

## Calage inverse d'un modèle d'endommagement sur des essais de fatigue en flexion

Rami Chkir<sup>\*</sup>, Didier Bodin<sup>\*</sup>, Gilles Gauthier<sup>\*\*</sup> & Gilles Pijaudier-Cabot<sup>\*\*\*</sup>

\* LCPC Route de Bouaye, Bouguenais, 44341, France  
\*\* Total CReS Chemin du canal BP 22, Solaize 69360, France  
\*\*\* ECN 1 rue de la Noë, Nantes, 44300, France

Rami.chkir@lcpc.fr

### Résumé :

Les essais de fatigue de laboratoire nous permettent de caractériser le comportement de fatigue et d'étudier l'endommagement cyclique des matériaux bitumineux. La géométrie de l'échantillon a une influence sur la réponse globale des essais de fatigue. Afin d'avoir une caractérisation intrinsèque, un modèle d'endommagement a été développé pour décrire la perte de raideur du matériau lors des essais de fatigue en laboratoire. Des paramètres matériau sont à identifier sur des données expérimentales. Une méthode d'optimisation, qui utilise l'algorithme de Levenberg-Marquardt, est présentée ici pour ajuster des données numériques sur des données expérimentales. Deux catégories d'essais sont utilisées : des essais de traction compression uniaxiaux et des essais de flexion sur poutre console trapézoïdale. La méthode nous permet d'identifier le modèle d'endommagement indépendamment de la géométrie d'échantillon.

### Abstract:

Laboratory fatigue tests allow us to characterize the fatigue behaviour and to study the cyclic damage of bituminous materials. It is well known that the specimen shape influence the global response of fatigue tests. In order to reach an intrinsic characterization, a fatigue damage model was developed to describe the loss of material stiffness during laboratory fatigue tests. Nevertheless, material parameters had to be fitted on data to use the model for predictions. An optimisation method based on the Levenberg-Marquardt algorithm is presented to fit numerical data on experimental data. Two categories of laboratory tests were considered in this study: tension compression and two-points bending test. This method allows us to identify the damage model regardless of the sample geometry.

### Mots-clefs : Fatigue ; endommagement ; calage inverse

## 1 Introduction

Les enrobés bitumineux sont les matériaux les plus utilisés dans la construction routière. La caractérisation de leur loi d'endommagement est importante afin d'obtenir une prédiction de la durée de vie des chaussées sous le passage des essieux de poids lourds. Pour limiter la fissuration par fatigue de la structure, la méthode française de dimensionnement (LCPC et SETRA, 1994) prévoit que la valeur  $\epsilon_i$  de la déformation de traction à la base de chaque couche ne doit pas dépasser une limite. Cette limite est calculée en s'appuyant, entre autre, sur la détermination de la performance en fatigue du matériau en laboratoire  $\epsilon_6$ . Elle représente le niveau de déformation pour lequel l'échantillon de laboratoire a une durée de vie de  $10^6$  cycles. Cependant cette caractéristique n'est pas intrinsèque au matériau et dépend du type d'essai de fatigue réalisé (Di Benedetto et al., 2003). Pour parvenir à une caractérisation intrinsèque, le comportement est abordé par un modèle d'endommagement en fatigue (Bodin et al. 2004 ; Bodin, 2002). La réponse globale des échantillons en fatigue est alors calculée par éléments finis. L'identification des paramètres du modèle sur les résultats expérimentaux, nécessite une méthode de calage inverse. Les paramètres du modèle sont ainsi ajustés pour permettre de faire coïncider au mieux la réponse macroscopique numérique, sur les données macroscopiques de laboratoire.

