-4}$.

Au niveau du bord, les déplacements sont très différents par rapport au cas bien inhibé (voir Fig.4). Il apparaît des déplacements normaux sinusoïdaux le long du bord et décroissants exponentiellement dans la direction perpendiculaire au bord vers l'intérieur du domaine (Figs. 8 et 9). Ce type de déplacements correspond à une condition de Shapiro-Lopatinskii non satisfaite sur le bord libre (voir section 2.2).

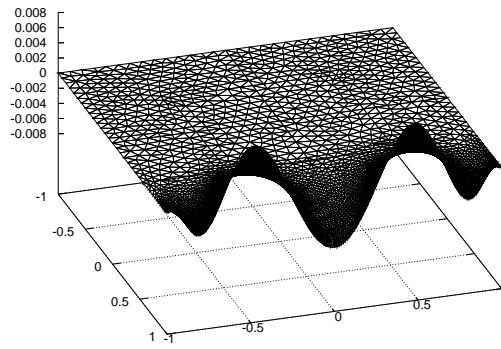


FIG. 7 – u_3 dans Ω pour $\varepsilon = 10^{-4}$

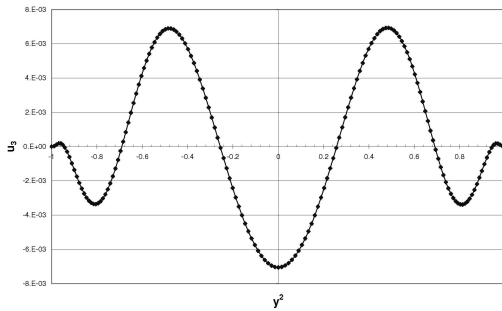


FIG. 8 – u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

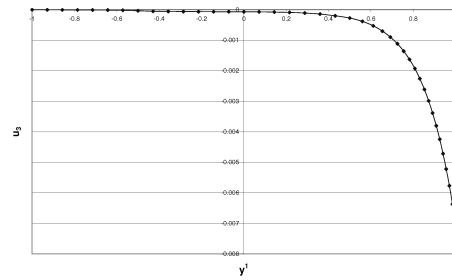


FIG. 9 – u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$

5.2 Evolution du problème avec ε

Alors que pour $\varepsilon > 0$ le problème est bien posé, il apparaît à mesure que $\varepsilon \searrow 0$ des solutions sinusoïdales le long du bord et décroissantes exponentiellement dans la direction perpendiculaire au bord vers l'intérieur du domaine. On peut montrer sur des problèmes modèles (Meunier & Sanchez (2006) par exemple) que la fréquence des oscillations est proportionnelle à $\log \frac{1}{\varepsilon}$. Nous vérifions sur les simulations numériques effectuée que cette fréquence augmente quand ε diminue (Figs. 8, 10 et 11) et qu'elle est bien proportionnelle à $\log \frac{1}{\varepsilon}$ (Fig. 12).

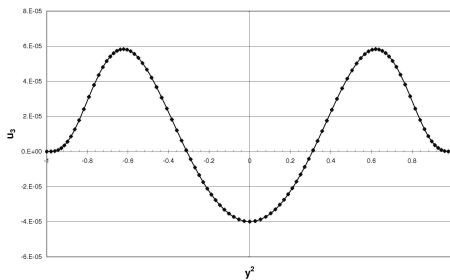


FIG. 10 – u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-2}$

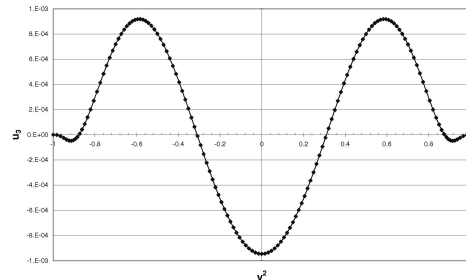
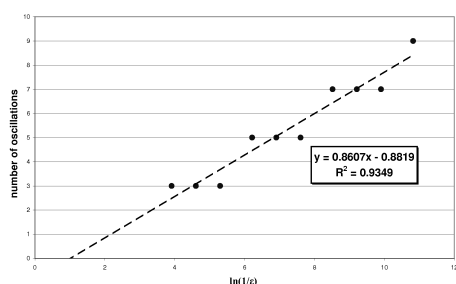
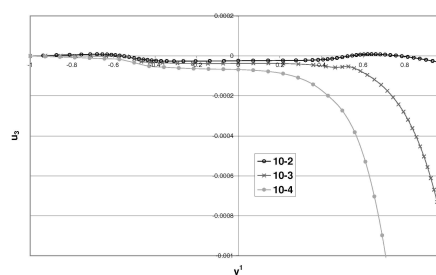


FIG. 11 – u_3 sur la ligne $y^1 = 1$ pour $\varepsilon = 10^{-3}$

Parallèlement, on voit que l'amplitude des déplacements près du bord libre augmente quand ε diminue. Les singularités dues au chargement deviennent de moins en moins visibles en comparaison, surtout pour $y^1 = 0, 5$ (Fig. 13).

FIG. 12 – Nombre d’oscillations vs. $\log(\varepsilon^{-1})$ FIG. 13 – u_3 sur la ligne $y^2 = 0$ pour différents ε

6 Conclusion

Dans cette communication, nous avons montré l’importance des conditions aux limites pour les problèmes de coques elliptiques. Quand la coque est bien inhibée (encastrée sur tout son bord), nous retrouvons des résultats classiques : les singularités du déplacement normal u_3 sont les mêmes que celles du chargement f^3 . Nous montrons également l’existence d’une singularité logarithmique moins classique si le domaine de chargement possède un coin. Si une partie du bord de la coque est libre, nous avons un problème "sensitif" : on observe des oscillations sur le bord libre et une décroissance exponentielle du déplacement u_3 vers l’intérieur du domaine. De plus, quand ε tend vers zero, la fréquence des oscillations augmente ainsi que leur amplitude : on a un phénomène de complexification. Cette instabilité qui apparaît sur le bord envahit peu à peu le reste de la coque. Des simulations numériques par éléments finis, utilisant un maillage adaptatif anisotrope nous ont permis d’approcher précisément ces singularités avec un nombre réduit d’éléments.

Références

- Béchet F., Sanchez-Palencia E., Millet O. 2007 Computing singular perturbations for elliptic clamped shells. *Submitted to Computational Mechanics*
- Bernadou M. 1994 Méthodes d’éléments Finis pour les Problèmes de Coques Minces, *Masson*
- Castro-Diaz M. J., Hecht F., Mohammadi B. and Pironneau O. 1997 Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *IJNMF*, **25** 475-491
- De Souza C.A., Leguillon D., Sanchez-Palencia É. 2003 Adaptive mesh computation for a shell-like problem with singular layers. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* **1**, n.4
- Egorov V.E., Schultze B.W. 1997 Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications, *Birkhäuser*
- Leguillon D., Sanchez-Palencia É. 1987 Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity, *John Wiley & Sons*
- Meunier N., Sanchez-Palencia E. 2006 Sensitive versus classical singular perturbation via Fourier transform., *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **16** 1783-1816
- Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É. 1997 Coques élastiques minces - Propriétés asymptotiques, *Masson, Paris*