

# Étude de la localisation de la déformation à l'aide de modèles second gradient

Pierre Bésuelle & René Chambon

Universités de Grenoble & CNRS  
Laboratoire Sols, Solides, Structures - Risques (3S-R)  
BP 53

38 041 Grenoble cedex 9

Pierre.Besuelle@hmg.inpg.fr & Rene.Chambon@hmg.inpg.fr

## Résumé :

*Cette étude explore le comportement des matériaux en régime de post-localisation, elle traite de certains aspects qui doivent être pris en compte dès lors que l'on cherche à modéliser le phénomène de localisation. On ne peut plus se restreindre à trouver une solution à un problème donné, on doit aussi se poser la question de l'existence éventuelle de plusieurs solutions au même problème. En effet, déterminer la solution la plus critique au problème de l'ingénieur peut nécessiter d'explorer différentes solutions. Puis des résultats avec localisation sont présentés pour différents régimes de comportement dans les géomatériaux, régime fragile ou ductile, montrant des similitudes avec les observations expérimentales de laboratoire.*

## Abstract :

*This paper deals with the material behaviour in post-localisation regime, and more specifically with some aspects which need to be addressed in order to model the strain localisation phenomena. The search of a solution to a given problem is not sufficient, but the existence of eventual others solutions should be asked. It can be necessary to scan several alternative solutions for a same problem to determine the most relevant solution for the engineer. Then, results with localisation for different regimes in geomaterials are introduced, brittle or ductile regimes, exhibiting similarities with laboratory experimental observations.*

## Mots-clefs :

**localisation de la déformation ; modèle second gradient ; non-unicité des solutions**

## 1 Introduction

Le phénomène de localisation de la déformation dans les milieux solides non visqueux ne peut être proprement modélisé avec les approches classiques des milieux continus, car de telles approches impliquent des ruptures sans dissipation d'énergie (Pijaudier-Cabot et Bazant (1987)). Cela implique aussi des dépendances de maillage pathologiques. Pour éviter ces inconvénients, il est nécessaire d'employer des modèles de comportement enrichis intégrant une longueur interne, qui vont régulariser le problème mathématique. Une des approches possibles est d'utiliser des modèles dits avec microstructure (e.g., Mindlin (1964); Germain (1973)). Nous utilisons pour cette étude un cas particulier de ces modèles avec microstructure, les modèles de second gradient locaux développés depuis quelques années dans notre équipe (Chambon *et al.* (2001); Matsushima *et al.* (2002)). Un élément fini a été spécialement développé, et il a pu être vérifié l'objectivité des calculs numériques vis-à-vis de la largeur de bande.

L'étude présentée ici s'intéresse à la question d'unicité ou de non unicité des solutions d'un problème aux limites, une fois que la localisation de la déformation s'est manifestée. L'idée sous-jacente est qu'une solution obtenue pour un problème numérique n'est pas nécessairement

l'unique solution et qu'il est important de connaître d'éventuelles autres solutions pour avoir un éventail des réponses possibles. Le lecteur intéressé trouvera une présentation plus détaillée dans les articles de Bésuelle *et al.* (2006) et Bésuelle et Chambon (2006).

## 2 Non unicité des solutions en régime localisé

Le critère de bifurcation quant à l'apparition de bandes de localisation dans les milieux classiques correspond à une perte d'unicité (Rice (1976); Rudnicki et Rice (1975)). Cette analyse peut être généralisée aux milieux second gradient locaux (Chambon *et al.* (2001); Bésuelle *et al.* (2006)) en ajoutant des conditions cinématiques de continuité du gradient du champ de déplacement. Les milieux second gradient locaux s'expriment par une double relation constitutive, l'une correspondant aux lois classiques reliant contrainte de Cauchy et gradient du déplacement, l'autre reliant une double contrainte au second gradient du déplacement. Nous nous limitons ici au cas où ces deux relations sont indépendantes l'une de l'autre. L'analyse montre que le critère est similaire au critère de localisation dans le milieu classique associé, mais introduit cependant un effet d'échelle. La largeur de bande doit être comparée à la taille du problème aux limites et dans certains cas, la localisation ne sera possible qu'avec un certain retard par rapport au cas du milieu classique associé.

