

## Prédiction de la résistance micromécanique des composites à matrices polymères

SEREIR Zouaoui\*, KHIAT Mohamed lamine\*\*

\* Département de Génie maritime, Faculté de Génie mécanique

BP 1505 El m'naouer, USTO, Oran, Algerier. Email : [serzou@hotmail.com](mailto:serzou@hotmail.com)

\*\* Département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences et des Sciences de l'ingénieur,  
Université de Mostaganem, Email : [amineK@netcourrier.com](mailto:amineK@netcourrier.com)

### Résumé

*Le présent travail décrit un modèle analytique permettant de prévoir la résistance d'un composite unidirectionnel en carbone époxyde en utilisant des techniques micromécaniques. Ce modèle suppose qu'un groupe de fibres cassées est entouré d'un nombre de fibres intactes sous forme d'un arrangement hexagonal. Les développements mathématiques utilisés sont présentés pour justifier la forme de la répartition des contraintes autour de la fibre cassée et des fibres voisines adjacentes. Pour suivre l'évolution de l'endommagement aux régions localement plastifiées, on a procédé à une augmentation progressive de la fraction volumique des fibres et de la charge extérieure de traction. Ceci, nous a permis d'évaluer aussi l'extension de la zone localement plastifiée, de la zone inefficace, de la concentration de contraintes et du déplacement longitudinal des fibres cassées et intactes, en fonction du nombre de fibres cassées et de la longueur de l'échantillon.*

### Abstract:

*This work presents an analytical model to predict the strength of the unidirectional carbon epoxy composite using micromechanical techniques. This model supposes that a group of broken fibres surrounded by a number of intact fibres with hexagonal arrangement. The mathematical developments used are presented to justify the distribution form of the stresses around broken fibre and adjacent intact fibres. To follow the evolution of the damage in regions of debonding and local plasticity; we proceeded to a progressive increase in the fiber volume fraction and tensile external load. This, procedure enable us to evaluate the extension of the region locally plasticized, the ineffective region, the stress concentration and the longitudinal displacement of broken and intact fibres, in function of broken fibres number and specimen length.*

### Mots clés :

**Tubes épais ; Composite stratifié ; Concentration d'humidité.**

### 1 Introduction

Le développement des modèles de résistance d'un composite est devenu de plus en plus complexe au cours des dernières années. Le plus simple de ces modèles est celui qui considère la résistance d'un groupe fibres d'un composite. Ce type de modèle qui ignore la résistance de la résine, tendrait d'offrir une estimation très proche de la résistance du composite avec la prise en considération de la contribution de la matrice, comme jonction entre les fibres endommagées. Il existe d'autres modèles plus complexes qui incluent le comportement de la matrice et la nature statistique de la rupture des fibres. Dans ce cadre, nous pouvons cités les précieux travaux de Rosen (1964), de Hedgepeth et Van Dyke (1967), de Smith et al (1983), de Zhou et Curtin (1995), de Reifsnider et Case (2002), de Sereir (2007) et d'autres. Le présent modèle est inspiré de celui de Gao et de Reifsnider (1993). La résistance varie en fonction, du changement des longueurs inefficaces dans la zone de la rupture de la fibre, et des concentrations de contraintes correspondantes des fibres voisines intactes. La longueur

inefficace est généralement définie comme étant la longueur comprise entre l'endroit de la rupture de la fibre jusqu'à la longueur pour laquelle la fibre regagne sa capacité de supporter le chargement complet. Ce concept est illustré sur la figure 1, où  $\sigma_f$  est la contrainte de la fibre et  $\delta$  est la longueur inefficace. L'approche du modèle consiste à employer la condition de la contrainte de cisaillement à l'interface pour calculer les longueurs inefficaces et la concentration de contraintes autour des fibres cassées d'un composite unidirectionnel.

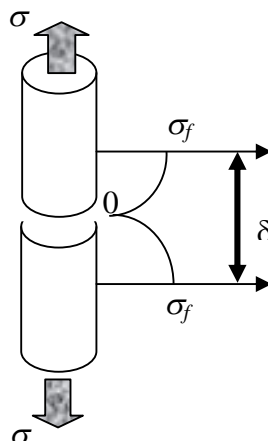


FIG 1– Fibre cassée avec l'extension de la longueur inefficace.

