

## Modélisation de l'effet d'un gaz réel sur le soufflage libre d'une structure viscoélastique

Fouad Erchiqui, Mhamed Souli\* & Ahlem Alia\*

Département des sciences appliquées  
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue  
445, boul. Université, Rouyn-Noranda (Québec)  
Canada J9X 5E4  
[fouad.erchiqui@uqat.ca](mailto:fouad.erchiqui@uqat.ca)

LML, Boulevard Paul Langevin, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Asq Cedex,  
Lille, France

### Résumé :

*Dans cet article nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation par la MEF du comportement viscoélastique, en soufflage libre, d'une membrane thermoplastique mince, isotrope et incompressible. Le modèle de comportement intégral viscoélastique de Lodge est considéré. Pour la phase de soufflage, nous considérons une charge en débit d'air non linéaire et la pression est déduite de l'équation d'état des gaz de van Der Walls. Ensuite, nous avons étudié l'influence de la loi de comportement de Lodge sur la distribution des épaisseurs et des contraintes au sein d'une membrane thermoplastique circulaire pour six différents matériaux.*

### Abstract :

*In this work, we are interested in the modelling and numerical simulation using the DFEM for the viscoelastic behaviour, in free inflation, of a thin, isotropic and incompressible thermoplastic membrane. The viscoelastic behaviour of the Lodge model is considered. The dynamic pressure load is thus deduced from the van Der Walls equation of state. Moreover, the effect of the Lodge model behaviour on the thickness and stress distribution in the circular membrane are analysed for six different materials*

**Mots-clefs :** Viscoélastique, soufflage libre, Lodge, van Der Walls

## 1 Introduction

Pour l'industrie des thermoplastiques, la simulation numérique des procédés de mise en forme (thermoformage, injection étirement-soufflage, etc.) nécessite une bonne connaissance du comportement des matériaux utilisés. Ces matériaux sont des polymères thermoplastiques (HDPE, ABS, PP, PS, etc.) chauffés entre la température de transition vitreuse et la température de fusion pour être ensuite mis en forme.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème numérique de soufflage libre d'une membrane thermoplastique circulaire, isotrope et incompressible en HDPE (Acrylonitrile butadiène styrène) chargé de fibres. Le modèle de comportement viscoélastique de Lodge est considéré Lodge (Lodge, 1964). Pour la modélisation en explicite par MEF, nous considérons une charge non linéaire en débit d'air qui obéit à l'équation d'état de van-Der Waals des gaz réels (Landau *et al*, 1949). Ensuite, nous avons étudié l'influence de la loi de Lodge sur la

distribution des épaisseurs et des contraintes au sein de la feuille thermoplastique circulaire pour six différents matériaux.

## 2 Formulation par éléments finis

Dans la formulation dynamique explicite de la méthode des éléments finis, deux types de discrétisation sont considérées: spatiale et temporelle (Zienkiewicz *et al.*, 1991). Ainsi, après écriture du principe des travaux virtuels sur chaque élément de la structure, introduction des interpolations isoparamétriques des variables cinématiques et sommation sur l'ensemble des éléments formant la structure, le problème dynamique de soufflage est réduit à un système d'équations différentielles de deuxième ordre (Erchiqui *et al.*, 2003):

$$[\mathbf{M}] \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}_{\text{ext.}} + \mathbf{F}_{\text{gra.}} - \mathbf{F}_{\text{int.}} \quad (1)$$

$\mathbf{F}_{\text{ext.}}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{int.}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{gra.}}$  sont respectivement les vecteurs globaux des forces nodales externes, internes et de pesanteur que subit la structure.  $[\mathbf{M}]$  est la matrice masse associée aux forces d'accélération. Si on applique la méthode de diagonalisation Lapidus *et al.* (1982) à la matrice masse  $[\mathbf{M}]$  et on utilise le schéma des différences finies centrées à l'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}$ , on obtient :

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}) = \frac{\Delta\mathbf{t}^2}{\mathbf{M}_i^d} \left( \mathbf{F}_i^{\text{ext.}}(\mathbf{t}) + \mathbf{F}_i^{\text{gra.}}(\mathbf{t}) - \mathbf{F}_i^{\text{int.}}(\mathbf{t}) \right) + 2\mathbf{u}_i(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{t} - \Delta\mathbf{t}) \quad (2)$$

$\Delta\mathbf{t}$  représente le pas de temps et  $\mathbf{u}_i$  est le vecteur position. Au temps initial nous considérons que les vecteurs des déplacements et des vitesses sont nuls :  $\mathbf{u}_i(\mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ .

### 2.1 Critère de stabilité et de convergence

Le schéma des différences centrées considéré dans ce travail est conditionnellement stable. La condition de stabilité peut être obtenue par la détermination de la plus grande valeur propre du système modal équivalent (Dokainish *et al.*, 1989). Toutefois, pour les milieux à fortes non linéarités matérielles, le calcul de cette valeur propre s'avère difficile. Pour contourner ce problème, on peut alors utiliser le critère de Courant-Friedrichs : le pas de temps de calcul  $\Delta\mathbf{t}$  doit être inférieur ou égal à un pas de temps critique  $\Delta\mathbf{t}_{\text{crit}}$  tel que :

$$\Delta\mathbf{t} \leq \Delta\mathbf{t}_{\text{crit}} \approx h/c \quad (3)$$

où  $c$  est la vitesse de l'onde élastique dans l'élément fini de grandeur caractéristique  $h$ .  $h/c$  est le temps nécessaire à l'onde élastique pour traverser l'élément fini.

### 2.2 Équation d'état de van Der Waals des gaz et chargement en pression

Pour la modélisation de soufflage de la membrane, nous considérons un chargement en débit d'air, *via* laquelle la pression est calculée. Ainsi, si on désigne par  $V_0$  un volume arbitraire initial entouré par la membrane au temps initial  $t_0$  et contenant un nombre de moles de gaz  $n_0$  (à la température  $T_{\text{gaz}}$ ) par  $n(t)$  le nombre de moles de gaz introduit pour le soufflage, par  $p(t)$  la pression interne et par  $V(t)$  le volume additionnel de la bulle à l'instant  $t$ . Alors, dans le cas d'un gaz qui obéit à l'équation d'état de van Der Waals (Landau *et al.*, 1949), on a :

$$\Delta p(\mathbf{t}) = p(\mathbf{t}) - p_0 = \left[ \frac{(n_0 + n(\mathbf{t}))RT_{\text{gaz}}}{(V_0 + V(\mathbf{t})) - b(n_0 + n(\mathbf{t}))} - a \left( \frac{n_0 + n(\mathbf{t})}{V_0 + V(\mathbf{t})} \right)^2 \right] - \left[ \frac{n_0 RT_{\text{gaz}}}{V_0 - bn_0} - a \left( \frac{n_0}{V_0} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$p_0$  représente la pression initiale.  $a$  et  $b$  sont des paramètres expérimentaux.

### 2.3 Modèle de comportement viscoélastique de Lodge

Pour les modèles intégrales viscoélastiques, on doit considérer l'histoire de la déformation qu'a subit le matériau thermoplastique afin de déterminer le champ des contraintes au temps présent. Dans ces modèles, en général, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  est relié à l'historique du tenseur gradient des déformations  $\mathbf{F}$ . Parmi ces modèles, on trouve le modèle de Lodge (Lodge, 1964). Dans ce modèle, le tenseur des contraintes de Cauchy, au temps  $t$ , est relié à l'histoire du tenseur des déformations de Finger  $\mathbf{B}$  par:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = -p(t)\mathbf{I} + \int_{-\infty}^t \sum_k \frac{g_k}{\tau_k} e^{-(t-\tau)/\tau_k} \mathbf{B}(\tau, t) d\tau \quad (5)$$

$p$  est la pression hydrostatique et  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Les paramètres matériels  $g_k$  et  $\tau_k$  sont respectivement des modules de rigidités et des temps de relaxations associés au matériau viscoélastique de Lodge. La dépendance de ce modèle avec la température peut être modélisée par la loi WLF (Derry, 1980).

Le problème d'intégration dans le temps entre l'instant  $t=0$  et l'instant  $t$ , associé au comportement de Lodge, peut être contourné par utilisation de l'approche de récurrence proposée par Feng (Feng, 1992).

