

## Mesure de la précontrainte et du module d'élasticité équivalent d'une micro-poutre par profilométrie à stylet

Thierry Le Van Suu, Stéphane Durand & Jean-Michel Génevaux

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR CNRS 6613  
Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, BP 535, 72017 Le Mans Cedex 9, France  
[thierry.levansuu@univ-lemans.fr](mailto:thierry.levansuu@univ-lemans.fr)

### Résumé :

*Les microstructures mécaniques issues des microtechnologies sont le plus souvent précontraintes, du fait des techniques de fabrication utilisées, ce qui influe fortement sur leur comportement.*

*Une méthode originale de mesure de contrainte, effectuée à l'aide d'un simple profilomètre à stylet, est appliquée ici à une micro-poutre précontrainte encadrée aux deux extrémités. L'enregistrement de la flèche de la poutre sous la charge du stylet, au fur et à mesure du déplacement de ce dernier, permet, par résolution d'un problème inverse fortement non linéaire, de remonter aux valeurs de la précontrainte de la poutre et de son module d'élasticité équivalent. L'erreur intrinsèque à la résolution du problème inverse, évaluée par une méthode de Monte-Carlo, est inférieure à quelques pour-cents des valeurs calculées pour un module d'élasticité équivalent et une précontrainte donnés. L'application à une maquette à échelle décimétrique a confirmé cette validation.*

### Abstract :

*MEMS structures often show residual stress, due to process steps such as thin layer growth or deposit, which has a dramatic effect on their mechanical behaviour. An original stress measurement method is proposed: a load-controlled stylus profiler records the deflection of a clamped-clamped microbeam under the stylus load, along the stylus path. Based on analytical analysis, a highly nonlinear reverse computation method is then applied to the recorded data in order to figure out both in-plane residual stress and elastic modulus. A Monte-Carlo method shows that the measurement uncertainty inherent to this latter method is less than some percent of the computed residual stress and elastic modulus. This is validated by experimental results obtained with a decimeter-scale clamped-clamped beam.*

### Mots-clefs :

**modélisation, non-linéaire, flexion**

## 1 Introduction

Les contraintes résiduelles présentes dans les microstructures à l'issue des étapes de fabrication affectent leurs propriétés mécaniques (voire électroniques) et influent fortement sur le comportement de la structure. Par exemple, les techniques de dépôt de couches minces inhérentes à la fabrication des microsystèmes induisent le plus souvent des contraintes résiduelles liées aux mécanismes de croissance des couches et à une différence de coefficients de dilatation entre les couches déposées et le substrat. Leur présence modifie également le module d'élasticité apparent du substrat revêtu.

Les propriétés mécaniques d'un microsystème sont souvent mesurées par le biais de microstructures de tests intégrées au processus de fabrication. La mesure de la fréquence de résonance des microstructures de test [Petersen (1979), Yu *et al.* (2005), Baek *et al.* (2005)] ou l'analyse de leurs profils sous différents types de chargement sont souvent utilisées de façon complémentaire afin de déterminer les propriétés mécaniques de manière précise et non destructive [Cardi-

nale *et al.* (1996), Sergent *et al.* (1997), Hopcroft (2002), Kumar *et al.* (2003), Laconte *et al.* (2004), Zhang (2005)].

L'étude de la flèche au centre d'une micro-poutre encastrée à ses deux extrémités pour un chargement réparti [Zhou *et al.* (2006)] et pour un chargement au centre [Zhang *et al.* (2000)] permet de déterminer plus précisément l'un des paramètres, connaissant l'autre a priori, par un ajustement des courbes théorique et expérimentale.

