

Etude des instabilités thermocapillaires et thermogravitaires dans un bain d'huile

Emilien Sauvage¹, Laetitia Jacoutot^{1,2}, Yves Fautrelle¹ & Annie Gagnoud¹

¹SIMAP Groupe EPM, ENSEEG, BP 75, 38402 Saint Martin d'Hères, France

²Center for Turbulence Research, Stanford, California, 94305-3030.

emilien.sauvage@gmail.com

Résumé :

La structuration de l'écoulement d'une huile aux silicones (nombre de Prandtl de 10,3) dans une cellule annulaire à surface libre chauffée en son centre est étudiée numériquement. L'objectif est d'acquérir des connaissances fines sur les types d'instabilités thermoconvectives et leur modélisation numérique en se basant sur des résultats expérimentaux obtenus dans les travaux de doctorat de E. Favre (1997). Pour un nombre de Marangoni (Ma) suffisamment faible, l'écoulement est stationnaire et axisymétrique. Des ondes hydrothermales apparaissent pour une valeur critique de Ma qui dépend du nombre de Bond dynamique (Bd) et du rapport d'aspect de la cuve. Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Abstract :

The flow structuration of silicon oil (Prandtl number of 10,3) in open annular pool heated from the inner wall is investigated numerically. The aim of the study is to acquire fine knowledge on the types of thermoconvective instabilities and their numerical modelling by comparison with experimental results obtained in previous doctorate works (E. Favre 1997). The flow is steady and axisymmetric at sufficiently low values of the Marangoni number (Ma). Hydrothermal waves appear at critical values of Ma which depend on the dynamic Bond number (Bd) and on the aspect ratio. The numerical results are in good agreement with the experimental ones.

Mots-clefs :

thermoconvection ; ondes hydrothermales ; simulation numérique 3D.

1 Introduction

L'effet thermocapillaire, appelé également effet Marangoni, met en mouvement la surface libre d'un fluide soumise à un gradient de température parallèle au plan de l'interface $\Delta T / L$. Les forces responsables de ce mouvement sont dues à la variation de la tension de surface le long de l'interface. D'autre part, dans un champ de gravité, un tel gradient de température induit aussi des mouvements de convection naturelle par variation locale de la masse volumique.

Dans ces problèmes, dès que $\Delta T > 0$, le fluide se meut. L'écoulement proche de l'état d'équilibre est bidimensionnel et stationnaire. Cet écoulement est dit 'de base' ou 'de retour'. Lorsque l'écart de température ΔT imposé dépasse un certain seuil, l'écoulement de base se déstabilise. Les instabilités ont des formes et des caractéristiques variées qui sont fonction des autres paramètres du problème comme, le nombre de Prandtl, le nombre de Bond dynamique, la géométrie de la cavité et les conditions aux limites.

De nombreuses études tant expérimentales que numériques ont été réalisées sur les instabilités thermoconvectives. Un premier type d'instabilité est décrit : les rouleaux corotatifs constitués de tourbillons corotatifs stationnaires d'axe longitudinal bidimensionnels. Mercier *et al.* (2002) ont montré que les rouleaux apparaissent du côté froid pour les fluides à petits nombres de Prandtl ($Pr < 0,01$), du côté chaud pour les fluides à grands nombres de Prandtl ($Pr > 4$) et des deux côtés pour les nombres de Prandtl intermédiaires. Expérimentalement et

numériquement cette instabilité en rouleaux corotatifs est bien retrouvée pour des configurations diverses.