### 2.4 Technique de Caractérisation: tests oscillatoires de faible amplitude

Ce type de test consiste à soumettre l'échantillon à un cisaillement sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , défini par les expressions de la contrainte et de la déformation de cisaillement. Ces expériences permettent alors de définir deux grandeurs fondamentales de la rhéologie dynamique: le module de conservation  $G'$  et le module de perte  $G''$ . En effectuant des analyses rhéologiques dynamiques dans le domaine de la réponse linéaire (analyse non destructive mettant en jeu des microdéformations), nous déduisons de ces grandeurs les paramètres associés au modèle de comportement de Lodge en minimisant la fonction objectif suivante :

$$F = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{G'_{i,\text{exp.}} - G'_{i,\text{fit}}}{G'_{i,\text{exp.}}} \right]^2 + \left[ \frac{G''_{i,\text{exp.}} - G''_{i,\text{fit}}}{G''_{i,\text{exp.}}} \right]^2 \quad (6)$$

où  $N$  est le nombre de points expérimentaux,  $(G'_{i,\text{exp.}}, G''_{i,\text{exp.}})$  les deux grandeurs rhéologiques mesurées expérimentalement et  $(G'_{i,\text{fit}}, G''_{i,\text{fit}})$  ceux associés aux calculs théoriques et qui sont donnés par les formules suivantes :

$$G'(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{g_i \lambda_i^2 \omega^2}{1 + \lambda_i^2 \omega^2}, \quad G''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{g_i \lambda_i \omega}{1 + \lambda_i^2 \omega^2} \quad (7)$$

Dans ce travail, nous avons considérés six différents matériaux en HDPE chargés de fibres. Les résultats de l'optimisation sont illustrés sur la fig. 1. Sur la table 1 on a présentés les valeurs des paramètres  $g_k$  et  $\tau_k$  obtenus pour ses six échantillons.

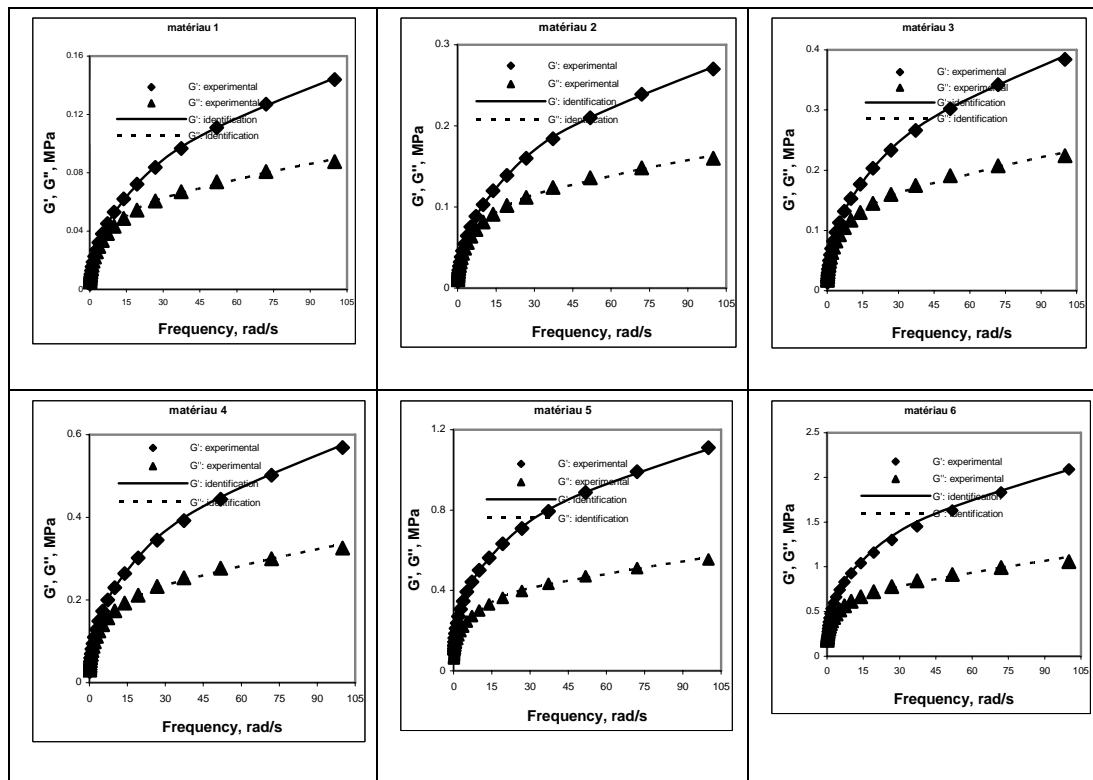
FIG. 1: Modules de conservation  $G'$  et de perte  $G''$  pour les six matériaux à  $T=170$  °C

Table 1. Propriétés des matériaux (Température à 170 °C)