Selon Gao et Reifsnider (1993), les propriétés dues à la traction d'un composite renforcé par des fibres, dépendent de la résistance et des modules d'élasticité de la fibre, de la résistance et stabilité chimique de la matrice et aussi de l'efficacité de l'adhérence à l'interface fiber/matrice au cours du transfert de charge. Cependant, à cause de la difficulté trouvée lors de la détermination des propriétés aux interfaces, la résistance d'adhérence aux interfaces est considérée comme étant liée à la contrainte d'écoulement de la matrice et de l'interface  $\tau_0$ . La fissure à l'interface aura lieu lorsque la contrainte de cisaillement à l'interface atteint  $\tau_0$ . Le présent modèle se distingue des autres modèles semblables par la présence de l'effet du cisaillement et la prise en considération des endommagements locaux sous forme d'un décollement à l'interface et une plasticité. Dans cette région, la contrainte de cisaillement de la matrice et de l'interface est considérée comme constante avec une valeur  $\eta\tau_0$ . Où  $\eta$  est un paramètre de cisaillement définissant la contrainte de cisaillement dans la région inélastique. Lorsque  $\eta$  égale à zéro, aucun transfert de cisaillement a eu lieu entre les fibres cassées et leurs voisins dans cette région. Ce serait donc le cas dans une région, complètement détachée ou d'une matrice fissurée. Contrairement lorsque  $\eta=1$ , la contrainte de cisaillement dans la région inélastique est égal à  $\tau_0$ . Dans l'application de ce modèle dans cette étude, on prend  $\eta=1$ .

## 2 Formulation

D'après la figure 2, le présent modèle suppose qu'il existe un noyau central de  $i$  fibres cassées entourées de fibres intactes exposées à des concentrations de contraintes dues aux fibres cassées. Les fibres intactes sont à leur tour entourées d'un matériau homogène 'efficace' qui se déforme uniformément. On suppose encore que le noyau cassé peut être assimilé à un matériau homogène avec une section transversale circulaire dont le module de Young peut être obtenu par la règle de mélanges :

$$E = \frac{i A_f E_f + \left[ i A_m - \pi (r_0^2 - (r_0 - d)^2) \right] E_m}{\pi (r_0 - d)^2} \quad (1)$$

Où  $A$  correspond à la surface, et  $E$  correspond au module et les propriétés substituées avec  $f$  se rapportent à des propriétés de fibre et les propriétés substituées avec  $m$  se rapportent à des propriétés de la matrice.

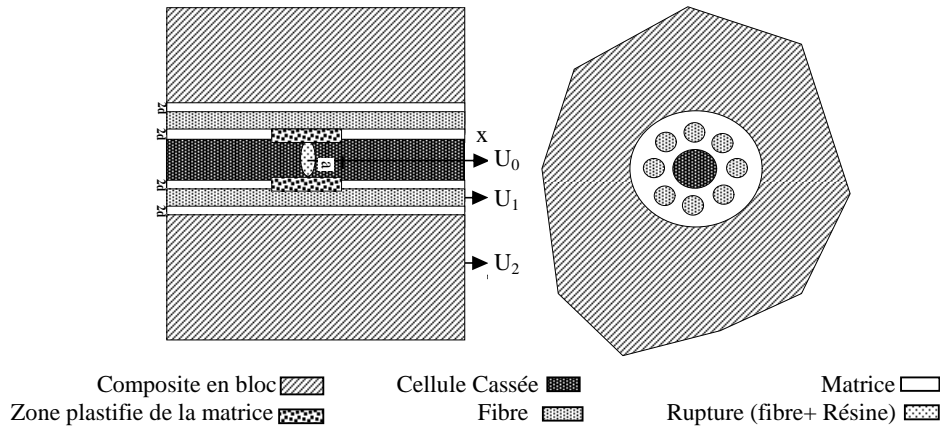


FIG 2– Composite unidirectionnel avec une rupture transversale de la fibre et d'un endommagement local de la matrice et des fibres adjacentes.

Comme il vient d'être cité auparavant, des endommagements locaux sont inclus dans le modèle par l'introduction d'une zone de décollement et de plasticité locale (Figure 2), où la contrainte de cisaillement de la matrice et de l'interface sont considérées comme constant pour la valeur  $\eta\tau_0$ . Les équations d'équilibre dans cette zone ( $0 \leq x \leq a$ ) sont comme suite :

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \frac{\eta\tau_0}{r_0 E_1} x^2 + C_0 \\ U_1(x) &= C_1(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) + \frac{2r_0\eta\tau_0}{(R_2^2 - r_0^2)E\lambda^2}(1 - e^{-\lambda x}) + \frac{\sigma_c}{E_c} x \end{aligned} \quad (2)$$

