

# Identification élastoplastique locale à l'aide d'une méthode variationnelle

Félix Latourte, André Chrysochoos, Stéphane Pagano & Bertrand Wattrisse

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (CNRS - UMII)  
cc048 Place Eugène Bataillon F-34095 Montpellier cedex 5  
latourte@lmgc.univ-montp2.fr

## Résumé :

*Dans ce papier, nous présentons l'application d'une méthode variationnelle à l'identification de distributions de propriétés matérielles. Cette méthode, basée sur l'écart en relation de comportement, a été précédemment utilisée par Geymonat et al. (2002), dans le cadre d'un comportement élastique linéaire. Dans ce qui suit, cette méthode a été étendue à une classe de comportements élastoplastiques à écrouissage cinématique linéaire. Elle permet d'identifier localement 5 paramètres à partir de mesures surfaciques de déplacement lors d'un essai unique. Après un bref exposé du principe de la méthode nous présentons sa mise en oeuvre numérique puis un exemple d'application.*

## Abstract :

*A variational method applied to the identification of distributed material properties is here introduced. This method, established on the constitutive equation gap, has been previously applied by Geymonat et al. (2002) to the identification of elastic parameters. Now extended to a class of elastoplastic behaviour, with linear kinematic hardening, it allows identifying locally 5 parameters from displacement fields obtained during a single test. First, we will present some theoretical notions relative to this identification, and some aspects of the numerical method associated. Then, the possibilities of the method will be presented through results obtained with a numerical simulation.*

## Mots-clefs :

**identification, élastoplasticité, mesures de champs.**

## 1 Introduction

Lors d'essais mécaniques traditionnels (traction simple, torsion pure...), l'expérimentateur assimile la réponse de la "partie utile" de l'éprouvette à celle du matériau. Mais des imperfections du dispositif expérimental, du matériau ou encore de la géométrie de l'éprouvette peuvent avoir pour conséquence une réponse hétérogène de cette partie utile. Afin de tenir compte de ces phénomènes, les essais mécaniques sont de plus en plus souvent couplés à des techniques de mesure de champs locaux (déformation, vitesse de déformation, température...). La méthode présentée dans cet article est basée sur l'exploitation de champs de déplacement, obtenus dans un cadre expérimental par une méthode de corrélation d'images numériques développée par Wattrisse *et al.* (2001). Ces mesures locales reflètent mieux le comportement du matériau et de ce fait elles peuvent être utilisées pour identifier certaines de ses propriétés mécaniques. Dans cet article nous nous intéressons à une méthode variationnelle, inspirée par l'identification de conductivités électriques par Kohn & McKenney (1990). Cette méthode a ensuite été utilisée en élasticité par Geymonat *et al.* (2002) pour traiter le problème de l'identification à partir de mesures de champs. D'autres méthodes ont été mises en place pour résoudre ce type de problème, comme la méthode des champs virtuels (Grédiac *et al.* (2002)), le recalage par élément finis (Meuwissen *et al.* (1998)), ou encore l'écart à l'équilibre (Claire *et al.* (2003)). Nous nous

intéressons ici à l'identification d'un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire dans le cas des petites perturbations, sous l'hypothèse des contraintes planes. L'algorithme de résolution est présenté dans ce qui suit. Cette présentation est suivie d'une application numérique qui a pour but d'illustrer la faisabilité de la procédure d'identification.

## 2 Utilisation de l'erreur en comportement pour traiter le problème d'identification

De façon générale, les mesures de surface dont nous disposons ne permettent pas d'identifier des propriétés matérielles locales dans un volume. Pour cette raison, nous nous restreignons à des situations simples où l'hypothèse des contraintes planes semble réaliste. La mesure locale de trois composantes de la déformation nous permet alors de déterminer trois coefficients matériau indépendants pour chaque incrément de déformation. Dans ce qui suit nous présentons le cadre choisi pour formuler et résoudre ce problème d'identification dans le cadre d'un comportement élastoplastique.