Nous illustrons ici la perte d'unicité, une fois que le critère de localisation est satisfait, sur un problème basique à deux dimensions, à savoir une modélisation d'un essai en déformation plane de compression à déplacement imposé. Nous utilisons comme partie classique de la relation constitutive une loi elasto-plastique de type fragile (Matsushima *et al.* (2002)), avec une partie élastique suivie d'un radoucissement plastique brutal, qui s'atténue avec le cisaillement plastique cumulé, de façon que la contrainte tende vers une valeur résiduelle. Afin d'obtenir différentes solutions au problème numérique, nous avons utilisé un algorithme de recherche directionnel (Chambon *et al.* (2001)), qui consiste, à un pas de temps particulier, à initier le champ de vitesse des valeurs nodales par un champ aléatoire. Le calcul itératif converge alors vers une solution, qui n'est pas nécessairement identique pour chaque tirage aléatoire. La figure 1 montre six solutions différentes, avec une, deux ou trois bandes de cisaillement. La réponse en terme de force en fonction du raccourcissement imposé s'organise selon le nombre de bandes existantes dans l'échantillon numérique (Fig. 2); plus le nombre est important et plus la réponse se rapproche de la solution homogène.

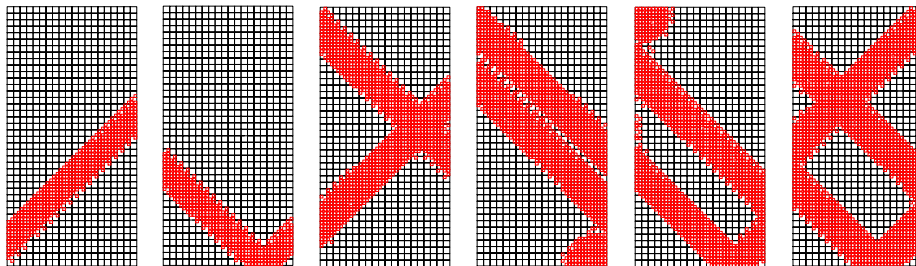


FIG. 1 – Exemple de solutions localisées obtenues après une initialisation aléatoire, montrant des solutions avec 1, 2 ou 3 bandes de cisaillement. Les carrés correspondent aux points d'intégration qui sont en régime de chargement plastique radoucissant, les autres points d'intégration sont en décharge élastique. La direction de compression est verticale, et la direction de déformation plane orthogonale à la figure.

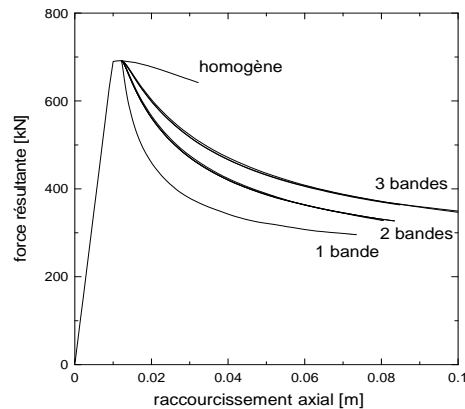


FIG. 2 – Comparaison de l'évolution de la force en fonction du raccourcissement axial de 10 simulations après une initialisation aléatoire à un raccourcissement relatif de 1,2%. Les courbes montrent que la réponse est entièrement contrôlée par le nombre de bandes.

### 3 Modes de localisation basculants

Si l'on a montré numériquement que quand la localisation apparaît, les structures de localisations pouvaient être multiples, se pose aussi une autre question : quand une structure de localisation est amorcée, est-elle stable ou bien peut-elle être modifiée au cours du chargement ? Nous montrons ici qu'une bande de localisation peut très bien se désactiver pendant le chargement.

Pour cela, nous avons réitéré l'algorithme de recherche directionnel, en ne prenant pas cette fois un champ aléatoire mais plutôt un champ propice à désactiver une bande. Nous illustrons ce résultat sur le problème en déformation plane précédent. Alors qu'une solution à deux bandes résulte d'un premier tirage aléatoire (étape A sur la figure 3), une des deux bandes est désactivée à l'étape B. La solution avec deux bandes actives tout au long du chargement, et la solution avec une bande désactivée en cours de chargement divergent l'une de l'autre, elles sont représentées sur le figure 4.