L'objectif est ici de déterminer conjointement contrainte résiduelle et module d'élasticité apparent, par comparaison à un modèle en grands déplacements de mesures de flèche en plusieurs points de la structure, car une mesure en un seul point est insuffisante. La structure choisie est une micro-poutre précontrainte, encastrée à ses deux extrémités et soumise à un effort de flexion. Les hypothèses de petites déformations, de petites rotations et de grands déplacements [Timoshenko (1968), Nash (1974)] sont retenues. Cette technique s'inspire d'autres méthodes où le stylet d'un profilomètre est utilisé à la fois comme moyen de chargement et moyen de mesure [Hopcroft (2002), Kumar *et al.* (2003), Zhang (2005)].

Après avoir présenté un modèle théorique du comportement mécanique de la structure, les propriétés de la fonction qui décrit la flèche au point d'application de l'effort transverse sont étudiées. La méthode de résolution du problème inverse qui permet de calculer les valeurs de la contrainte résiduelle et du module d'élasticité apparent est alors décrite et les incertitudes de mesure qui lui sont imputables, calculées à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo. Enfin, une étude expérimentale sur des poutres à échelle décimétrique valide la méthode.

## 2 Modélisation

### 2.1 Conditions aux limites

La poutre, de section  $S$ , est encastrée à son extrémité  $A$  et en liaison glissière d'axe  $\vec{x}$  à son autre extrémité  $B$  (Fig 1a). Un effort  $\sigma_0 S \vec{x}$  est appliqué en  $B$  pour simuler la précontrainte. Un effort transverse  $F$  est appliqué en un point d'abscisse  $a$  de la poutre pour évaluer l'effet de l'effort de traction  $\sigma_0 S$  sur sa déformée en flexion. Le torseur de liaison au point  $A$  aura comme résultante  $R_{ax} \vec{x} + R_{ay} \vec{y}$  et comme moment  $M_a \vec{z}$  dans le repère global  $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

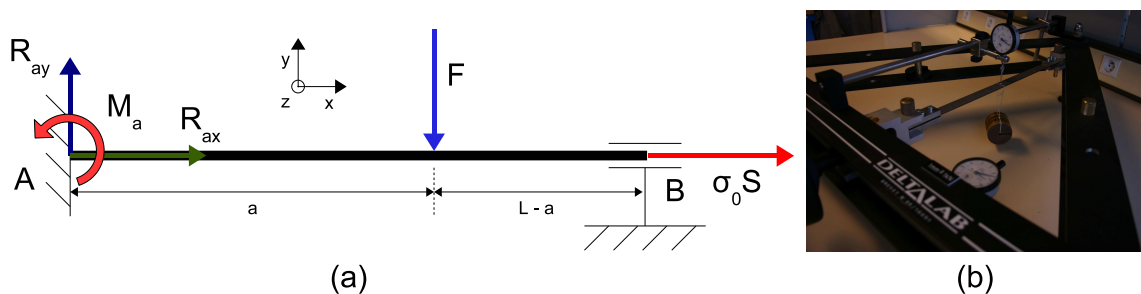


FIG. 1 – Poutre Encastrée-Glissière.

### 2.2 Expression de la flèche $y(a)$ , au point d'application de la force transverse $F$

Les hypothèses de petites déformations, de petites rotations, de grands déplacements transverses et de petits déplacements longitudinaux permettent de calculer la déformée de la poutre. En écrivant localement l'équation de la fibre moyenne de la poutre par la méthode de double

intégration [Nash (1974)] pour  $\sigma_0 \neq 0$ ,

$$EI\partial_{xx}^2 y = - \{ M_a \langle x \rangle^0 + R_{ay} \langle x \rangle^1 - F \langle x - a \rangle^1 + R_{ax} y \}, \quad (1)$$

où  $y$  désigne la fonction de déplacement transverse de la poutre et  $\langle x - a \rangle$  la fonction définie par

$$\langle x - a \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ x - a & \text{pour } x > a \end{cases}. \quad (2)$$

La fonction  $y$ , solution de l'équation (1), s'écrit alors comme une fonction raccordée de deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$ , définies respectivement en amont et en aval du point d'application de la force transverse  $F$ , qui mettent en évidence un nombre caractéristique  $p$  tel que  $p^2 = (\sigma_0 S)/(EI)$ ,