### 2.1 Définition d'une fonctionnelle élastoplastique

Pour plusieurs pas de chargements successifs, le champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  est mesuré sur le domaine  $\Omega$ , les résultantes des efforts  $\mathbf{R}_i$  sont connues sur les bords  $\Gamma_i$ . Les bords libres  $\Gamma_j$  sont tels que  $\Gamma_i \cup \Gamma_j = \partial\Omega$  et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ . Nous allons nous intéresser à deux types de formulation du problème mécanique : une formulation standard, et une formulation incrémentale. Le problème de l'identification élastique consiste à obtenir le tenseur d'élasticité  $\mathbf{A}$  et la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  qui satisfassent l'équation d'équilibre (Eq. 1), la relation de comportement (Eq. 2) et l'équilibre global (Eq. 3) pour un pas de chargement pour lequel il n'y a pas d'écrouissage. L'identification plastique consiste à obtenir, lors d'une transformation plastique, le tenseur plastique tangent  $\mathcal{L}$  et l'incrément de contrainte  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  vérifiant les équations (4, 5, 6) de la formulation incrémentale, appliquée sur un incrément plastique :

Formulation standard

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \quad \text{dans } \Omega \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j. \end{cases} \quad (3)$$

Formulation incrémentale

$$\operatorname{div} \Delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{L} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*) \quad \text{dans } \Omega \quad (5)$$

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds, \\ \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j. \end{cases} \quad (6)$$

Nous associons à la formulation standard la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ , et à la formulation incrémentale la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*))^T : \mathbf{B}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega, \quad (7)$$

$$\mathcal{G}(\Delta\boldsymbol{\tau}, \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\boldsymbol{\tau} - \mathcal{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*))^T : \mathcal{L}^{-1} : (\Delta\boldsymbol{\tau} - \mathcal{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*)) \, d\Omega, \quad (8)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$  est la déformation associée au déplacement mesuré. Les champs de contrainte  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  appartiennent respectivement aux espaces  $\Sigma_{adm}$  et  $\Delta\Sigma_{adm}$  :

$$\Sigma_{adm} = \{ \boldsymbol{\tau} \text{ régulière et symétrique vérifiant les eqs. 1 et 2} \}, \quad (9)$$

$$\Delta\Sigma_{adm} = \{ \Delta\boldsymbol{\tau} \text{ régulière et symétrique vérifiant les eqs. 4 et 5} \}. \quad (10)$$

Sous l'hypothèse des contraintes planes, il peut être commode d'utiliser les notations ingénieur. L'espace des tenseurs de rigidité admissibles est alors défini par :

$$\xi = \{ \mathbf{B} \in (\mathcal{L}^\infty(\Omega))_{sym}^{3 \times 3} ; B_{ij} \text{ linéaire par morceaux, } \mathbf{B} \text{ défini positif} \}. \quad (11)$$

Les propositions suivantes pour la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  sont vraies :

- (i)  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) \geq 0, \forall (\mathbf{B}, \boldsymbol{\tau}) \in \Sigma_{adm} \times \xi$ .
- (ii)  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow (2)$  est vraie avec  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ .
- (iii) La fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est convexe sur  $\Sigma_{adm} \times \xi$ .

Ces propositions s'appliquent de la même façon à la fonctionnelle  $\mathcal{G}$ , moyennant une définition similaire des tenseurs plastiques tangents admissibles. Le problème d'identification revient alors à minimiser les fonctionnelles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  par rapport à leurs deux arguments. On détaille dans le paragraphe suivant la stratégie numérique mise en place à cet effet.

## 2.2 Résolution numérique

Le modèle élastoplastique fait intervenir 5 coefficients indépendants : 3 paramètres élastiques et 2 plastiques. La stratégie adoptée consiste à identifier séparément les paramètres élastiques et plastiques. Pour identifier les paramètres élastiques, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est minimisée successivement par rapport chacune de ses variables. Pour la première minimisation, le champ de contrainte se doit de respecter l'équation d'équilibre (Eq. 1) et les conditions aux limites (Eq. 3). La deuxième étape est explicite en  $\mathbf{B}$ , et permet d'obtenir, via un calcul direct, les 3 coefficients de l'élasticité.