$(0 \leq x \leq a)$

$\beta$  est donné en fonction des modules de la géométrie, de la fibre et de la matrice. Cependant la distance  $a$ , elle représente la demi longueur de la zone de décollement localement plastifiée. Où  $C_0$  et  $C_1$  sont les constantes d'intégration, et  $E_1$  est le module des fibres adjacentes intactes,  $R_2$  est une quantité géométrique avec  $R_2 = r_0 + 2r_f + d$ , et  $\lambda = \frac{2R_2}{R_2^2 - r_0^2} \frac{G_m}{E} \frac{1}{2d}$ . De même, pour

la région  $a \leq x \leq \infty$  où aucun écoulement n'aura lieu à l'interface, les équations d'équilibre sont

$$\begin{aligned} U_0(x) &= C_3 e^{-\sqrt{\gamma_2} x} + C_4 e^{-\sqrt{\gamma_2} x} + \frac{\sigma_c}{E_c} x \\ U_1(x) &= C_3 \left(1 - \frac{\gamma_1}{\alpha}\right) e^{-\sqrt{\gamma_1} x} + C_4 \left(1 - \frac{\gamma_2}{\alpha}\right) e^{-\sqrt{\gamma_2} x} + \frac{\sigma_c}{E_c} x \end{aligned} \quad (3)$$

$(a \leq x \leq \infty)$

Où  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\alpha$  sont les quantités algébriques connues. Par l'application des conditions aux limites, on peut donc déterminer les constantes  $C_1 - C_4$  ainsi que les déplacements  $U_0(x)$  et  $U_1(x)$ . La longueur délimitant la zone plastique à l'interface  $a$  peut également être trouvée. L'introduction des conditions de continuité des contraintes et des déformations pour le noyau cassé, et les fibres intactes adjacentes à  $x = a$ , permet la détermination des constantes  $C_1 - C_4$  en fonction de  $a$ . La longueur  $a$  peut être elle même trouvée en imposant la condition de continuité de la contrainte de cisaillement à  $x = a$ . Sachant que cette contrainte est considérée comme constante  $\tau_0$  dans la région  $0 \leq x \leq a$  (région de plasticité) par contre en dehors de la région plastique  $a \leq x \leq \infty$ , cette contrainte est donnée par :

$$\tau(x) = (U_0(x) - U_1(x)) \frac{G_m}{2d_1} \quad (4)$$

La continuité de la contrainte de cisaillement est satisfaite à  $x = a$  si:

$$\tau_0 = (U_0(a) - U_1(a)) \frac{G_m}{2d_1} \quad (5)$$

Une fois que la valeur de  $a$  est connue, on peut alors obtenir  $U_0(x)$  et  $U_1(x)$  en termes de quantités connues. Il est à noter que des solutions doivent être trouvées pour chaque nombre de cassures adjacentes possibles, et pour chaque pas de charge considérée. Les concentrations de contraintes  $C_i$  pour  $i$  fibres cassées s'expriment comme suit :

$$C_i = \frac{\left. \frac{dU_1(x)}{dx} \right|_{x=0}}{\sigma/E} \quad (6)$$

## 1 Applications

Pour mettre en valeur l'étude théorique présentée aux paragraphes précédents, des applications sur un échantillon d'une plaque stratifiée en graphique époxyde, sont effectuées. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont regroupées aux tableaux 1 et 2. Caractéristiques mécaniques d'un échantillon en composite (Graphite/époxyde)

Module de Young de la fibre $E_f$	232 GPa
Module de Young de matrice $E_m$	4.4 GPa
Résistance de référence pour la fibre $\sigma_0$	3.17 GPa
Contrainte de cisaillement $\tau_0$	25.88MPa
Coefficient de Poisson de la matrice $\nu_{12m}$	0.43
Fraction Volumique des fibres $V_f$	0.53
Paramètre de cisaillement $\eta$	1.0

Tableau 1 – Caractéristiques mécaniques d'un échantillon en composite Graphite/époxy

Longueur de l'échantillon $L$	152.4 mm
Longueur de référence l'échantillon $L_0$	25 mm
Largeur de l'échantillon $W$	12.7 mm
Epaisseur de l'échantillon $t$	10.16 mm
Rayon de la fibre $r_f$	0035 mm
Nombre maximal de fibres cassées $n_i$	43

Tableau 2–Caractéristiques géométriques d'un échantillon en composite Graphite/époxy

La figure 3 illustre l'évolution de la zone plastique  $a$  de la matrice en fonction du nombre de fibres cassées pour une contrainte extérieure croissante avec un pas de 0.2. Il est évident que la zone localement plastifiée devient plus importante en fonction du nombre de fibres cassées, où elle passe pour une contrainte extérieure  $\sigma = 0.2\sigma_0$  de  $9.4042 \cdot 10^{-3}$  mm d'une fibre cassée à 0.138 mm de quarante fibres cassées. L'augmentation de la contrainte de traction appliquée prévoit aussi une nette augmentation de cette zone qui passe pour  $n_i = 40$  de 0.138 mm pour  $\sigma = 0.2\sigma_0$  à 0.9698 mm pour  $\sigma = \sigma_0$ . D'ici, nous pouvons dire que l'extension de  $a$  dépend essentiellement du nombre de fibres cassées et du chargement appliqué.

