

Un modèle “équilibre” d’ordre élevé pour les équations de Saint-Venant et extensions au cas dispersif pour la propagation de la houle en milieu littoral

Fabien Marche, Philippe Bonneton

*EPOC, Université Bordeaux I
Avenue des Facultés, 33405 Talence, France
fmarche@epoc.u-bordeaux1.fr*

Abstract :

This paper is devoted first to the introduction of the numerical methods developed in the framework of the SURF_WB model, recently introduced in (10) and based on a Finite-Volume well-balanced scheme for the shallow water equations with a bed-slope source term. In a second time we introduce some recent developments leading to a high-order of accuracy well-balanced scheme which can handle wetting and drying phenomena. Lastly, we say a few words concerning the possible extension towards an hybrid Finite-Volumes/Finite-Differences method for Boussinesq-like models, in the scope of studying surf-zone hydrodynamics

Résumé :

Nous proposons ici d’évoquer la méthodologie numérique développée pour le modèle de type Volumes-Finis SURF_WB introduit récemment dans (10), reposant sur un schéma de type “équilibre” pour les équations de Saint-Venant avec terme source. Une extension vers un schéma “équilibre” d’ordre élevé permettant de gérer les phénomènes de recouvrement/découvrement est ensuite introduite, suivie de validations numériques adaptées. Enfin, les possibilités d’extension vers une méthode hybride de type Volume-Fini/Différence-Finie pour équations de type Boussinesq sont évoquées, en vue de l’étude de la dynamique instationnaire en zone de surf.

Mots-clefs :

équations de Saint-Venant, schéma équilibre, effets dispersifs

1 Introduction

Plusieurs études ont mis en évidence la capacité des équations de Saint-Venant (SV) 1D à décrire avec précision les transformations non-linéaires des vagues dans les zones de surf et de swash. Citons par exemple les travaux de Hibbert et Peregrine (7) ou encore Kobayashi et col. (8). En particulier, les équations de Saint-Venant permettent une description précise de la dissipation d’énergie au travers des fronts d’onde dans la zone de surf (voir Bonneton, (2)). En outre, les travaux récents de Brocchini et col. (3) et Peregrine et col. (14) ont montré que la simulation numérique SV de la propagation de fronts d’onde dans la zone de surf était un sujet réellement délicat. En effet, la variabilité de la dissipation d’énergie au travers d’un front 2D, dans la direction perpendiculaire à sa propagation, conduit à la génération de larges structures de vorticités d’axes verticaux, se propageant vers la ligne d’eau, et cela même en l’absence de viscosité. Les premières tentatives de simulations proposées par Brocchini et col.(3) ont montré quelques limitations. En particulier, la nécessité d’obtenir une précision plus importante que celle fournie par les schémas classiques d’ordre 2 à pas fractionnaires est apparue. Plus précisément, un traitement numérique efficace du terme de topographie nécessite l’utilisation d’un schéma de type “équilibre” permettant de s’affranchir des oscillations non-physiques observées par Brocchini et col. (3) et de calculer avec une grande précision les interactions entre les ondes

incidentes et les fortes variations du fond. Enfin, l'expérience tend à justifier la nécessité d'introduire un schéma d'une précision élevée, typiquement d'ordre 3 ou 4, afin de simuler l'évolution temporelle des macro-structures de vorticité.

Dans cette optique, Marche et col. (10) ont introduit récemment un modèle de type Volumes-Finis (VF) pour les équations de Saint-Venant, nommé *SURF-WB*, dédié à la simulation de la propagation et du run-up d'ondes longues sur des topographies 2D complexes. Contrairement aux modèles VF classiques reposant sur un "splitting" pour gérer le terme de topographie, ce nouveau modèle a la particularité d' être construit selon une approche de type " quilibre" menant à une discrétisation globale du système complet, levant ainsi les limitations des précédents modèles. Cette approche a également mené à un traitement efficace des phénomènes de découvrement/recouvrement, en utilisant un solveur de Riemann adapté (12), qui préserve la positivité de la hauteur d'eau, autorisant un calcul précis des oscillations de la ligne d'eau. Enfin, une reconstruction de type MUSCL-TVD adaptée a permis d'obtenir un schéma d'ordre 2 peu dissipatif, efficace pour l'étude de la propagation des fronts d'onde.

