

## Estimation d'erreur pour le calcul de facteurs d'intensité de contraintes

Josselin Delmas<sup>1,2,3</sup>, Patrice Coorevits<sup>3</sup>, Pierre-Bernard Badel<sup>1,2</sup> & Mohamed Guessasma<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LaMSID, UMR EDF/CNRS 2832, 1 avenue du Général de Gaulle, 92140 Clamart.

<sup>2</sup>EDF R&D, Département AMA, 1 avenue du Général de Gaulle, 92140 Clamart.

<sup>3</sup>LTI, EA 3899, Université de Picardie Jules Verne, 48 rue d'Ostende, 02100 Saint-Quentin.  
josselin.delmas@edf.fr

### Résumé :

*Des estimateurs d'erreurs locaux dits en quantités d'intérêt permettent d'obtenir directement l'erreur de discrétisation commise sur une quantité ayant un sens physique, dans une zone définie. On construit un tel estimateur à partir de l'erreur sur la solution du problème primal, celle du problème dual et un estimateur d'erreur basé sur les résidus explicites. Une quantité d'intérêt est développée pour permettre d'estimer l'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes en modes mixtes. Une démarche originale est utilisée, basée sur l'extrapolation des sauts des déplacements entre les lèvres de la fissure. Des exemples numériques traités par Code\_Aster permettent de valider cet estimateur.*

### Abstract :

*Local error estimators known as in quantities of interest enable to obtain directly the error of discretization committed on a quantity with a physical meaning, in a definite zone. Such an estimator is build starting from of the error on the solution of the primal problem, the one of the dual problem and an error estimator based on the explicit residual. A quantity of interest is developed with the aim to estimate the error for mixed-mode stress intensity factors. An original step is used, based on the extrapolation of the jumps of displacements between the lips of the crack. Some numerical examples performed by Code\_Aster allow to validate this estimator.*

### Mots-clefs :

**Erreur en quantité d'intérêt ; estimateurs explicites ; facteurs d'intensité de contraintes.**

## 1 Introduction

La modélisation de phénomènes physiques aboutit à des équations aux dérivées partielles en espace et en temps, représentant le modèle mathématique du problème à résoudre. De manière générale, une solution analytique de ces équations n'existe pas. Des méthodes d'approximation, comme la méthode des éléments finis, sont alors utilisées. Mais l'inconvénient de ce genre de méthode numérique est d'induire des erreurs de discrétisation.

Pour estimer ces erreurs, différentes démarches ont été proposées par Ladevèze (1975), Babuska *et al.* (1978), Zienkiewicz *et al.* (1987) pour les problèmes linéaires. Elles conduisent toutes à l'estimation d'une erreur globale (norme  $L^2$ ,  $H^1$  ou semi- $H^1$  ou encore norme en énergie du déplacement). Mais le choix d'une précision globale fondée sur une norme du déplacement est souvent délicat car il n'y a pas de lien direct quantitatif avec une erreur sur des quantités mécaniques locales (contraintes sur une ligne ou sur une surface, maximum des contraintes, etc.). Pour y remédier, des estimateurs d'erreurs locaux dits en quantités d'intérêt ont été développés ces dernières années. Basés sur les travaux de Becker *et al.* (2001), ils permettent d'accéder directement à l'erreur commise sur une quantité mécanique précise.

Dans cet article, un estimateur en quantité d'intérêt, basé sur une technique de résidus explicites, est décrit. Une quantité d'intérêt de la mécanique de la rupture est développée pour

permettre l'estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes en modes mixtes. Une démarche originale est utilisée, basée sur l'extrapolation des sauts des déplacements entre les lèvres de la fissure. Des tests numériques permettant de valider cet estimateur sont présentés ; ils ont été réalisés avec *Code\_Aster*, le code de calcul par éléments finis développé à la Direction de Recherche et Développement de EDF.

## 2 Problème modèle

On considère un solide qui occupe un domaine  $\Omega \in \mathfrak{R}^3$  de frontière régulière  $\partial\Omega$  de normale sortante  $\mathbf{n}$ . Le contour est l'union de deux parties disjointes  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_F$ . Sur le contour  $\Gamma_U$  on impose un déplacement  $u_d$  et sur le contour  $\Gamma_F$ , une densité d'effort surfacique  $F$ . Le solide est élastique linéaire et isotrope, sa loi de comportement est donnée par  $\sigma = C\varepsilon$ , où  $C$  est le tenseur de Hooke et  $\varepsilon$  la partie symétrique du gradient de  $u$ .