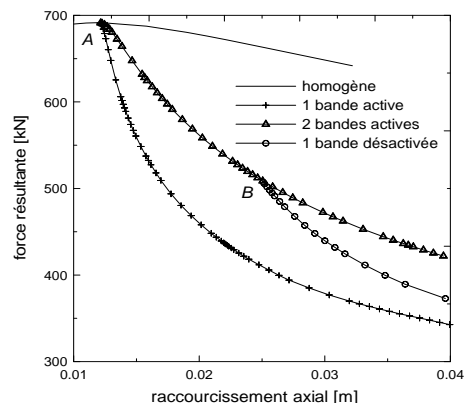


FIG. 3 – Comparaison de l'évolution de la force en fonction du raccourcissement axial en régime post-pic de solutions (convergées) avec 1 bande active, 2 bandes actives et une solution après désactivation d'une des deux bandes. L'étape A correspond à l'initialisation aléatoire et l'étape B correspond à une initialisation ad hoc pour désactiver une bande.

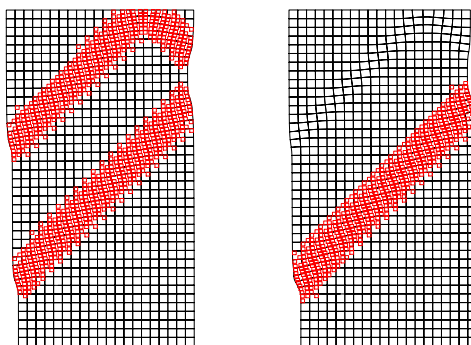


FIG. 4 – Structure de bandes de localisation actives après une initialisation aléatoire ; (à gauche) sans désactivation de bande, (à droite) la désactivation de la bande du haut. Les maillages déformés correspondent à la vraie déformation après un raccourcissement relatif de 4%, sans amplification de déplacement.

#### 4 Bandes de localisation non persistantes

Des bandes de localisation peuvent se désactiver, parce que cela correspond à l'existence de plusieurs solutions au problème aux limites. Nous montrons ici que la désactivation de bande peut avoir une notion plus intrinsèque au comportement du matériau. A savoir que pour certains types de comportement que l'on qualifiera de ductile, les bandes sont non persistantes, elles se désactivent et de nouvelles bandes apparaissent ailleurs. En d'autres mots, il est plus favorable de former de nouvelles bandes que de continuer à déformer les existantes. Ces résultats sont détaillés dans Bésuelle et Chambon (2006). Ici, la loi de comportement elasto-plastique est durcissante ou radoucissante, selon le choix des paramètres, et suivant que l'on cherche à modéliser un comportement ductile ou fragile, respectivement. Compte-tenu du caractère non associé de la loi, la localisation est possible même en régime durcissant. Si la loi est radoucissante, nous retrouvons les résultats précédents, à savoir que la force appliquée sur l'échantillon diminue après localisation, et la ou les bandes de localisation peuvent continuer à fonctionner tout au long du chargement. Quand la loi est durcissante, la force appliquée diminue légèrement au moment de la localisation puis réaugmente (Fig. 5), apparaissent ensuite des oscillations de la force qui correspondent à l'apparition de nouvelles bandes de localisation et le blocage des bandes déjà existantes.

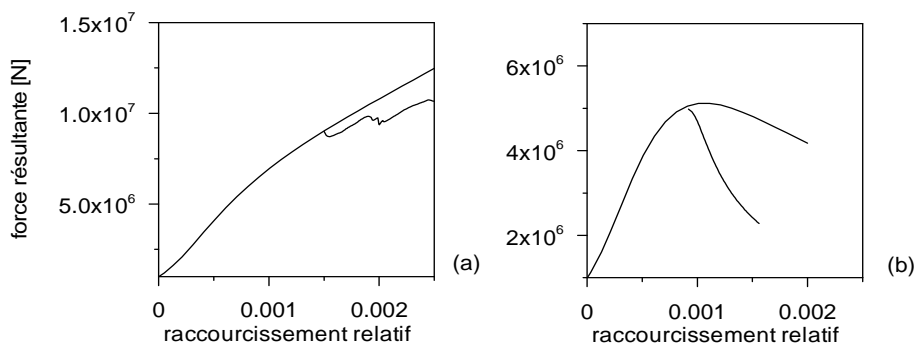


FIG. 5 – Exemples de réponses d'un échantillon numérique sur un chemin de compression en déformation plane (la solution homogène et une solution localisée) pour différentes valeurs asymptotiques du paramètre d'écrouissage : (a) modèle durcissant, (b) modèle avec radoucissement.