Partant de ce modèle, nous proposons ici d'améliorer la précision du schéma numérique, tout en préservant les propriétés de type well-balanced et de préservation de la positivité. Un schéma robuste, formellement d'ordre 4 en espace et 3 en temps, est ainsi obtenu. En réalité, une telle précision est obtenue pour les parties régulières des solutions étudiées, tandis qu'une perte classique de précision est observable pour les solutions non-régulières ou faisant intervenir des zones sèches. Des validations numériques simples sont proposées.

Dans une dernière partie, nous abordons l'extension de ces méthodes à un modèle de type Boussinesq. En effet, une importante limitation des équations SV est certainement l'absence d'effets dispersifs dans l'ensemble des processus modélisés, limitant considérablement leur domaine de validité. La prise en compte de ces effets dispersifs est pourtant fondamentale pour l'étude de la propagation des vagues dans la zone de levée. Ainsi, une approche hybride de type Volume-Fini/Différence-Finie est proposée pour le modèle introduit par Madsen et Sorensen (9), qui présente la particularité de dégénérer vers les équations classiques de Saint-Venant lorsque les effets dispersifs sont négligés. Des résultats numériques préliminaires seront exhibés lors de la conférence.

2 Le modèle numérique

On s'intéresse ici au modèle de Saint-Venant 1D avec terme de topographie :

$$\mathbf{U}_{,t} + F(\mathbf{U})_{,x} = S(\mathbf{U}), \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, \quad S(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh d_x \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Nous rappelons brièvement la méthode numérique de type " quilibre" développée dans Marche et col. (12). La discrétisation Volumes-Finis de ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\mathbf{U}_i^*(t) - \mathbf{U}_i^n(t)}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n,+} \right) = \mathbf{S}_{c,i}^n, \quad (3)$$

avec les flux numériques au travers des interfaces entre chaque cellule :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n + \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}-}^n, \quad \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n + \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}+}^n, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = F(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}-}^n, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}+}^n)). \quad (5)$$

La valeur de la solution $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}-}, \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}+})$ à l'interface entre les cellules i et $i+1$ est obtenue à l'aide d'un schéma linéarisé de type VFRoe (voir Gallouet et col.(5) et Marche et Berthon (12)). Ce schéma repose sur un changement de variable et un décentrement adapté permettant de justifier la préservation de la positivité de la hauteur d'eau. Le point clé ici est de calculer cette solution à l'interface à partir des valeurs $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}-}$ et $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}+}$ issues d'étapes préalables de reconstruction linéaire d'une part et reconstruction "hydrostatique" d'autre part. Plus précisément, considérant la cellule i , on évalue tout d'abord des valeurs reconstruites linéairement selon le formalisme MUSCL-TVD, $\mathbf{U}_{i,r}$ et $\mathbf{U}_{i,l}$, respectivement aux interfaces $i+\frac{1}{2}-$ et $i-\frac{1}{2}+$. Les valeurs $H_{i,l}$ et $H_{i,r}$, où $H = h + d$, sont aussi reconstruites et nous en déduisons les reconstructions $d_{i,l}$ et $d_{i,r}$. La quantité $d_{i+\frac{1}{2},j}$ est alors introduite, avec $d_{i+\frac{1}{2}} = \max(d_{i,r}, d_{i+1,l})$.

La reconstruction hydrostatique (1) est alors effectuée ainsi :

$$h_{i+\frac{1}{2}-} = \max(0, h_{i,r} + d_{i,r} - d_{i+\frac{1}{2}}), \quad h_{i+\frac{1}{2}+} = \max(0, h_{i+1,l} + d_{i+1,l} - d_{i+\frac{1}{2}}), \quad (6)$$

et les nouvelles valeurs des quantités conservatives de part et d'autre de l'interface sont données par :