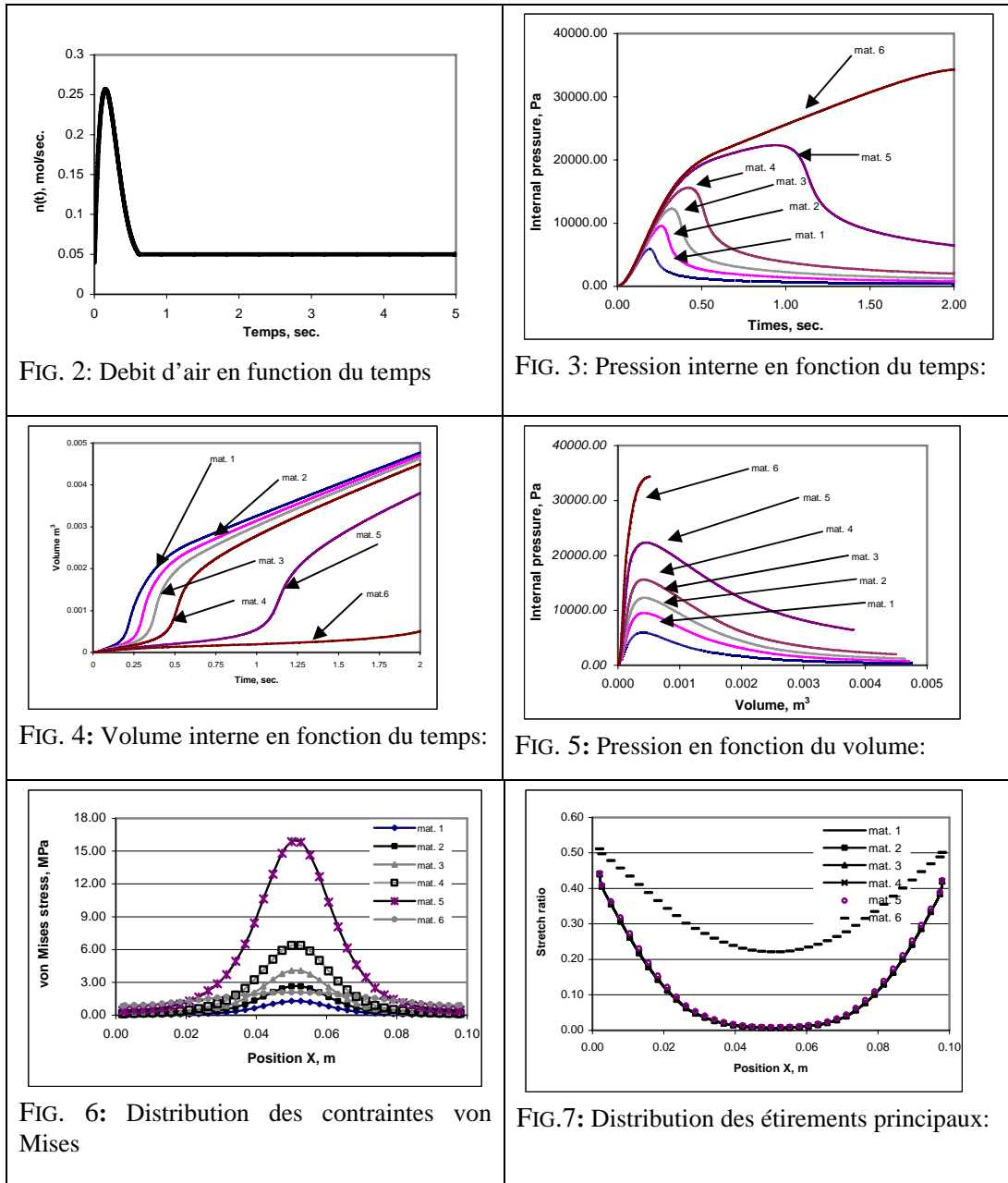
	Matériau 6	Matériau 5	Matériau 4	Matériau 3	Matériau 2	Matériau 1
$\tau_k, sec.$	$g_k, Pa$	$g_k, Pa$	$g_k, Pa$	$g_k, Pa$	$g_k, Pa$	$g_k, Pa$
0.0100	2250766.0	1124178.0	679335.0	463991.0	331056.0	181444.0
0.0800	780835.0	428401.0	237164.0	165194.0	118323.0	64095.0
0.5000	441139.0	247960.0	127546.0	87316.0	59200.0	30839.0
4.0000	298083.0	113711.0	62871.0	36744.0	24277.0	11930.0
25.000	146454.0	105407.0	21227.0	14646.0	9102.0	4223.0