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = A_1 \cosh(px) + B_1 \sinh(px) + \frac{1}{(\sigma_0 S)}(M_a - R_{ay}x) & \text{pour } x < a \\ y_2(x) = A_2 \cosh(px) + B_2 \sinh(px) + \frac{1}{(\sigma_0 S)}(M_a - R_{ay}x + F(x - a)) & \text{pour } x > a \end{cases}. \quad (3)$$

Les constantes  $A_1, A_2, B_1, B_2, R_{ay}$  et  $M_a$  sont calculées en considérant que les déplacements transverses ainsi que les pentes sont nuls aux extrémités et que les deux fonctions se raccordent à l'abscisse  $a$ ,

$$y_1(0) = 0, y_2(L) = 0, \partial_x y_1(0) = 0, \partial_x y_2(L) = 0, y_1(a) = y_2(a), \partial_x y_1(a) = \partial_x y_2(a). \quad (4)$$

La substitution des expressions de  $y_1$  et  $y_2$  du système (3) dans les conditions aux limites (4), donne un système de six équations à six inconnues dont la résolution permet d'obtenir l'expression analytique de la déformée  $y$ . La flèche à l'abscisse  $a$  du point d'application de la force transverse  $F$  est

$$y_1(a) = -\frac{F}{p(\sigma_0 S)} \frac{1}{pL \sinh(pL) - 2 \cosh(pL) + 2} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(pa) - 1 \\ \sinh(pa) - pa \end{pmatrix}^T \cdot Q_0 \cdot \begin{pmatrix} -(L - a)p \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

avec

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 - \cosh(pL) & \sinh(pL) - pL & \sinh(p(L - a)) - pL \cosh(p(L - a)) + \sinh(pa) \\ \sinh(pL) & 1 - \cosh(pL) & \cosh(p(L - a)) - \cosh(pa) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Dans le cas où la contrainte est nulle ( $\sigma_0 = 0$ ), le couplage entre le déplacement vertical et les forces longitudinales, pris en compte par le biais du terme  $R_{ax}y$  de l'équation (1), n'existe plus et la flèche  $y_{\sigma_0=0}(a) = -(Fa^3(L - a)^3)/(3EIL^3)$  permet de prolonger par continuité la fonction  $y_1$  en  $\sigma_0 = 0$ .

### 3 Méthode de résolution du problème inverse.

La résolution du problème inverse consiste à calculer des estimations  $E_p$  et  $\sigma_p$  du module d'Young vrai  $E_v$  et de la précontrainte vraie  $\sigma_v$ . À l'abscisse  $a$  du point d'application de l'effort  $F$ , la flèche de la poutre est décrite par la fonction  $\mathcal{Y}(a, E, \sigma_0)$ . Tous les autres paramètres géométriques sont supposés connus.

#### 3.1 Observations dans le plan ( $E, \sigma_0$ )

La mesure de la flèche au centre de la poutre en flexion ne suffit pas pour déterminer conjointement les valeurs vraies  $E_v$  et  $\sigma_v$ . En effet, si la flèche  $\tilde{w}_{a_i}$  est mesurée à l'abscisse  $a_i$ , il n'y

a pas unicité du couple de solution  $(E, \sigma_0)$  de l'équation  $\mathcal{Y}(a_i, E, \sigma_0) = \tilde{w}_{a_i}$ , car l'équation (5) montre qu'il existe une isovaleur  $\mathcal{I}(\tilde{w}_{a_i})$  strictement décroissante dans le plan  $(E, \sigma_0)$  qui correspond à  $\tilde{w}_{a_i}$  (Fig 2).