Smith *et al.* (1983) ont étudié pour la première fois, la stabilité linéaire d'un écoulement de retour sans gravité et ont découvert une nouvelle forme d'instabilité qu'ils baptisent 'ondes hydrothermales'. Elles apparaissent comme une instabilité ondulatoire propagative de l'écoulement de base avec une fréquence et un nombre d'onde spécifique. Il est important de préciser que les ondes hydrothermales ne sont pas liées à des variations d'altitude de la surface. Un récapitulatif des expériences dans lesquelles des ondes hydrothermales ont été observées, est présenté par Burgete *et al.* (2001). Ils réalisent un diagramme de stabilité de l'écoulement en reportant l'écart de température critique (ou Ma) d'apparition des instabilités en fonction de la hauteur de liquide dans le bain (ou Bd). Dans une majorité d'études, les ondes hydrothermales apparaissent comme l'instabilité secondaire, l'instabilité primaire étant alors celle des rouleaux corotatifs.

Favre (1997) a réalisé des expériences dans une cavité cylindrique où le fluide est chauffé au centre de la cavité par un plot chauffant et refroidi sur les cotés et au fond de la cavité. Il a observé l'instabilité en rouleaux corotatifs, les ondes hydrothermales et pour de plus grandes hauteurs de fluide des tourbillons d'axe radiaux. Cette dernière instabilité reste peu étudiée.

D'un point de vue numérique, il a fallu attendre que les moyens de calculs permettent des simulations tridimensionnelles pour réussir à simuler les ondes hydrothermales. Li *et al.* (2004) simulent les ondes hydrothermales dans une cavité annulaire tridimensionnelle en résolvant directement le système d'équations de Navier-Stokes par des méthodes classiques de volumes finis. Le fluide utilisé a un très faible nombre de Prandtl ce qui facilite les calculs numériques. Néanmoins, en 2006, Shi *et al.* (2006) simulent, avec les mêmes techniques, un fluide à nombre de Prandtl égal à 6,7. Les visualisations en spirale des ondes hydrothermales simulées par Shi *et al.* (2006) sont très proches de celles obtenues expérimentalement par Garnier (2000).

2 Présentation du modèle

2.1 Modèle hydrodynamique et hypothèse

La configuration modélisée numériquement est un écoulement dans une cavité annulaire à surface libre soumise à un gradient de température (cf. figure (1)). La couche de fluide de hauteur h est chauffée au centre de la cavité cylindrique par un plot chauffant de rayon $R_1 = 15mm$ et refroidie sur le coté de la cavité de rayon $R_2 = 50mm$. L'extension radiale de la cavité est notée $L = R_2 - R_1$, le plot chauffant est à la température T_1 tandis que le coté de la cavité est à la température T_2 . L'écart de température typique est noté $\Delta T = T_1 - T_2 \geq 0$. La surface libre et le fond de la cuve sont supposés adiabatiques.

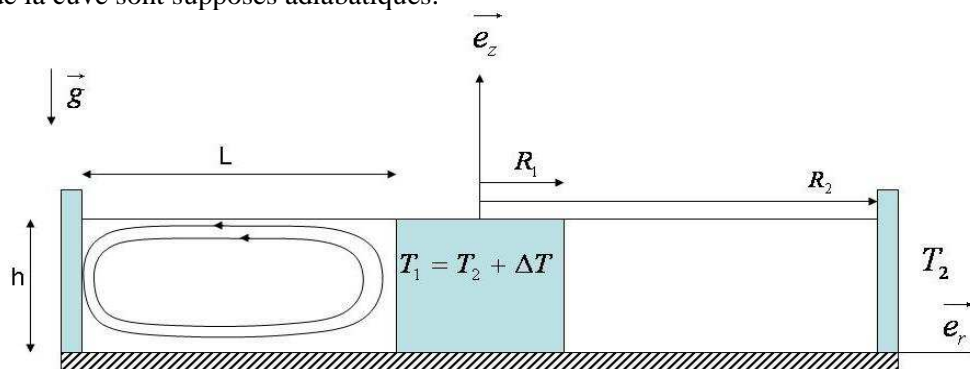


FIG. 1 – Section de la géométrie cylindrique axisymétrique.

Les propriétés physiques du fluide simulé sont présentées au tableau 1.