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}-} = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}-} \\ h_{i+\frac{1}{2}-} u_{i,r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}+} = \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}+} \\ h_{i+\frac{1}{2}+} u_{i+1,l} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Finalement, on introduit la discrétisation suivante pour le terme source :

$$\mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}-}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{i+\frac{1}{2}-}^2 - \frac{g}{2} h_{i,r}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{i-\frac{1}{2}+} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{i,l}^2 - \frac{g}{2} h_{i-\frac{1}{2}+}^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

complétée par une discrétisation centrée permettant de préserver la consistance du schéma et d'atteindre des propriétés well-balanced avec une précision d'ordre 2 (12) :

$$\mathbf{S}_{c,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_{i,l} + h_{i,r}}{2} (d_{i,l} - d_{i,r}) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

2.1 Reconstruction d'ordre élevé

La plupart des ingrédients utilisés ici ont déjà été introduits dans la littérature. On trouve plusieurs méthodes pour atteindre une précision élevée, avec en particulier les approches de type MUSCL-TVD (16) ou les reconstructions polynomiales well-balanced de type ENO/WENO (17). La principale limitation de ces méthodes concerne la non préservation de la positivité de la hauteur d'eau, propriété fondamentale pour la gestion du découvremet/recouvremet. Dans cette optique, une procédure très simple, introduite dans (12), permet de construire des schémas well-balanced d'ordre élevé avec l'assurance de préserver la positivité, sous réserve de disposer d'un schéma à l'ordre 1 bénéficiant de cette propriété.

Considérant des valeurs reconstruites à l'ordre choisi par la méthode souhaitée, nommée comme dans la section précédente $\mathbf{U}_{i,r}$ et $\mathbf{U}_{i,l}$ respectivement aux interfaces $i+\frac{1}{2}-$ et $i-\frac{1}{2}+$, la procédure suivante permet de s'assurer de la positivité des états reconstruits. L'approche complète n'est pas développée ici, nous indiquons uniquement la procédure de sur-limitation des variables reconstruites utilisée (voir Marche et Berthon (12)). On introduit les notations suivantes :

$$h_{i,l}^n = h_i^n + \Delta^-, \quad h_{i,r}^n = h_i^n + \Delta^+ \quad (10)$$

où Δ^- et Δ^+ sont les *incrément*s de reconstruction, issus de la méthode de reconstruction choisie. Nous proposons la limitation de variable suivante :

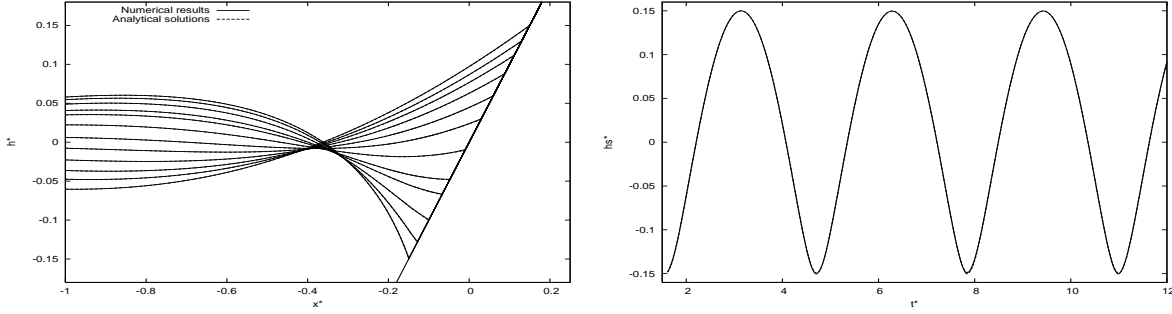


FIG. 1 – Solution périodique de Carrier et Greenspan. Comparaison entre résultats numériques (traits pleins) et analytiques (pointillés). A gauche : profils adimensionnés de la surface libre h^*/e à plusieurs instants durant une demi-période. A droite : évolution de la ligne d'eau en fonction du temps.