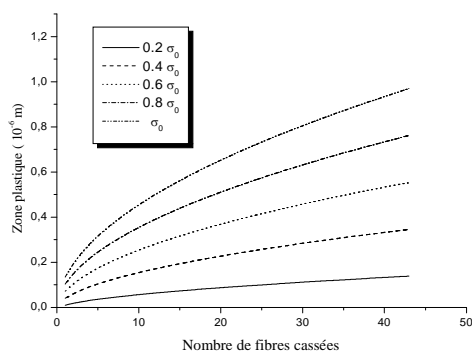


FIG 3 – Zone plastique en fonction du nombre de fibres cassées pour une contrainte extérieure croissante avec un pas de 0.2.

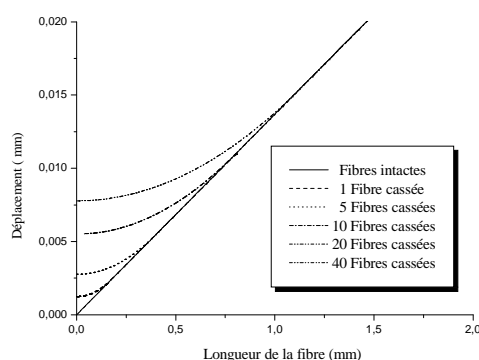


FIG 4 – Déplacement longitudinal pour les fibres cassées et intactes au voisinage de la zone endommagée des fibres.

Afin d'avoir une idée plus générale sur la variation du déplacement en fonction de la longueur de l'échantillon, nous avons présenté la figure 4. Cette figure illustre donc l'évolution du déplacement longitudinal pour les fibres cassées et intactes au voisinage de la zone endommagée des fibres. Selon le nombre de fibres cassées, il est clair qu'au départ (Point de rupture des fibres) les courbes se distinguent l'une de l'autre, par la suite elles épousent la même forme. La relation entre le déplacement longitudinal et la longueur est linéaire, si aucune fibre n'est cassée. Avec l'apparition des cassures, les courbes prennent une forme exponentielle au voisinage de l'endroit de l'endommagement, par la suite elles deviennent linéaires. Ce qui reflète le phénomène de la non linéarité dans la zone endommagée qui est caractérisée par une plasticité locale.

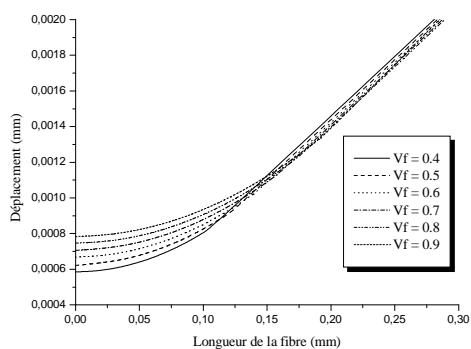


FIG 5 – Evolution du déplacement longitudinal pour cinq fibres cassées en fonction de la fraction volumique des fibres

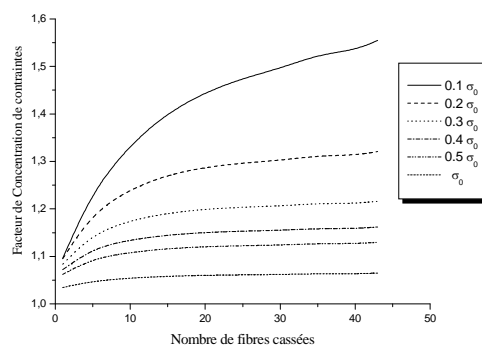


FIG 6 – Facteur de concentration de contraintes en fonction du nombre de fibres cassées pour une contrainte extérieure croissante.