Dans cette étude, deux types d'essais de fatigue sont considérés (Fig.1). L'essai de traction compression (TC) (Fig 1-a) sur cylindre permet de solliciter l'échantillon de manière homogène jusqu'à localisation de la fissure menant à la rupture. Il peut être qualifié d'essai « matériau » et permet une interprétation directe des mesures macroscopiques. Le second type d'essai est un essai de flexion normalisé (Fig 1-b) sur poutre console trapézoïdale. Il est plus communément appelé flexion « deux-points » (2PB). Contrairement aux essais de traction compression, l'état de sollicitation du matériau n'est plus homogène. Cet essai sera qualifié ici d'essai de « structure ».

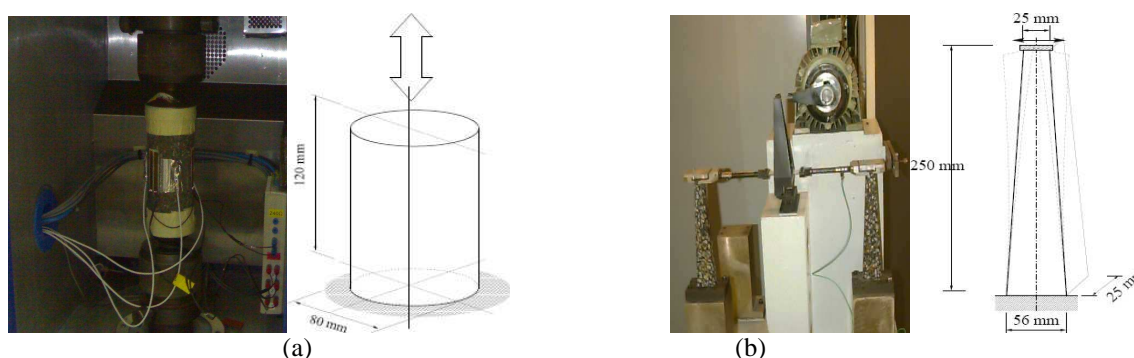


Figure 1: Dispositif des essais de fatigue de laboratoire: (a) tension compression, (b) flexion

L'objectif est ici de parvenir à une caractérisation intrinsèque, c'est-à-dire « matériau » du comportement en fatigue des enrobés bitumineux à partir d'essais « structure ». Dans les paragraphes suivants les équations du modèle d'endommagement en fatigue sont brièvement rappelées avant de présenter la méthode d'optimisation qui est basée sur l'algorithme de Levenberg Marquardt (Levenberg, 1944;Marquardt, 1963). Les premières applications seront présentées pour finir.

## 2 Le modèle d'endommagement

Pour décrire la diminution locale du module induite par le développement des microfissures, une approche basée sur l'élasticité a été employée (Bodin, 2002 ; Bodin et al. 2004). Dans la description du processus globale de la rupture qui conduit à la localisation des déformations, un modèle non local d'endommagement a été utilisé (Pijaudier-Cabot, 1987). Des phénomènes thermiques dus à la dissipation visqueuse dans la matrice bitumineuse peuvent influencer le comportement du matériau. Dans cette étude on s'intéressera essentiellement à l'endommagement en supposant un phénomène isotherme. Cette hypothèse est raisonnable quand les niveaux de chargement ne sont pas aussi important pour avoir des augmentations de température de moins d'un degré (Bodin, 2002).

### 2.1 Relation contrainte - déformation

L'influence des microfissures est introduite par une variable d'endommagement  $D$  qui affecte de manière isotrope le tenseur d'élasticité comme exprimé ci-dessous dans (1)

$$\sigma_{ij} = (1 - D)C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

$\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  et  $C_{ijkl}$  sont respectivement les composantes du tenseur des contraintes, des déformations et des paramètres élastiques du matériau vierge. Le matériau est vierge lorsque  $D=0$  et il ne transmet plus de contrainte lorsque  $D=1$ , c'est-à-dire lorsqu'il y a rupture.  $C_{ijkl}$  est fonction du module du matériau dans les conditions d'essai  $E_0$  et du coefficient de Poisson supposé constant et égal à 0.35.