Par contre, une méthode basée sur la recherche des intersections des isovaleurs liées aux flèches mesurées pour au moins deux abscisses différentes permet d'identifier les paramètres recherchés : pour des flèches  $\tilde{w}_{a_1}$  et  $\tilde{w}_{a_2}$  mesurées pour des abscisses de chargements  $a_1$  et  $a_2$ , l'intersection des deux courbes isovaleurs  $\mathcal{I}(\tilde{w}_{a_1})$  et  $\mathcal{I}(\tilde{w}_{a_2})$  est non nulle et contient nécessairement le point des paramètres recherchés. De plus, on montre que les courbes isovaleurs  $\mathcal{I}(w_{a_i})$  peuvent être approximées par droites  $\mathcal{D}(w_{a_i}) : E = \mathcal{P}(a_i) \cdot \sigma_0 + c(a_i)$  avec  $\mathcal{P}(a_i, E, \sigma_0) = \partial_{\sigma_0} \mathcal{Y}(a_i, E, \sigma_0) / \partial_E \mathcal{Y}(a_i, E, \sigma_0)$ .

### 3.2 Prise en compte des incertitudes de mesure

La position d'une isovaleur  $\mathcal{I}(\tilde{w}_{a_i})$  dans le plan  $(E, \sigma_0)$  est très sensible à la valeur de la flèche mesurée  $\tilde{w}_{a_i}$ . Dans des conditions expérimentales, les incertitudes de mesure sur les flèches  $\tilde{w}_{a_i}$ , introduites par l'outil de mesure et par l'état de surface des matériaux définissent donc une zone d'intersection pour les isovaleurs  $\mathcal{I}(\tilde{w}_{a_i})$  respectives (fig 2).

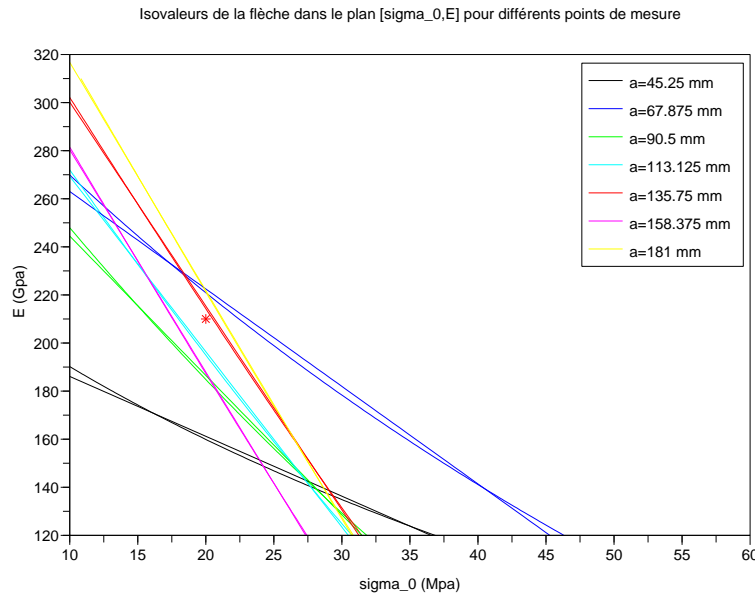


FIG. 2 – Courbes isovaleurs et leurs régressions linéaires respectives pour différents points d'application de la force  $F$  avec prise en compte des incertitudes de mesure.

En raisonnant sur un ensemble de droites  $\mathcal{D}(w_{a_i})$ , le point  $P$  de coordonnées  $(E_P, \sigma_P)$  qui minimise la somme des distances au carré du point  $P$  aux droites :  $\epsilon = \sum_i d^2(P, \mathcal{D}(w_{a_i}))$ . Ceci définit un critère d'optimisation qui s'écrit

$$\epsilon = \begin{pmatrix} E_P \\ \sigma_P \\ 1 \end{pmatrix}^T \sum_i \frac{1}{1 + \mathcal{P}^2(a_i)} \begin{pmatrix} \mathcal{P}^2(a_i) & -\mathcal{P}(a_i) & \mathcal{P}(a_i)c(a_i) \\ -\mathcal{P}(a_i) & 1 & -c(a_i) \\ \mathcal{P}(a_i)c(a_i) & -c(a_i) & c^2(a_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_P \\ \sigma_P \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Ce critère de distance  $\epsilon$  présente l'intérêt de lier implicitement l'incertitude de mesure sur la flèche et l'incertitude sur la détermination des paramètres  $E_v$  et  $\sigma_v$ .