	<i>Symbole</i>	<i>Unité</i>	<i>Valeur</i>
Viscosité cinématique	ν	$m^2.s^{-1}$	$6,5.10^{-7}$
Masse volumique	ρ_0	$kg.m^{-3}$	760
Viscosité dynamique	μ	$kg.m^{-1}.s^{-1}$	$4,94.10^{-4}$
Conductivité thermique	λ	$W.m^{-1}.K^{-1}$	0,1
Diffusivité thermique	κ	$m^2.s^{-1}$	$0,63.10^{-7}$
Dérivée de la tension superficielle	γ	$N.m^{-1}.K^{-1}$	-8.10^{-5}
Dilatabilité thermique	β	K^{-1}	$1,34.10^{-3}$
Prandlt	Pr		10,3

TAB. 1 : Propriétés physique du fluide.

Les forces motrices du mouvement sont (i) les forces d'Archimède qui créent un gradient de pression vertical ayant tendance à ramener le fluide chaud au dessus du fluide froid et (ii) les forces thermocapillaires qui entraînent le fluide à proximité de la surface, de la zone chaude vers la zone froide. Ces forces thermocapillaires sont générées par la variation de la tension de surface avec la température qui est supposée linéaire. On pose $\gamma = -\partial\sigma / \partial T$ où σ est la tension de surface du fluide. Les nombres adimensionnels régissant ces deux forces sont respectivement le nombre de Rayleigh et le nombre de Marangoni :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta Th^4}{\kappa\nu L} \quad Ma = \frac{\gamma\Delta Th^2}{\rho_0\kappa\nu L}$$

En pratique, on utilise le nombre de Bond dynamique $Bd = Ra / Ma$ à la place du nombre de Rayleigh car celui-ci ne dépend plus de l'écart de température imposé. Les autres nombres adimensionnels régissant le problème sont le nombre de Prandtl $Pr = \nu / \kappa$ et les rapports d'aspects de la cuve $\varepsilon = h / L$ et du plot chauffant $\phi = L / R_1$.

2.2 Méthodes numériques

L'écoulement est laminaire et la surface libre considérée comme plate et indéformable. Le système d'équations de Navier-Stokes prenant en compte les effets thermogravitaires avec l'approximation de Boussinesq s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) &= -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{v} + \rho_0 \beta (T - T_0) \vec{g} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T &= \kappa \Delta T \end{aligned} \quad (1)$$

Les conditions aux limites sur la surface libre sont une condition de non pénétration $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ et une condition dynamique égalisant les contraintes visqueuses aux contraintes capillaires induites par le gradient de température (effet Marangoni) :

$$\mu \frac{\partial (v_x)}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial x} \quad \mu \frac{\partial (v_y)}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2)$$

Le logiciel commercial Fluent® est choisi pour mener les simulations. Une discrétisation à l'ordre 3 de type MUSCL est utilisée pour les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Le couplage vitesses/pression est fait par la méthode SIMPLEC. Les ordres élevés de résolution sont nécessaires pour simuler correctement le fort couplage existant entre l'écoulement et le

champ de température dû au grand nombre de Prandtl du fluide. Le calcul est considéré comme convergé lorsque les résidus de vitesse, d'énergie et de continuité sont inférieurs à 10^{-5} pour la vitesse et la continuité et 10^{-7} pour l'énergie. Le pas de temps utilisé pour les simulations est de 0,01s. Les machines utilisées pour faire les calculs sont des PC Linux Bi-pro Intel Xeon 3.80 Ghz, 3.89 Go RAM.

D'une manière générale, les maillages sont cartésiens structurés et progressifs, le ratio de taille de deux mailles voisines ne dépassant pas 1,2. Les mailles sont plus fines sous la surface libre en raison du gradient de vitesse induit par l'effet Marangoni, et près des parois froides où se développent des couches limites thermiques et cinématiques. Les maillages les plus fins sont de l'ordre de 600 000 volumes élémentaires.