## 2.2 Expression de la loi d'endommagement

L'évolution de l'endommagement est contrôlée par l'état de déformation du matériau exprimé par une fonction scalaire de déformation équivalente  $\tilde{\varepsilon}$ . Dans son expression, seule les déformations induites par les contraintes principales positives  $\langle \sigma_i \rangle$  conduisent à l'accroissement de l'endommagement comme décrit par l'équation suivante :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\langle \sigma_i \rangle}{E_0 (1-D)} \right)^2} \quad (2)$$

Pour le calcul structurel, on utilise l'intégration non-locale de la déformation équivalente. La déformation équivalente  $\tilde{\varepsilon}$  a été remplacée par sa moyenne pondérée,  $\bar{\varepsilon}$  (Pijaudier-Cabot & Bazant, 1987) comme le montre l'équation suivante :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\int_{\Omega} \Psi(x-s) \tilde{\varepsilon}(s) ds}{\int_{\Omega} \Psi(x-s) ds} \quad \text{avec} \quad \Psi(x-s) = \exp\left(-\frac{4\|x-s\|}{l_c^2}\right) \quad (3)$$

$\Omega$  est le volume du solide étudié,  $V_r(x)$  est le volume représentatif au point  $x$  et  $\Psi(x-s)$  est la fonction poids dans laquelle.  $l_c$  est la longueur caractéristique du milieu. Elle est liée à la microstructure du matériau et contrôle la zone de la localisation de l'endommagement. Pour les bétons de ciment, la valeur de  $l_c$  est fonction de la taille du plus gros granulats du mélange (Pijaudier-Cabot & Bazant, 1987). Pour les matériaux bitumineux, elle n'est pas encore déterminée expérimentalement. Cependant, selon les données expérimentales, sa valeur peut être deux ou trois fois la taille maximale du granulats du mélange. Pour toutes les applications présentées par la suite, la valeur de  $l_c$  est de 18 mm (Bodin, 2002). Lorsque l'état de contrainte est homogène dans l'échantillon, comme dans la traction compression, la déformation équivalente non-locale (3) est égale à la déformation locale (2).

Ainsi, le taux d'endommagement est défini comme une fonction de la déformation équivalente non-locale et d'une fonction  $f(D)$  de l'endommagement.

$$\dot{D} = f(D) \varepsilon \left\langle \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right\rangle^{-\beta} \quad \text{avec} \quad f(D) = \frac{\alpha_2}{\alpha_3 \alpha_1} \left( \frac{D}{\alpha_2} \right)^{1-\alpha_3} \underbrace{\exp\left(\frac{D}{\alpha_2}\right)^{\alpha_3}}_{\text{phase II} \rightarrow \text{phase III}} \quad (4)$$

La fonction  $f(D)$  traduit l'influence de l'endommagement atteint sur sa propre évolution. Elle décrit les trois phases classiques du processus de fatigue (Bodin, 2002; Bodin et al. 2004). Elle est fonction de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  trois paramètres du modèle. Dans l'équation (4),  $\beta$  est considéré comme paramètre matériau. Il peut être déterminé en utilisant la pente  $p$  de la courbe de Wöhler dans le diagramme log-log (Bodin, 2002).

$$N_F = 10^6 \left( \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_6} \right)^p \quad \text{conduit à} \quad \beta = -(p+1) \quad (5)$$

où  $N_F$  est la durée de vie correspondant à une perte de rigidité fixée et  $\varepsilon_a$  l'amplitude de la sollicitation cyclique.

## 2.3 Formulation analytique pour les essais de fatigue uniaxiaux

Pour des essais homogènes uniaxiaux contrôlés en déplacement, l'intégration de l'équation d'évolution de l'endommagement (6) conduit à une expression simple de l'endommagement au de cycle de chargement  $N$ , qui est fonction de l'amplitude constante de la déformation  $\varepsilon_a$  et des paramètres du modèle ( $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ ).

$$D(N) = \alpha_2 \left[ -\log \left( 1 - \frac{\varepsilon_a^{\beta+1} N}{\beta+1 \alpha_1} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha_3}} \quad (6)$$

Cette expression analytique peut être utilisée directement pour identifier les paramètres du modèle sur les essais de traction compression sans avoir recours à l'utilisation du calcul aux éléments finis.