Soient  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire et  $l(\cdot)$  une forme linéaire. La formulation variationnelle de ce problème d'élasticité est donnée par :

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad [1]$$

La norme en énergie et la norme  $L^2$  associée à l'espace  $V$  sont respectivement définies de la manière suivante :

$$\|v\|_e^2 = \int_{\Omega} \sigma(v) : \varepsilon(v) dv \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v \cdot v dv \quad [2]$$

Soit  $\Omega_h$  une partition de  $\Omega$  en  $N$  éléments. On construit un espace éléments finis  $V^h \subset V$  à partir de fonctions continues, polynomiales par morceaux, et de degré  $p$  sur chaque élément  $E$ . Le problème discrétisé s'écrit de la manière suivante :

$$a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in V^h \quad [3]$$

## 3 Estimateurs d'erreur basés sur les résidus d'équilibre

Dans la méthode des éléments finis, l'approximation principale porte sur les équations d'équilibre. Ces défauts d'équilibre sont représentés par les résidus qui mesurent la non vérification de certaines propriétés des équations du problème. Le résidu global, noté  $R_h^u(v) = l(v) - a(u^h, v)$ , est constitué du résidu intérieur (noté  $r_E$ , il mesure la non vérification des équations d'équilibre intérieur) et du résidu de bord (noté  $t_{\Gamma}$ , il représente la non vérification de l'équilibre de bord). Enfin on montre qu'une estimation de l'erreur, définie par  $e = u - u^h$  où  $e \in V$ , dans la norme en énergie s'écrit :

$$\|e\|_e^2 \leq C \left( \sum_E h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_E \left( \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_F} l_{\Gamma} \|t_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{\Gamma \in \Gamma_F} l_{\Gamma} \|t_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \right) \quad [4]$$

où  $C$  est une constante qui dépend du type d'élément et des données du problème,  $E$  est l'élément courant et  $h_E$  et  $l_{\Gamma}$  sont des longueurs caractéristiques de l'élément.

## 4 Erreur en quantité d'intérêt

Au lieu d'évaluer une mesure de l'erreur telle que la norme en énergie par exemple, il est plus utile d'estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt ayant un sens physique. Cette quantité

d'intérêt peut être représentée par une fonctionnelle linéaire  $Q(\cdot)$  définie sur l'espace des fonctions tests. Deux exemples sont présentés : ils représentent la moyenne d'une composante du déplacement et la moyenne d'une composante des contraintes sur un sous-domaine (zone d'intérêt) :

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} v_x d\Omega \qquad Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{xx} d\Omega \qquad [5]$$

Le but de l'estimation en quantité d'intérêt est de s'assurer de la qualité de  $Q(u^h)$  en estimant la quantité  $Q(e) = Q(u - u^h)$ .

On définit le problème dual comme le problème d'élasticité linéaire dont la solution  $\omega$  est appelée fonction d'influence et dont  $Q(\cdot)$  est le chargement. Le problème primal et le problème dual peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} a(u, v) = l(v) \\ a(v, \omega) = Q(v) \end{cases} \quad \forall v \in V \qquad [6]$$

On définit l'erreur primale telle que  $e = u - u_h$  et l'erreur duale telle que  $\varepsilon = \omega - \omega_h$ . Prudhomme *et al.* (1999) ont montré que l'on peut trouver une relation entre l'erreur primale, l'erreur duale et le résidu du problème primal. Ceci fournit une expression pour l'erreur en quantité d'intérêt :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) \qquad [7]$$

Pour estimer cette quantité, il est nécessaire de l'exprimer en termes de normes en énergie. En effet grâce à n'importe quel estimateur classique, on dispose d'une estimation de la norme en énergie de l'erreur. Ainsi la relation du parallélogramme fournit une relation entre l'erreur en quantité d'intérêt et la norme en énergie d'une combinaison entre l'erreur primale et l'erreur duale :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) = \frac{1}{4} \|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4} \|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \qquad [8]$$

où  $s$  est un scalaire choisi tel que  $s = \sqrt{\frac{\|\varepsilon\|_e}{\|e\|_e}}$

Un estimateur basé sur la relation précédente et sur un estimateur en résidus explicite a été développé et implémenté dans *Code\_Aster*, permettant ainsi d'accéder à une estimation de l'erreur en quantité d'intérêt.

## 5 Application à l'estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes

Dans la zone singulière, le champ de contrainte présente une singularité en  $r^{-1/2}$  à la pointe de la fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par des paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes, notés  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  correspondants à chacun des modes de sollicitation de la fissure. En déformations planes ou en contraintes planes, Irwin (1957) a montré que les déplacements et les contraintes dans la zone singulière peuvent s'exprimer en fonction des facteurs d'intensité de contraintes.