2.3 Méthodes d'exploitation

D'un point de vue numérique, les instabilités sont obtenues lors d'un calcul instationnaire dont l'initialisation est un calcul stationnaire convergé pour les mêmes paramètres. Ce calcul stationnaire est axisymétrique. Le démarrage de l'instabilité est visualisé en suivant l'évolution temporelle d'une variable comme la température ou la vitesse azimutale, en un ou plusieurs points quelconques du domaine. La perturbation se présente initialement sous la forme d'oscillations sinusoïdales dont l'amplitude croît de manière exponentielle. Elle peut s'écrire pour la température, par exemple, sous la forme :

$$T(\vec{x}, t) = T(\vec{x}) \cos(\beta_{II} t) e^{\beta_I t} \quad (3)$$

où β_I est le taux de croissance de l'instabilité et β_{II} représente la fréquence d'oscillation de la perturbation. En traçant β_I en fonction de ΔT , on peut déterminer, par régression linéaire, l'écart de température critique auquel l'instabilité apparaît pour $\beta_I = 0$. Cette méthode est due à Li *et al.* (2004). Après 100 secondes de calcul en moyenne, l'instabilité se stabilise en oscillations périodiques non nécessairement sinusoïdales à amplitude constante.

Les instabilités étant des perturbations azimutales, on définit une température dite 'fluctuante' T' en retirant au champ de température initial, la température azimutale moyenne à r et z fixés.

$$T'(r, \theta, z, t) = T(r, \theta, z, t) - \int_0^{2\pi} T(r, \theta, z, t) d\theta \quad (4)$$

3 Résultats

La figure (2) montre l'écoulement obtenu pour $h=2\text{mm}$ ($Bd=0.51$), $\Delta T = 5K$ ($Ma=1468$) et $t=200\text{s}$. La figure (2-a) met en évidence l'instabilité primaire en rouleaux corotatifs présent dès le calcul stationnaire d'initialisation. Elle est composée d'un tourbillon principal d'axe circulaire entourant le plot chauffant. D'autres rouleaux corotatifs se côtoient dans la cuve dont l'intensité décroît en s'éloignant de la paroi chaude. Le nombre de rouleaux dépend du nombre de Marangoni et du facteur d'aspect de la cuve $\varepsilon = h/L$. Cette instabilité est purement bidimensionnelle et retrouvée lors de calculs axisymétriques.

Des ondes hydrothermales, instabilité secondaire, apparues lors du calcul instationnaire viennent se superposer à l'instabilité primaire des rouleaux corotatifs. Elles se traduisent par un mouvement azimutal du fluide autour du plot chauffant mis en évidence à la figure (2-b). La structure même des ondes hydrothermales est visible à la figure (2-c) qui se présentent sous la forme de branches courbes et tournantes autour du plot chauffant dans le sens trigonométrique.