Le paragraphe suivant présente la méthode générale d'identification des 3 paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ , et de la fonction  $f(D)$  du modèle d'endommagement. Le paramètre  $\beta$  est identifié au préalable sur les droites de fatigue (courbe de Wöhler) en utilisant la propriété (6) sur des données expérimentales.

### 3 La méthode d'optimisation

Le problème à résoudre consiste à déterminer les paramètres  $\alpha_i$  du modèle d'endommagement qui permettent d'ajuster au mieux la réponse structurelle numérique du modèle aux données expérimentales. Ce type d'approche inverse est maintenant appliqué dans de nombreux domaines de la physique et de la technologie avancée. Le problème est identique et sa résolution s'appuie sur des méthodes d'optimisation classiques. On définit une fonction distance modèle-expérience qu'il faut minimiser :

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j^2(\alpha) \quad (7)$$

Dans cette expression,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_3)$  est le vecteur des  $n$  paramètres du modèle. Chaque  $r_j$  représente la distance algébrique entre le  $i^{\text{ème}}$  point de  $m$  ( $m \geq n$ ) points expérimentaux et les points du modèle au même nombre de cycles. A savoir si  $K_{exp}(N_j)$  et  $K_{num}(N_j)$  sont respectivement les valeurs expérimentales et numériques de la raideur au cycle ( $N_j$ ) :

$$r_j = K_{exp}(N_j) - K_{num}(N_j) \quad (8)$$

Pour trouver le minimum de cette fonction  $\Phi$ , on doit résoudre l'équation suivante (9) :

$$\nabla \Phi(\alpha) = 0 \quad \text{où} \quad \nabla \Phi \text{ le gradient de } \Phi. \quad (9)$$

La résolution itérative de l'équation est faite par l'algorithme de Levenberg Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963) qui a été choisi ici et programmé dans le logiciel mathématique Scilab. Partant du paramétrage initial  $\alpha^{(0)}$ , l'algorithme converge lorsque le gradient de  $\Phi$  est proche de zéro à savoir inférieur à un paramètre  $\varepsilon$ . Il fixe la précision de l'ajustement et conditionne de fait le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. Ici sa valeur a été fixée à  $10^{-1}$ .

## 4 Application

Afin de valider cette méthode d'optimisation, on génère des données expérimentales virtuelles à l'aide des paramètres  $\alpha_i$  déjà connus sur lesquelles on applique la méthode d'ajustement pour retrouver ces paramètres. Ce test préliminaire nous permet de vérifier la convergence de l'algorithme et d'évaluer la précision de l'ajustement. Les paramétrages initiaux choisis sont ceux identifiés dans la thèse de Bodin (2002). La valeur de  $\beta$  est fixée à 4. Les paramètres  $\alpha_i$  sont  $\alpha_1 = 5.58 \cdot 10^{-15}$ ,  $\alpha_2 = 0.42$ ,  $\alpha_3 = 3$ . Le niveau de déformation choisi est de  $140 \cdot 10^{-6}$ . Dans cette étape de validation numérique, ces paramètres constituent l'objectif à atteindre en fin du processus d'optimisation.

### 4.1 Application aux essais de fatigue uniaxiaux

L'identification sur les données de fatigue uniaxiale ne nécessite pas l'emploi du calcul de la raideur macroscopique par élément finis. On utilise l'expression analytique de l'équation (6)

qui permet de calculer les valeurs de  $K_{num}(N_j)$ . La figure 2 illustre le résultat du tableau (1). L'évolution de la raideur obtenue avec les paramètres ajustés coïncide aux données expérimentales virtuelles utilisées.