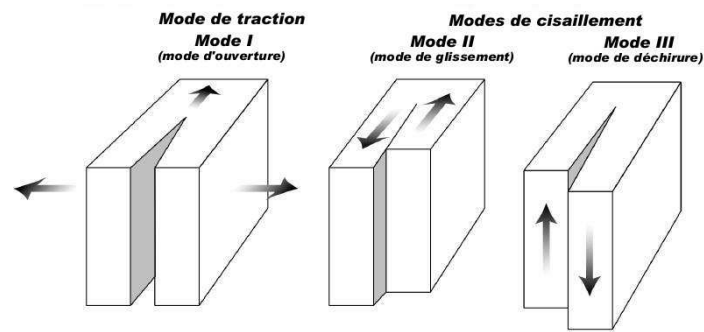


FIG. 1 – Les différents modes de sollicitations d'une fissure.

On considère une structure 2D fissurée, libre d'effort volumique. Les lèvres  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  de la fissure sont libres d'effort surfacique et sur le bord de la structure, des conditions de Dirichlet ou de Neumann sont imposées. Les facteurs d'intensité de contraintes, correspondant à chaque mode, sont donnés par les relations suivantes :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1] \right) ; K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2] \right) ; K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3] \right) \quad [9]$$

En contraintes planes  $C_1 = 1$  et en déformations planes  $C_1 = (1-\nu^2)$ .  $[u_1]$  est le saut de déplacement normal au plan de fissure,  $[u_2]$  le saut de déplacement normal au fond de fissure et  $[u_3]$  le saut de déplacement tangent au fond de fissure.

Une méthode de calcul des facteurs d'intensité de contrainte consiste à une extrapolation du saut des déplacements entre les lèvres de la fissure par une méthode des moindres carrés ; ce qui s'exprime de la manière suivante :

$$K \text{ minimise } J(k) = \frac{1}{2} \int_0^{r_m} \left( C_2 [U(r)] - k\sqrt{r} \right)^2 dr \text{ avec } C_2 = \frac{E\sqrt{2\pi}}{8C_1} \quad [10]$$

Où  $[U(r)] = (U_{sup} - U_{inf})$  est le saut des déplacements entre la lèvre supérieure  $\Gamma^+$  et inférieure  $\Gamma^-$ ,  $r_m$  est le rayon maximum à la pointe de fissure sur lequel on considère les sauts de déplacements. La formule explicite pour calculer  $K$  est la suivante :

$$K = \frac{2}{r_m^2} \int_{\Gamma} C_2 (U_{sup} - U_{inf}) \sqrt{r} dr \quad [11]$$

On en déduit facilement la quantité d'intérêt « facteurs d'intensité de contraintes » :

$$Q(\nu) = K_i(\nu) = \frac{2}{r_m^2} C_2 \left( \int_{\Gamma^+} \sqrt{r} x_i \nu d\Gamma - \int_{\Gamma^-} \sqrt{r} x_i \nu d\Gamma \right) \quad [12]$$

Avec  $i = I, II, III$  ;  $x_i$  le vecteur normal au plan de fissure,  $x_{II}$  le vecteur normal au fond de fissure et  $x_{III}$  le vecteur tangent au fond de fissure. Ainsi le chargement à imposer au problème dual est un effort surfacique unidirectionnel selon une des trois directions du repère orthonormé décrivant la fissure.

## 6 Applications numériques et validations

Pour valider l'estimateur, trois exemples sont présentés. Le premier problème est une plaque fissurée soumise à un effort de traction uniforme (solicitation en mode I). Le deuxième problème est une poutre cantilever soumise à un effort de cisaillement (solicitation en mode I et en mode II). Enfin le troisième problème est une plaque avec une fissure inclinée, soumise à un effort de traction (solicitation en mode I et en mode II). Les paramètres géométriques sont  $L=10$  et  $\theta=45^\circ$  ; le module d'Young est  $E=200000$  Mpa et le coefficient de Poisson est  $\nu=0.3$ . Les résultats numériques ont été obtenus sur des maillages, comportant des éléments triangulaires à six nœuds, issus des maillages des figures 2c et 2e par raffinement uniforme.

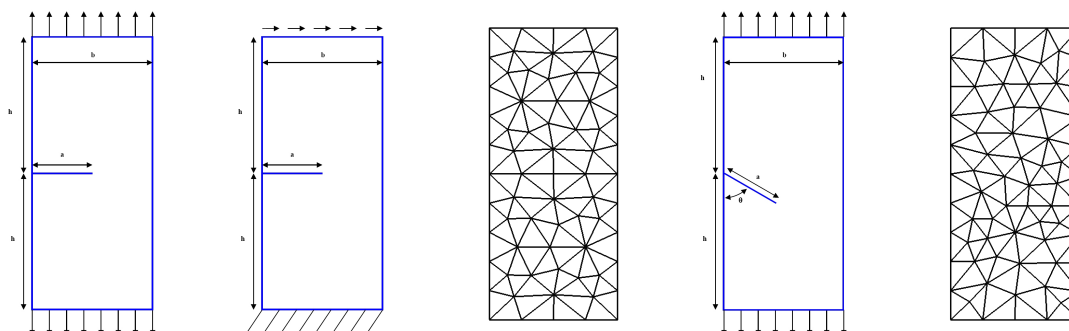


FIG. 2a, 2b, 2c, 2d et 2e – Problème 1, 2 et 3 et les maillages grossiers correspondants.