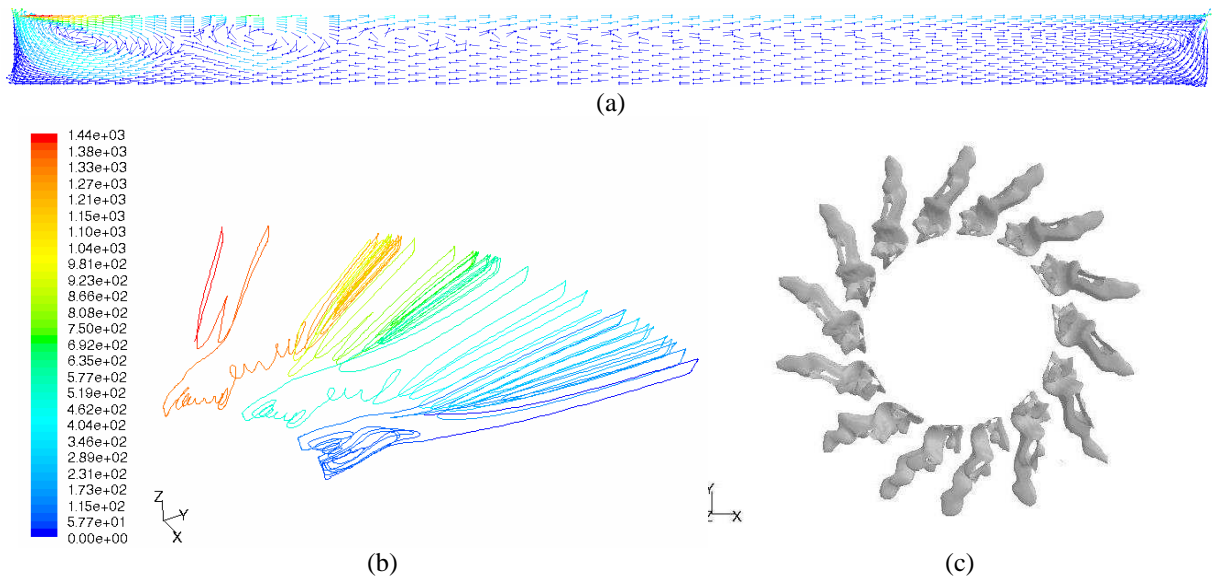


Fig. 2 – Résultats d'une simulation pour $h=2\text{mm}$ ($Bd=0.51$) et $\Delta T = 5K$ ($Ma=1468$) : (a) Vecteurs vitesses dans une coupe (r,z) de la cuve avec $V_{MAX} = 2,2\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ en rouge, (b) Suivi temporel d'une particule (échelle en s) et (c) Iso-surface du gradient de température azimuthal $\partial T / \partial \theta = 42\text{ K}\cdot\text{m}^{-1}$.

Pour $h=2\text{mm}$ ($Bd=0.51$) et $\Delta T = 10K$ ($Ma=2936$), deux trains d'ondes hydrothermales contournent le plot chauffant dans un sens différent. Les ondes naissent dans une source d'ondes et disparaissent dans un puits d'ondes situé à l'opposé. Ce phénomène est mis en évidence en traçant un diagramme spatio-temporel de la fluctuation de température T' , définie par l'équation (4), le long d'un rayon de la surface libre donné : $r=38\text{mm}$ et $z=h$. La figure (3) présente deux diagrammes spatio-temporels, l'un numérique, l'autre expérimental, obtenu par Favre (1997). La configuration de Favre (1997) ne présente que les différences suivantes par rapport à celle étudiée ici : (i) le fluide est chauffé au centre de la cavité par un plot chauffant horizontal posé en surface et (ii) le fond de la cavité est refroidie. Le nombre d'onde est quasiment identique.

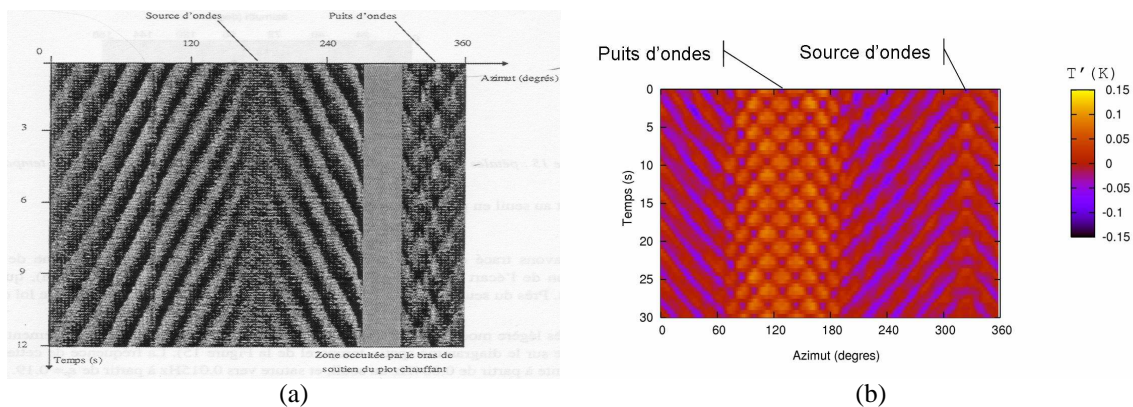


Fig. 3 – Diagramme spatio-temporels pour $h=2\text{mm}$ ($Bd=0.51$), (a) expérimental obtenu par ombroscopie dû à Favre (1997) (ΔT inconnu) et (b) numérique pour $\Delta T = 10K$ ($Ma=2936$).