### 3 Analyse et résultats

Nous avons utilisé la simulation numérique pour étudier l'influence de la loi de comportement de Lodge sur la distribution finale des épaisseurs et des contraintes au sein d'une membrane circulaire, en soufflage libre. La durée du soufflage est 2 secondes. Cette étude a été réalisée pour les six matériaux en considérant une charge en débit d'air non linéaire (voir figure 2). Pour le calcul numérique, la feuille thermoplastique, de rayon 10.0 cm et d'épaisseur initial 1.5 mm, est maillée à l'aide de 2782 éléments triangulaires (avec un total de 1458 nœuds). Les constantes matérielles utilisées sont fournies dans la table 1.

Dans les figures 3-4 on a représentés les évolutions de la pression interne et de volume des échantillons circulaires. La figure 5 illustre l'évolution de la pression interne en fonction de volume. À la lumière de ces résultats, nous remarquons que les matériaux 4 et 5 sont plus rigides que les autres matériaux. Les figures 6 et 7 montrent les distributions des contraintes von Mises

et des étirements principaux induites dans chacun des matériaux. Dans la table 3 on a fournis les valeurs critiques des contraintes de von Mises et des volumes. Des vues géométriques, incluant les valeurs des contraintes de von Mises à la fin du cycle de soufflage, sont présentées.



**Table 3. Valeurs critiques des contraintes von Mises et des volumes (170 °C)**

	Matériau 1	Matériau 2	Matériau 3	Matériau 4	Matériau 5	Matériau 6
$\sigma_{eq}$ (MPa)	1.30	2.65	4.06	6.38	15.90	2.09
V (cm <sup>3</sup> )	4772.	4706.	4633	4498.	3838.	503.7

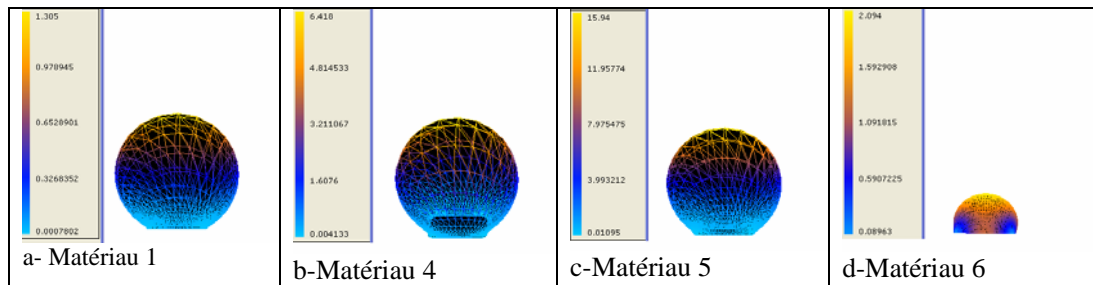


FIG. 8: Vues des géométries et des contraintes de von Mises sur les membranes

#### 4 Conclusions

Dans cet article nous avons étudiés, par la MEF en explicite, le soufflage d'une membrane viscoélastique pour six différents matériaux. Une charge en débit d'air non linéaire est considérée. La pression est déduite de l'équation d'état des gaz de van Der Waals. Le modèle de comportement intégral de Lodge est considéré.

#### Références

- Dokainish, M. A. & Subbaraj, K. 1989 A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics, *Computer Structure*, **32**: 1371-1386
- Erchiqui, F., Gakwaya, A., & Rachik, M. 2005 Dynamic finite element analysis of nonlinear isotropic hyperelastic and viscoelastic materials for thermoforming applications. *Polymer engineering & science*, **45**: 125-134.
- Ferry, J. D., 1980 Viscoelastic properties of polymer, John Wiley & Sons.
- Landau D. L. & Lifshitz. E. M. 1984 Cours de physique Théorique, tome V, *Physique statistique*, Éditions MIR, Moscou.
- Lapidus, L. & Pinder, G. F. 1982, Numerical solution of partial differential equation in science and engineering, John Wiley & Sons
- Lodge, A. S. 1964, Elastic liquids, Academic Press, London 1964
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R.L. 1991 The Finite Element Method; Fourth edition, McGraw-Hill, Vol. 1 and Vol. 2.