Pour chacun des facteurs d'intensité de contraintes, la solution de référence a été obtenue sur un maillage raffiné comportant plus de 100 000 éléments. Des « pseudo » bornes sont présentées dans les tableaux suivants : elles sont calculées comme la somme ou la différence des facteurs d'intensité de contrainte et de la valeur absolue de l'erreur en quantité d'intérêt.

Nombre de ddl	498	1858	7170	28162
$K_I^h$	8,874	8,931	9,198	9,383
$Q(e)$	7,074 E-01	3,349 E-01	2,113 E-01	8,461 E-02
$K_I^{sup}$	9,581	9,266	9,409	9,467
$K_I^{inf}$	8,166	8,596	8,987	9,298

TAB. 1 – Problème 1 : Facteur d'intensité de contrainte ( $K_I^{ref} = 9,529$ ).

Nombre de ddl	498	1858	7170	28162
$K_I^h$	38,976	36,401	36,183	36,214
$Q(e)$	2,803 E+00	1,265 E+00	7,862 E-01	3,117 E-01
$K_I^{sup}$	41,780	37,667	36,969	36,526
$K_I^{inf}$	36,172	35,135	35,397	35,902

TAB. 2 – Problème 2 : Facteur d'intensité de contrainte en mode I ( $K_I^{ref} = 36,072$ ).

Nombre de ddl	498	1858	7170	28162
$K_{II}^h$	2,558	3,357	3,757	4,011
$Q(e)$	2,431 E-01	1,526 E-01	1,039 E-01	4,712 E-02
$K_{II}^{sup}$	2,801	3,509	3,861	4,058
$K_{II}^{inf}$	2,315	3,204	3,653	3,964

TAB. 3 – Problème 2 : Facteur d'intensité de contrainte en mode II ( $K_{II}^{ref} = 4,247$ ).

Nombre de ddl	514	1922	7426	29186
$K_I^h$	6,740	6,474	6,492	6,498
$Q(e)$	1,930 E-01	1,916 E-01	4,487 E-02	2,872 E-02
$K_I^{sup}$	6,933	6,665	6,537	6,527
$K_I^{inf}$	6,547	6,282	6,447	6,469

TAB. 4 – Problème 3 : Facteur d'intensité de contrainte en mode I ( $K_I^{ref} = 6,518$ ).

Nombre de ddl	514	1922	7426	29186
$K_{II}^h$	1,170	1,486	1,630	1,706
$Q(e)$	6,853 E-02	6,087 E-02	1,124 E-02	6,488 E-03
$K_{II}^{sup}$	1,238	1,547	1,641	1,715
$K_{II}^{inf}$	1,101	1,425	1,619	1,702

TAB. 5 – Problème 3 : Facteur d'intensité de contrainte en mode II ( $K_{II}^{ref} = 1,789$ ).

## 7 Conclusions et perspectives

Un estimateur en quantité d'intérêt, basé sur une technique de résidus explicites, a été présenté. Une quantité d'intérêt de la mécanique de la rupture a été mise en oeuvre pour permettre l'estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes en modes mixtes. Des tests numériques permettant de valider cet estimateur sont présentés ; ils ont été réalisés avec *Code\_Aster*. Les « pseudo » bornes définies permettent d'avoir un encadrement assez satisfaisant des facteurs d'intensité de contrainte. Mais la méthode d'extraction étant sensible au type d'élément utilisé, l'utilisation d'éléments de Barsoum permettrait certainement d'améliorer les résultats. Enfin cette méthodologie pourra être utilisée sans difficulté dans le cas de problèmes à 3 dimensions.

## Références

- Babuska I., Rheinboldt W.C. 1978 A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12**, 1597-1659.
- Becker B., Rannacher R. 2001 An optimal control approach a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, **19**, 1-102.
- Irwin G.R. 1957 Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.*, **24**, 301-364.
- Ladevèze P. 1975 Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse d'État, Université Pierre et Marie Curie, France.
- Prudhomme S., Oden J.T. 1999 On goal-oriented error estimation for elliptic problems : Application to the control of point-wise errors. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **176**, 313-331.
- Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. 1987 A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 334-357.