### 3.3 Exploitation du critère de minimisation $\epsilon$ par une méthode de Monte-Carlo

Le critère de minimisation  $\epsilon$  défini dans l'équation (7) est utilisé conjointement avec la méthode de Monte-Carlo afin d'estimer l'incertitude de mesure de façon indirecte [Gonzalez *et al.* (2005)]. En effet, on ne peut pas déterminer de façon explicite l'équation des isovaleurs dans le plan  $(E, \sigma_0)$  et donc déterminer analytiquement le point d'intersection des isovaleurs qui correspondent aux valeurs de flèches pour différentes abscisses du point d'application de la force sonde  $F$ .

Les paramètres choisis pour la simulation sont  $b = 2.0$  cm,  $h = 2.0$  mm,  $E_v = 213.76$  GPa,  $F = 4.905$  N,  $L = 36.2$  mm et  $\sigma_v = 19.39$  MPa. La dispersion des mesures autour de la valeur vraie suit une loi uniforme d'une largeur fixée à  $7.5 \mu\text{m}$  afin de modéliser l'incertitude introduite par un comparateur mécanique. L'algorithme converge vers les valeurs estimées  $\sigma_P = 19.44$  MPa et  $E_P = 212.82$  GPa. Les biais générés par la méthode restent faibles : 0.3% sur  $\sigma_0$  et de 0.43% sur  $E$ . Ceux-ci sont sans doute imputables à l'hypothèse simplificatrice selon laquelle les isovaleurs sont assimilables des droites parallèles. En réalisant d'autres tirages pour d'autres valeurs de paramètres contrôlés, il est possible de voir que l'erreur de justesse est modifiée. L'incertitude sur la détermination de  $E_v$  et  $\sigma_v$  dépend donc du point observé. Cependant, dans la partie du plan  $(E, \sigma_0)$  qui nous intéresse, l'incertitude sur la détermination de  $E_v$  et de  $\sigma_v$  reste du même ordre de grandeur, de l'ordre de 4% pour  $\sigma_0$  et 1% GPa pour  $E$  pour cette structure.

## 4 Expérimentation sur des poutres de grandes dimensions

Dans un premier temps, la validité de la méthode est vérifiée à une échelle décimétrique. Différentes éprouvettes et matériaux ont été sollicités à l'aide d'un banc de mesure Delta-Lab EX150 (Fig 1b). Les valeurs estimées de module d'élasticité et de contrainte par la méthode décrite ici, sont proches des valeurs théoriques (tableau 1), malgré une incertitude importante sur la mesure de la flèche ( $20 \mu\text{m}$  pour des flèches comprises entre  $150 \mu\text{m}$  et 2 mm). Le module d'élasticité de référence du matériau  $E_{ref}$  est déterminé expérimentalement en l'absence de précontrainte en sollicitant les mêmes poutres par une force transverse  $F$  à l'abscisse  $l$  dans une configuration encastree-libre :  $E_{ref} = (2Fl^2)(3L - l)/(bh^3y(l))$ .

Matériau	E (Gpa)	$E_{ref}$ (GPa)	$E_P$ (GPa)	$\sigma_0$ (MPa)	$\sigma_P$ (MPa)	b (mm)
Acier	210	$210 \pm 7$	262.0	50.0	45.4	10
	210	$220 \pm 10$	231.2	16.7	15.0	15
Aluminium	69	$61 \pm 4$	80.3	25.0	22.5	10
	69	$63 \pm 2$	73.5	16.7	16.0	15
	69	$62 \pm 2.5$	84.2	12.5	10.0	20

TAB. 1 – Résultats mesurés et résultats calculés.