1. Si $\Delta^- + \Delta^+ > h_i^n$ on introduit :

$$\Delta^{-,lim} = h_i^n / (1 + \Delta^+ / \Delta^-), \quad \Delta^{+,lim} = h_i^n - h_i^n / (1 + \Delta^+ / \Delta^-)$$

2. Si $\Delta^- + \Delta^+ < h_i^n$, 2 cas sont à considérer :

- Si $\Delta^- < -h_i^n$ et $\Delta^+ \geq \Delta^+$ alors

$$\Delta^{-,lim} = -h_i^n, \quad \Delta^{+,lim} = -h_i^n (\Delta^+ / \Delta^-)$$

- Si $\Delta^+ < -h_i^n$ et $\Delta^+ \leq \Delta^+$ alors

$$\Delta^{-,lim} = -h_i^n (\Delta^- / \Delta^+), \quad \Delta^{+,lim} = -h_i^n$$

Si les incréments ne vérifient aucune de ces conditions, alors les états reconstruits restent naturellement positifs et aucune sur-limitation n'est nécessaire. Après cette étape, les quantités reconstruites sont définies selon l'équation (10), en utilisant les nouveaux incréments $\Delta^{-,lim}$ et $\Delta^{+,lim}$.

La dernière étape consiste à introduire une loi de quadrature adéquate pour la discrétisation du terme de topographie. Cette quadrature doit préserver l'aspect "équilibre" du schéma, c'est à dire préserver les états stationnaires au repos. Pour un schéma d'ordre 4, nous utilisons la discrétisation suivante, proposée par Noelle et col.(13) :

$$S_{c,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2g((h_{i,l}^n + h_{i,c}^n)(d_{i,l} - d_{i,c}) + (h_{i,c}^n + h_{i,r}^n)(d_{i,c} - d_{i,r}) - (h_{i,l}^n + h_{i,r}^n)(d_{i,l} - d_{i,r}))/3 \end{pmatrix}.$$

2.2 Validation numérique

Nous proposons à titre de validation une comparaison entre résultats numériques et la solution analytique obtenue par Carrier et Greenspan (4). Cette solution (Fig.1) décrit l'évolution périodique de la ligne d'eau correspondant aux oscillations d'une onde stationnaire sur une plage de pente constante. Cette solution illustre l'aptitude du modèle à calculer les phénomènes oscillants de recouvrement/découvrement.

La solution analytique obtenue à $t = 0$ est utilisée comme condition initiale et la condition à la limite à gauche est imposée par l'évolution de la surface libre issue de la solution analytique. Un pas $\Delta x = 0.01$ et une condition $CFL = 0.2$ ont été utilisés. La Fig.1 montre que les oscillations de la ligne d'eau sont calculées de manière très précise, même après plusieurs périodes. Une étude de l'erreur confirme la très bonne précision de ces résultats et les ordres de convergence obtenus sont 2.8 pour le débit et 2.9 pour la hauteur d'eau. La perte de précision vis à

vis du schéma formellement d'ordre 4 est classique et imputable aux reconstructions fortement limitées près des zones sèches. La simulation des phénomènes de macro-vorticité dans la zone de surf, abordée dans (11), est actuellement à l'étude.

3 Extension vers un modèle de type Boussinesq

Nous introduisons dans cette dernière section une approche simple permettant d'étendre les méthodes numériques précédemment développées au cas d'équations dispersives. Nous nous intéressons ici au modèle 1D suivant, introduit par Madsen et Sorensen (9) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(hu)^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2\right) = -gh\frac{\partial d}{\partial x} + \psi_x. \end{cases} \quad (11)$$

avec

$$\psi_x = \left(B + \frac{1}{3}\right)z^2 \left(\frac{\partial^3 hu}{\partial x^2 \partial t}\right) + Bgz^3 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right) - z \frac{\partial d}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 hu}{\partial x \partial t} + 2Bgz \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)$$

où η représente les variations de la surface libre vis à vis du niveau moyen défini par z (*i.e.* $\eta = h + d - z$). Remarquons que lorsque $\psi_x = 0$, nous retrouvons le modèle classique de Saint-Venant. L'idée développée ici est d'introduire une discrétisation Différence-Finie pour ψ_x tout en conservant l'approche VF développée pour la partie hyperbolique, en s'inspirant des travaux de Soraes-Frazae et Zech (15) :