Afin d'étudier l'effet de la fraction volumique des fibres  $V_f$  sur l'évolution du déplacement longitudinal dans la zone endommagée, nous avons présenté la figure 5. Dans cette figure, nous avons varié progressivement la fraction volumique des fibres de 0.4 à 0.9, pour le cas de cinq fibres cassées exposées à une contrainte de traction  $\sigma = 0.5 \sigma_0$ . Deux zones sont clairement distinctives. Dans la première zone ( $0 \leq x \leq a$ ), le comportement de l'ensemble du composite est plastique. La relation entre le chargement appliqué  $\sigma = 0.5 \sigma_0$  et le déplacement longitudinal est non linéaire. L'augmentation de la fraction volumique des fibres a un effet significatif sur la grandeur du déplacement, où ce dernier croît sensiblement. La deuxième zone ( $a \leq x \leq \infty$ ) est caractérisée par une loi de comportement linéaire à cause de l'éloignement de la zone

endommagée. Il est nettement visible que la relation entre le déplacement longitudinal et la charge appliquée est linéaire. La variation L'augmentation  $V_f$  affecte aussi la grandeur du déplacement longitudinal, mais cette fois ci l'augmentation  $V_f$  réduit légèrement le déplacement.

L'estimation de la longueur de la zone localement plastifiée, de la longueur inefficace et du déplacement longitudinal, permet la détermination du facteur de concentration de contraintes. Ce facteur est d'une grande importance parce qu'il nous offre le rapport entre la contrainte déterminée au point de rupture des fibres et la contrainte extérieure appliquée. Ceci nous permettra de déterminer la concentration de la contrainte à l'endroit des fibres cassées, et de prévoir une rupture probable des fibres voisines adjacentes. Dans ce contexte, nous avons présenté la figure 6. Cette figure illustre la variation du facteur de concentration de contraintes en fonction du nombre de fibres cassées pour une contrainte extérieure croissante, à l'endroit de rupture des fibres. On peut clairement voir que ce facteur augmente progressivement en fonction du nombre fibres cassées. Par contre, il décroît en fonction de la contrainte extérieure appliquée. Le facteur de concentration de contraintes maximal est localisé à  $\sigma = 0.1\sigma_0$  pour 43 fibres cassées ( $C_{\max} = 1.554$ ). Tandis que la valeur maximale de ce facteur ( $C_{\min} = 1.034$ ) est obtenue pour une seule fibre cassée sous une contrainte extérieure maximale  $\sigma = \sigma_0$ .

#### 4 Conclusion

Nous pouvons dire que cette méthode analytique offre un moyen très explicite pour suivre l'endommagement progressif d'un composite unidirectionnel. La matrice qui assure la jonction entre les fibres est considérée comme le facteur principal de transmission des contraintes d'une fibre cassée à autre voisine. La zone plastique et la région inefficace deviennent plus larges en fonction du nombre de fibres cassées. Une forte concentration de contraintes est localisée au point de fissures de la fibre. Cette dernière devient moins importante en s'éloignant de la zone plastique. L'augmentation de la fraction volumique des fibres a un effet double, parce qu'elle augmente d'une part le déplacement longitudinal dans la zone plastique ce qui favorise le passage rapide de l'endommagement d'une fibre cassée à une autre, et d'autre part elle réduit ce déplacement dans la zone élastique ce qui nous permettra d'être en conformité avec les lois de la micromécanique.

#### Références

- Gao, Z. and Reifsnider, K. L. 1993 Micromechanics of Tensile Strength in Composite Systems. *Composite Materials: Fatigue and Fracture, Fourth Volume*, ASTM STP 1156, Philadelphia, PA: ASTM, pp. 453-470.
- Hedgepeth, J.M., Van Dyke, P. 1967 Local Stress Concentrations in Imperfect Filamentary Composite Materials," *J. of Composite Materials*, **1**, p.294-309.
- Rosen, B.W. 1964 Tensile Failure of Fibrous Composites. *J. AIAA*, **V.2**, pp.1985-1991.
- Reifsnider, K. L., Case, S. W. 2002 *Damage Tolerance and Durability of Composite Materials*. John Wiley & Sons, Inc., New York, p.p 241.
- Sereir, Z., Boualem, N. 2007 Effect of long term hygrothermal loadings and stacking sequences on the damage of hybrid composites. *Theoretical and applied Fracture Mechanics*, **47**, (2), pp.147-163.
- Smith, R.L., Phoenix, S.L., Greenfield, M.R., Henstenburg, R.B., Pitt, R.E. 1983 Lower-Tail Approximations for the Probability of Failure of Three-Dimensional Fibrous Composites with Hexagonal Geometry. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **388**, pp.353-391.
- Zhou, S.J., Curtin, W.A. 1995 Failure of Fiber Composites: A Lattice Green Function Model. *Acta Metallurgica et Materialia*, **43**,(8), pp.3093-3104.