## 5 Conclusion

Le module d'élasticité apparent et la précontrainte d'une poutre encastree à ses deux extrémités peuvent être estimés simultanément à partir de la mesure de son profil sous charge et d'un modèle de flexion en grands déplacements. Lorsque les incertitudes de mesure restent faibles devant les flèches à mesurer, une méthode de Monte-Carlo montre que la précision des estimations est meilleure que quelques pourcents. Les résultats théoriques et expérimentaux concordent pour les poutres testées. L'application au cas de micro-poutres reste à mettre en

œuvre. L'extension de la méthode à la mesure de contraintes résiduelles dans les plaques et les membranes est envisagée.

## Références

- K. E. Petersen and C. R. Guarnieri. Young's modulus measurements of thin films using micro-mechanics. *J. Appl. Phys.*, **50**(11), 6761–6766 (1979).
- C. Yu, C. Hsu, and W. Fang. Comments on determining the elastic modulus of a thin film using the micromachined free free beam. *J. Micromech. and Microeng.*, **15**, 351–357 (2005).
- C.-W. Baek, Y.-K. Kim, Y. Ahn, and Y.-H. Kim. Measurement of the mechanical properties of electroplated gold thin films using micromachined beam structures. *Sens. Actuators A*, **117**, 17–27 (2005).
- G.F. Cardinale, D.G. Howitt, W.M. Cliff, K.F. McCarty, D.L. Medlin, P.B. Mirkarimi, and N.R. Moody. Micromachined silicon cantilever beams for thin-film stress measurement. *Thin Solid Films*, **287**, 214–219 (1996).
- A. Sergent, L. Robert, P. Delobelle, and L. Bonnier. Caractérisation mécanique de micro-poutres par l'essai de flexion associée à une technique d'imagerie. *J. Phys. III*, **7**, 2107–2129 (1997).
- M. A. Hopcroft. *MAT-Test: A New Method for Thin-Film Materials Characterization*. Master of philosophy by research, Cambridge University Engineering Department (2002).
- K. R. Virwani, A. P. Malshe, W. F. Schmidt, and D. K. Sood. Young's modulus measurements of silicon nanostructures using a scanning probe system: a non-destructive evaluation approach. *Smart Mater. Struct.*, **12**, 1028–1032 (2003).
- J. Laconte, F. Iker, S. Jorez, N. Andre, J. Proost, T. Pardoën, D. Flandre, and J.-P. Raskin. Thin films stress extraction using micromachined structures and wafer curvature measurements. *Microelect. Eng.*, **76**, 219–226 (2004).
- T.-Y. Zhang, X. Wang, and B. Huang. Microbridge testing of thin films. *Mater. Sci. Eng. A*, **409**, 329–339 (2005).
- Z.M. Zhou, Y. Zhou, C.S. Yang, J.A. Chen, W. Ding, and G.F. Ding. The evaluation of young's modulus and residual stress of copper films by microbridge testing. *Sens. Actuators A*, **127**, 392–397 (2006).
- T.-Y. Zhang, Y.-J. Su, C.-F. Qian, M.-H. Zhao, and L.-Q. Chen. Microbridge testing of silicon nitride thin films deposited on silicon wafers. *Acta mater.*, **48**, 2843–2857 (2000).
- S. Timoshenko. *Résistance des matériaux : Théorie développée et problèmes*. DUNOD (1968).
- W. A. Nash. *Résistance des matériaux*. Number ISBN 2-7042-1288-0 in Schaum. Mc GRAW-HILL (1974).
- M. A. Herrador, A. G. Asuero, A. G. Gonzalez. Estimation of the uncertainty of indirect measurements from the propagation of distributions by using the Monte-Carlo method : An overview. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **79**, 115–122 (2005).