$$\begin{aligned} (hu)_i^{n+1} &= (hu)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*\right) + \mathbf{S}_{c,i} + \left(B + \frac{1}{3}\right)z_i^2 \left(\left(\frac{\partial^2 hu}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial^2 hu}{\partial x^2}\right)_i^n\right) \\ &+ \frac{z_i}{3} \left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)_i^n \left(\left(\frac{\partial hu}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \left(\frac{\partial hu}{\partial x}\right)_i^n\right) + \Delta t Bgz_i^3 \left(\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)_i^n + 2\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)_i^n \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_i^n\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Notons que cette approche nous permet de négliger simplement les effets dispersifs lorsque l'on s'intéresse uniquement à la zone de surf. Des résultats numériques seront présentés lors de la conférence.

4 Conclusions

Nous avons dans ce papier rappelé brièvement les fondements du modèle numérique introduit récemment dans (10) et permettant de simuler avec précision la propagation et le run-up d'ondes longues 2D sur des topographies variables. Motivés par l'étude numérique de la génération et de l'évolution temporelle des macro-structures de vorticité générées dans la zone de surf, nous avons introduit une méthode permettant d'obtenir un schéma "équilibre" très précis dans les zones régulières des solutions et préservant la positivité de la hauteur d'eau. Une validation sur un cas simple impliquant un phénomène de run-up périodique sur une plage de pente constante a également été présentée. Enfin, une approche permettant d'étendre les outils numériques développés à un modèle de type Boussinesq est présentée, afin d'être en mesure de simuler l'ensemble des processus liés à la propagation de la houle en domaine littoral.

Références

- [1] Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M.O., Klein, R., Perthame, B. 2004 A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J.Sci.Comp.* **25**(6) 2050–2065

- [2] Bonneton, P. 2007 Modelling of periodic wave transformation in the inner surf zone *Ocean Engineering*, in press, available online.
- [3] Brocchini, M., Mancinelli, A., Soldini, L., Bernetti, R. 2002 Structure-generated macrovortices and their evolution in very shallow depths. *Proc. Coastal Eng.* 772–783
- [4] Carrier, G.F., Greenspan, H.P. 1958 Water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mech.* **4** 97–109
- [5] Gallouet, T., Herard, J.M., Seguin, N. 2003 Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers and Fluids* **32** 479–513
- [6] Greenberg, J.M., Leroux, A.Y. 1996 A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J.Numer.Anal.* **33**(1) 1–16.
- [7] Hibberd, S., Peregrine, D.H. 1979 Surf and run-up on a beach : a uniform bore. *J. Fluid. Mech.* **95**(2) 323–345.
- [8] Kobayashi, N., Desilva, G.S., Watson, K.D. 1989 Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes. *J. Geophys. Res.* **94** 951–966.
- [9] Madsen, P.A., Sorensen, O.R. 1992 A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2 *Coastal Engineering* **18** 183–204.
- [10] Marche, F., Bonneton, P., Fabrie, P., Seguin, N. 2007 Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying procedure. *Int. J. Num. Meth. Fluids.* **53** 567–594
- [11] Marche, F., Bonneton, P. A simple and efficient well-balanced scheme for 2D bore propagation and run-up over a sloping beach. *Proc. Int Conf. Coast. Eng. 2006*, in press.
- [12] Marche, F., Berthon, C. A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations : a class of relaxation schemes, preprint, submitted to SIAM J. Sci. Comp.
- [13] Noelle, S., Pankratz, N., Puppo, G., Natvig, J. 2006 Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows *J. Comput. Phys.* **213** 474–499.
- [14] Peregrine, D.H., Patterson, M.D., Bokhove, O. 2000 Large eddies and vorticity in the surf and swash zone. *SASME Book of Abstracts*
- [15] Soares-Frazae, S., Zech, Y. 2001 Undular bores and secondary waves - Experimental and hybrid finite-volume modelling *J. Hydr. Res.* **40**(1) 33–43.
- [16] Yamamoto, S., Daiguji, H. 1993 Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations *Computers Fluids* **22**(2,3) 259–270.
- [17] Xing, Y., Shu, C.W. 2006 High order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms *J. Comp. Phys.* **214**(2) 567–598.