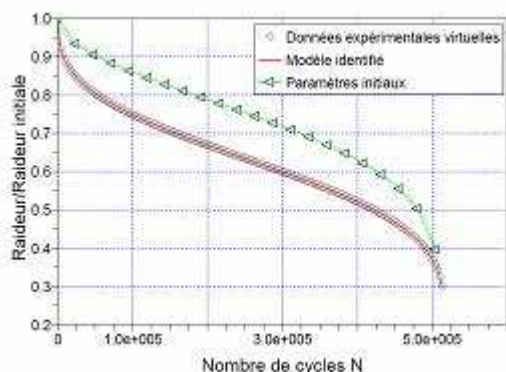


Figure 1 : Raideur adimensionnelle fonction du nombre de cycle en traction compression

L'ajustement conduit à retrouver exactement les paramètres utilisés pour engendrer les données virtuelles à l'exception de  $\alpha_3$  identifié à  $10^{-2}$  près c'est-à-dire à 0.3 % près ce qui est parfaitement acceptable.

## 4.2 Application aux essais de fatigue en flexion

L'application directe de l'ajustement des trois paramètres de la loi  $f(D)$  en utilisant les données de flexion et le calcul de la raideur par éléments finis a nécessité l'emploi d'une stratégie d'identification en deux étapes.

L'étape 1 consiste à identifier, les paramètres du modèle d'endommagement sur les données expérimentales limitée aux deux premières phases d'évolution de la perte de raideur. C'est-à-dire sans considérer la phase de décroissance rapide finale qui mène à la rupture de l'éprouvette. Partant initialement de  $\alpha^{(0)}$ , on obtient un jeu de paramètres  $\alpha^{(02)}$  qui sert à l'initialisation de la deuxième étape

L'étape 2 consiste, à la manière utilisée par Bodin (2002), à ajuster un seul paramètre  $k_\alpha$  définissant des modèles ayant une évolution de l'endommagement identique en début de processus et pour lesquels les ruptures ont lieu pour des nombres de cycle plus ou moins grands. Les paramètres  $\alpha_i$  sont alors exprimés par les équations suivantes :

$$\alpha_1 = k_\alpha \alpha^{(02)} \quad , \quad \alpha_2 = k_\alpha \frac{1}{\alpha_3^{(02)}} \alpha_2^{(02)} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \alpha_3^{(02)} \quad (10)$$

L'optimisation s'opère sur le seul paramètre  $k_\alpha$  qui modifie simultanément les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  du modèle d'endommagement afin d'avoir une perte de raideur identique en début de processus de fatigue. La figure 3 illustre le résultat et les valeurs des paramètres de chaque étape d'ajustement sont regroupées dans tableau 2. Sur le diagramme de la figure 3, la coïncidence de la raideur calculée avec les paramètres ajustés et les données expérimentales est quasi parfaite. Néanmoins dans cette application « structure » de la méthode, on peut remarquer une légère variation des paramètres trouvés relativement aux paramètres de l'objectif qui sont connus à l'avance ici.

Tableau 1: Les paramètres du modèle ajustés sur données de traction compression

Optimisation		$\varepsilon = 10^{-1}$	
	$\alpha_1^{TC} [10^{-15}]$	$\alpha_2^{TC}$	$\alpha_3^{TC}$
$\alpha^{(0)}$	5.52	0.3	2
$\alpha$ ajustés	$5.57 \pm 1.44 \cdot 10^{-3}$	$0.42 \pm 1.5 \cdot 10^{-4}$	$2.99 \pm 3.4 \cdot 10^{-3}$