Le calcul menant à l'apparition d'ondes hydrothermales a été réalisé dans cette configuration ($h=2\text{mm}$) pour $\Delta T = 5K, 7K$ et $10K$. Les valeurs du taux de croissance de l'instabilité de β_l ont été relevées et permettent de calculer une différence de température critique de $3,9K$. Favre (1997), pour une hauteur de 2mm , trouve dans sa configuration

expérimentale, un écart de température critique pour l'apparition des ondes hydrothermales de 4K ($Ma=1150$). Numériquement, Shi *et al.* (2006) trouvent un écart de température critique de 5,9K pour une configuration avec $Pr=6,7$, $h=1mm$, $R_1 = 20mm$, $R_2 = 40mm$ et où le fluide est chauffé à l'extérieur et refroidit à l'intérieur.

Des calculs à différentes hauteurs ($h=3mm$, $3,5mm$ et $4 mm$) ont montrés que les ondes hydrothermales n'apparaissent que si $h<3mm$. Ce résultat rejoint ceux de Favre (1997) et Garnier (2000) qui trouvent aussi cette limite pour l'apparition des ondes hydrothermales. Au-delà de cette hauteur, d'autres types d'instabilité apparaissent. Il est intéressant de remarquer que cette hauteur correspond à un nombre de Bond dynamique proche de l'unité. Garnier (2000) émet l'hypothèse que les ondes hydrothermales ne peuvent apparaître que lorsque $Bd<1$, c'est à dire lorsque les forces thermogravitaires sont négligeables, suggestion qui va dans le sens de la théorie de ces ondes prédites par Smith *et al.* (1983) où seule la thermocapillarité a été prise en compte.

4 Conclusions

Les récents progrès en puissance de calcul permettent d'envisager des simulations tridimensionnelles complètes des instabilités thermoconvectives en particulier celles des ondes hydrothermales. Celles-ci ont été simulées avec succès dans une géométrie annulaire à surface libre avec un fluide à nombre de Prandtl égale à 10,3. Les ondes hydrothermales apparaissent sans perturbation artificielle de l'écoulement de base thermoconvectif avec des méthodes numériques classiques de résolution des équations de Navier-Stokes. Leurs caractéristiques ont pu être détaillées et se corrèlent bien à différents résultats expérimentaux.

Références

- Burguete J. & N. Mukolobwicz, 2001 Buoyant-thermocapillary instabilities in extended liquid layers subjected to a horizontal temperature gradient, *Physics of Fluids*, 13, 2773-2787
- Favre E., 1997 Convection thermocapillaire et thermogravitaire dans un fluide chauffé localement sur sa surface libre, *Thèse de doctorat*, Institut National Polytechnique de Grenoble
- Garnier N., 2000 Ondes non-linéaires à une et deux dimensions dans une mince couche de fluide, *Thèse de doctorat*, Université Paris 7
- Li Y.R., N. Imaishi, T. Azami & T. Hibiya, 2004 Three-dimensional oscillatory flow in a thin annular pool of silicon melt", *Journal of Crystal Growth*, 260, 28-42
- Mercier J.F. & C. Normand, 2002 Influence of the Prandtl number on the location of recirculation eddies in thermocapillary flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 783-801
- Shi W. & N. Imaishi, 2006 Hydrothermal waves in differentially heated shallow annular pools of silicone oil, *Journal of Crystal Growth*, 290, 280-291
- Smith M. K. & S. H. Davis, 1983a Instabilities of dynamics thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities, *J. Fluid Mech.* **132**, 119-144