Ensuite, sur chaque pas de chargement, une identification élastique locale est réalisée lorsque la déformation est suffisante. Chaque tenseur  $\mathbf{B}$  obtenu est alors comparé localement au tenseur élastique  $\mathbf{B}_e$  précédemment identifié afin de savoir si la plasticité apparaît localement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|}{\boldsymbol{\varepsilon}_{max}} < \delta_\epsilon \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{B}_e \\ \frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|}{\boldsymbol{\varepsilon}_{max}} \geq \delta_\epsilon \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_e\|}{\|\mathbf{B}_e\|} < \delta_B \Rightarrow \text{identification élastique} \\ \frac{\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_e\|}{\|\mathbf{B}_e\|} \geq \delta_B \Rightarrow \text{identification plastique} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (12)$$

où  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$  est la déformation équivalente calculée localement tandis que  $\boldsymbol{\varepsilon}_{max}$  est la déformation équivalente maximale sur  $\Omega$ .  $\delta_\epsilon$  est un critère seuil sur la déformation tandis que  $\delta_B$  est un critère seuil sur le tenseur d'élasticité. Dans le cas d'une identification plastique, on détermine les deux inconnues qui sont le module d'érouissage  $k$  et la contrainte seuil  $\sigma_0$ .

Pour la première étape plastique (i.e. étape  $n$  sur la figure 1b) il est possible d'écrire une formulation sécante du problème. En notant  $\mathbf{A}_e$  le tenseur de rigidité élastique,  $\mathbf{A}_n^p$  le tenseur plastique sécant, et  $\Delta\gamma$  le multiplicateur plastique, nous pouvons écrire d'après Simo & Hughes (1998) :

$$\mathbf{A}_n^p = \left[ \mathbf{A}_e^{-1} - \frac{\Delta\gamma(\sigma_0)}{1 + \frac{2}{3}k\Delta\gamma(\sigma_0)} \right]^{-1} \quad (13)$$

En calculant le gradient de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $\mathbf{A}_n^p$ , nous obtenons 3 équations scalaires dépendantes, ce qui rend impossible une identification locale et simultanée de  $k$  et de  $\sigma_0$  à partir de la formulation sécante. De ce fait, un algorithme particulier pour l'identification des deux paramètres plastiques a été mis en place (cf. figure 1a). Le calcul est itératif et nécessite deux pas de chargement plastiques successifs qui seront notés  $n$  et  $n + 1$ . La contrainte  $\sigma_0$  est déterminée

par le problème sécant sur le pas  $n$ , le module  $k$  est déterminé par la résolution du problème tangent sur le pas  $n + 1$ .

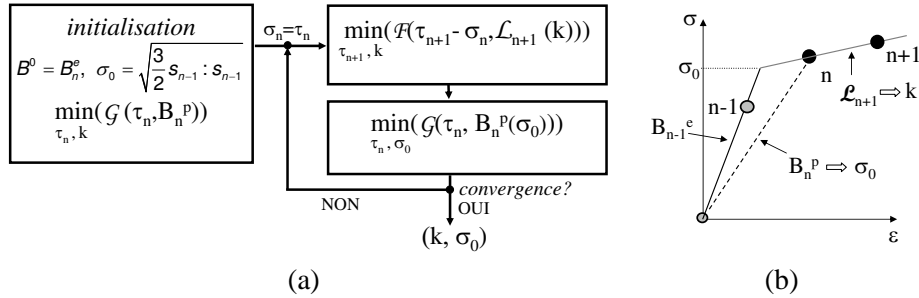


FIG. 1 – Résolution itérative de l'identification de paramètres plastiques, (a) : algorithme et (b) : diagramme  $(\sigma, \varepsilon)$ .

### 3 Identification numérique d'une distribution de paramètres élastoplastiques sur un bi-matériau

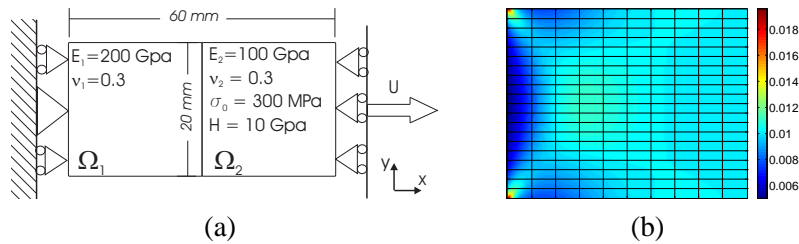


FIG. 2 – Présentation de l'essai (a) et déformation plastique équivalente affichée sur  $\Omega_2$  et son maillage pour l'identification (b).