## 5 Conclusions

La théorie des modèles second gradient locaux a été validée ces dernières années et montre qu'elle permet de modéliser proprement le phénomène de localisation en contrôlant la largeur des bandes de localisation. L'analyse en bifurcation peut être étendue pour ce type de formalisme. La question de l'existence de plusieurs solutions en régime localisé reste cependant ouverte. Nous montrons numériquement que différentes solutions à un problème peuvent être obtenues. Nous avons utilisé pour cela un algorithme d'initialisation aléatoire du champ de vitesses nodales dans la méthode de Newton-Raphson à un pas de temps donné. Cette non-unicité est selon nous à rapprocher à la non-reproductibilité que l'on observe dans les essais de laboratoire en régime post-pic (*e.g.*, Desrues et Viggiani (2004)). D'un point de vue expérimental, lorsque l'on réplique des essais sur différents échantillons initialement homogènes ou considérés comme tels, la différence des structures de localisation d'un essai à l'autre peut être imputée à des détails très fins de la microstructure, parfois difficilement décelables, qui favorisent un mode de localisation particulier. Notre approche numérique ici ne tend pas à prendre en compte ces variations de microstructure, ce qui encore une fois semblerait bien délicat à faire de manière déterministe, mais à transcrire la non-reproductibilité expérimentale par la non-unicité théorique. Cela nous permet d'obtenir à la fois différentes structures de localisation, similaires aux observations, et de modéliser des phénomènes de désactivation de bande, observés également expérimentalement.

Avec des lois constitutives plus particulièrement adaptées à certains géomatériaux, nous avons pu reproduire différents modes de comportement en régime post-rupture, à savoir un comportement de type fragile, ou plutôt de type ductile. Pour ce dernier, obtenu quand le matériau possède un comportement durcissant, nous montrons que les bandes sont non persistantes, elles s'arrêtent spontanément de fonctionner et de nouvelles structures de localisation apparaissent au voisinage. Cela est similaire à des observations expérimentales, dans les roches poreuses (*e.g.*, Fortin *et al.* (2006)), par relocalisation des émissions acoustiques induites par la déformation de la roche. Le taux d'événements se localise selon une bande puis s'y estompe au cours du chargement ultérieur.

## Références

- Bésuelle, P., Chambon, R. 2006 Modelling the post-localization regime with local second gradient models : Non uniqueness of solutions and non persistent shear bands. *In Modern Trends in Geomechanics (Proc. Int. Workshop, Vienna, Austria, june 27-29, 2005) (W. Wu and H.-S. Yu, eds.)* pp. 209-221, Springer, Berlin.
- Bésuelle, P., Chambon, R., Collin, F. 2006 Switching mode of deformation in post-localization solutions with a quasi brittle material. *J. Mech. Mater. Struct.* **1** 1115-1134
- Chambon, R., Caillerie, D., Matsushima, T. 2001 Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. *Int. J. Solids Struct.* **38** 8503-8527
- Chambon, R., Crochepeyre, S., Charlier, R. 2001 An algorithm and a method to search bifurcation point in non linear problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **51** 315-332
- Desrues, J., Viggiani, G. 2004 Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* **28** 279-321

- Fortin, J., Stanchis, S., Dresen, G., Guéguen, Y. 2006 Acoustic emission and velocities associated with the formation of compaction band in sandstones. *J. Geophys. Res.* **111** B10203
- Germain, P. 1973 La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : Théorie du second gradient. *J. Méc.* **12** 235-274
- Matsushima, T., Chambon, R., Caillerie, D. 2002 Large strain finite element analysis of a local second gradient model : application to localization. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **54** 499-521
- Mindlin, R.D. 1964 Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **4** 50-78
- Pijaudier-Cabot, G., Bažant, Z. 1987 Nonlocal damage theory. *J. Engng. Mech.* **113** 1512-1533
- Rice, J.R. 1976 The localization of plastic deformation. In *Theoretical and Applied Mechanics (W.T. Koiter, ed.) Proc. 14th Int. Cong. Theor. Appl. Mech.* pp. 207-220, North-Holland Pub. Comp., Delft.
- Rudnicki, J.W., Rice, J.R. 1975 Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids* **23** 371-394