La simulation d'un essai de traction sur un bi-matériau est réalisée pour les conditions de chargement présentées sur la figure 2a. Cette simulation est faite au moyen d'un calcul par éléments finis 2D qui utilise  $90 \times 60$  éléments Q1. Le barreau sollicité comporte deux zones matérielles : la zone  $\Omega_1$ , purement élastique et la zone  $\Omega_2$ , de raideur plus faible, élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Cet essai, particulièrement pénalisant, fait apparaître de forts gradients de déformation permettant d'éprouver les performances de la méthode en présence d'hétérogénéités matérielles. Nous nous sommes placé dans une configuration idéale pour laquelle la frontière entre les deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  coïncide avec le maillage de la méthode d'identification.

#### 3.1 Sensibilité au bruit en élasticité

La robustesse de la méthode est éprouvée sur l'identification des paramètres élastiques. Le maillage de la méthode d'identification comporte  $20 \times 20$  zones matérielles soit  $41 \times 41$  noeuds de déplacement. Un bruit gaussien est ajouté aux déplacements exacts issus du calcul par éléments finis 2D. Notons  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$ . Nous définissons le rapport de bruit  $r_b$  sur les déformations :

$$r_b = \max_{i=1 \dots 3} \left( \frac{\sup_{\Omega} |\varepsilon_{ib} - \varepsilon_{ir}|}{\sup_{\Omega} |\varepsilon_{ir}|} \right), \quad (14)$$

où  $\varepsilon_{ib}$  représente la  $i$ -ème composante de la déformation bruitée, et  $\varepsilon_{ir}$  la  $i$ -ème composante de la déformation "réelle", c'est à dire issue du calcul par éléments finis. L'étude de sensibilité a été faite pour un rapport  $r_b$  variant entre 0 et 50%. L'évolution des écarts absolus sur l'identification des paramètres  $E$  et  $\nu$  sont représentés sur la figure 3, cette évolution est progressive et les erreurs maximales sont de l'ordre de 20 GPa pour le module d'Young  $E$ , soit moins de 20% d'erreur relative, et de 0,06 pour le coefficient de Poisson  $\nu$  soit 20% d'erreur relative également.

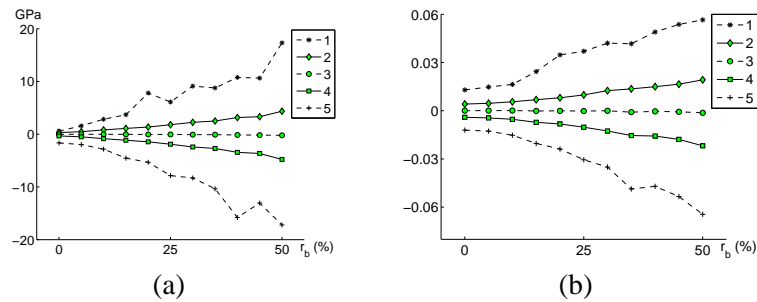


FIG. 3 – (a) : Détermination locale du module d'Young  $E$ , erreur maximale (1), moyenne + écart type (2), moyenne (3), moyenne - écart type (4), minimale (5); (b) : Détermination locale du coefficient de poisson  $\nu$ , erreur maximale (1), moyenne + écart type (2), moyenne (3), moyenne - écart type (4), minimale (5).

### 3.2 Résultats en plasticité

Les paramètres du modèle sont toujours identifiés sur  $20 \times 20$  zones matérielles. Le barreau ne plastifie pas uniformément sur  $\Omega$  : le domaine  $\Omega_1$  reste élastique et la plastification est hétérogène sur  $\Omega_2$  (cf. figure 2b). Les zones pour lesquelles l'incrément de déformation est très faible par rapport à l'incrément de déformation maximale sont considérées comme élastiques, et les paramètres précédemment identifiés sont conservés (cf. equation 12). Le critère  $\delta_\varepsilon$  vaut ici 5% ainsi que le critère  $\delta_B$ . L'interface entre la zone élastique et la zone plastique est ainsi précisément localisée par la méthode d'identification.

L'erreur maximale sur le module d'écrouissage  $H$  est de 23% et se trouve localisée aux endroits où les gradients de déformation sont les plus élevés (cf. figure 4a). Cette erreur maximale de 2,3 GPa est comparable avec celle obtenue sur l'identification du module d'Young à partir de données non bruitées (cf. figure 3a). L'erreur maximale sur  $\sigma_0$  est de 14% (cf. figure 4b).

La présence de gradients de déformation constitue une source d'erreur importante pour l'identification dans la mesure où le maillage utilisé pour l'identification est plus grossier que celui utilisé pour le calcul direct. Naturellement, les résultats sont nettement améliorés si l'on considère les paramètres de la loi de comportement constants sur l'ensemble de la zone plastique.

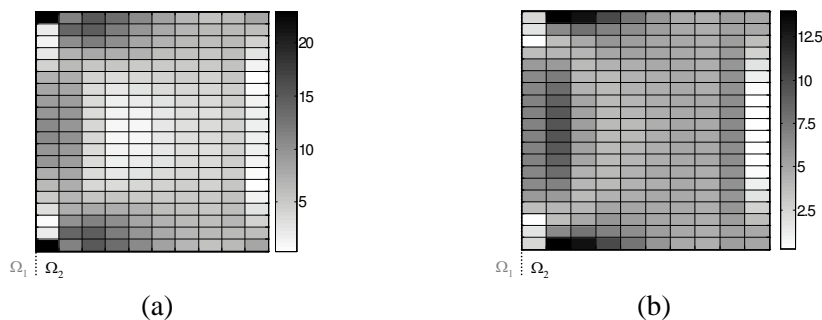


FIG. 4 – Erreurs relatives (en %) concernant la détermination du module  $H$  (a) et de la contrainte  $\sigma_0$  (b) représentées uniquement sur  $\Omega_2$ .

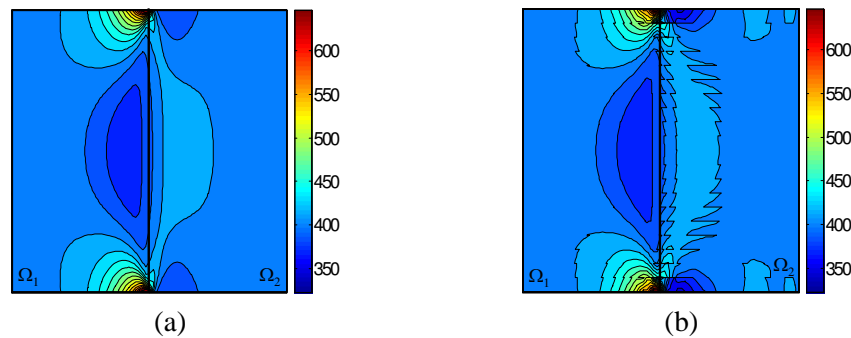


FIG. 5 – Pour le premier pas plastique (pas  $n = 2$ ) ; (a) : contrainte de traction donnée par le calcul direct en MPa ; (b) : contrainte de traction identifiée en MPa.

La figure 5 illustre les distributions de la contrainte de traction  $\sigma_{xx}$  sur tout le domaine  $\Omega$  à la fin du premier pas plastique. Les contraintes représentées sur la figure 5a correspondent à la résolution du problème direct alors que celles données sur la figure 5b sont obtenues par l'approche inverse. On observe une bonne concordance à la fois sur les distributions et les ordres de grandeur de cette contrainte. En particulier, les gradients de contrainte sont correctement retranscrits au voisinage de l'interface.

#### 4 Conclusions

Nous avons présenté une méthode variationnelle d'identification de propriétés mécaniques à partir de données cinématiques. Cette méthode est maintenant étendue à un comportement de type élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Les résultats obtenus dans le cas d'un barreau constitué de deux matériaux sont encourageants et la méthode est actuellement appliquée à des données expérimentales.

#### Références

- D. Claire, S. Roux, and F. Hild. Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs. *Mécanique & Industries*, 4 :655–665, 2003.
- G. Geymonat, F. Hild, and S. Pagano. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *C.R. Mécanique*, 330 :403–408, 2002.
- M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron. L'identification de propriétés mécaniques de matériaux avec la méthode des champs virtuels, une alternative au recalage par éléments finis. *C.R. Mécanique*, 330 :107–112, 2002.
- R. Kohn and A. McKenney. Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *Inverse Problems*, 6 :389–414, 1990.
- M. Meuwissen, C. Oomens, F. Baaijens, R. Petterson, and J. Janssen. Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *J. of Materials Processing Technology*, 75 :204–211, 1998.
- J.C. Simo and T.J.R Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.
- B. Wattrisse, A. Chrysochoos, J-M. Muracciole, and M. Némoz-Gaillard. Analysis of strain localisation during tensile test by digital image correlation. *Journal of Experimental Mechanics*, 41 :29–38, 2001.