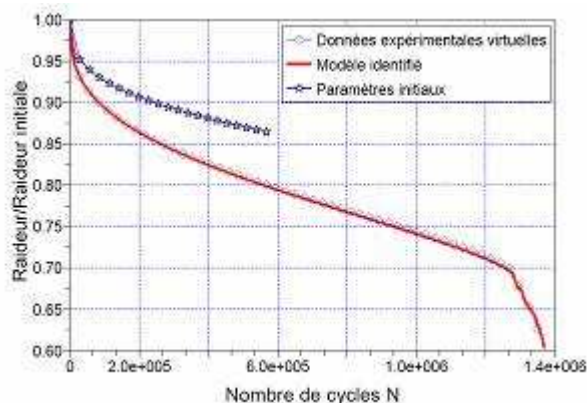


Figure 2 : Raideur adimensionnelle fonction du nombre de cycle en flexion

Tableau 2: Les paramètres du modèle ajustés sur données de traction compression

#### Etape 1

Optimisation	$\varepsilon = 10^{-1}$		
	$\alpha_1^{2PB} [10^{-15}]$	$\alpha_2^{2PB}$	$\alpha_3^{TC}$
$\alpha^{(01)}$	6.09	0.3	2
$\alpha^{(02)}$ ajustés	6.02	0.43	2.96

#### Etape 2

Optimisation	$\varepsilon = 10^{-1}$		
	$\alpha_1^{2PB} [10^{-15}]$	$\alpha_2^{2PB}$	$\alpha_3^{2PB}$
$\alpha^{(02)}$	6.02	0.43	2.96
$\alpha$ ajustés	5.69	0.42	2.96

Le paramètre  $\alpha_2$  est bien identifié et les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  sont identifiés à moins de 2% près. Ces résultats sont considérés acceptables et permettent de valider la méthode.

## 5. Conclusion

L'objectif de ce travail est de déterminer les paramètres matériaux associés à un modèle d'endommagement par fatigue sur des essais de laboratoire non homogènes. La méthode qui a consisté à coupler le calcul structural par élément finis et l'algorithme de Levenberg Marquardt a permis d'y parvenir. A ce stade, l'efficacité de la méthode est avérée sur des données expérimentales virtuelles sur lesquelles on connaissait a priori les paramètres à obtenir. L'étape suivante va consister à appliquer la méthode d'identification aux données expérimentales disponibles sur les deux mêmes types d'essai.

La validation cette méthode ouvre de nombreuses perspectives. Entre autre une application directe de la méthode consistera à une identification du paramètre de longueur  $l_c$ , sur les données expérimentales sur éprouvettes trapézoïdales homothétiques (Bodin *et al.*, 2006) qui ont montré la dépendance de la réponse en fatigue avec la taille de l'échantillon qui peut-être reliée à l'effet non local de la croissance de l'endommagement.

## 6. Références

- Bodin, D. 2002. *Fatigue damage model: Application to asphalt mixes*. PhD thesis. Nantes: Ecole Centrale.
- Bodin, D., Pijaudier-Cabot, G., De La Roche, C., Piau J.M. & Chabot, A. 2004. Continuum Damage Approach to Asphalt Concrete Fatigue Modelling. *ASCE, Journal of Engineering Mechanics* 130(6): 700-708.
- Bodin D., de La Roche C. & Pijaudier-Cabot G., 2006. Size effect regarding fatigue evaluation of asphalt mixtures : Laboratory cantilever bending tests, *International Journal of Road Materials and Pavement Design*, 7 : 181-200.
- Di Benedetto, H., De La Roche, C., Baaj, H., Pronk, A. & Lundstrom R., 2003. Fatigue of bituminous mixes : different approaches and RILEM group contribution. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International RILEM Symposium on Performance Testing and Evaluation*: 14-16. Zurich, Switzerland
- Levenberg, K. 1944. A method for the solution of certain problems in least squares. *QUART J. Appl. Math* 2: 164-168.
- Marquardt, D.W. 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.* 11: 431-441.
- Pijaudier-Cabot, G. & Bazant, Z.P. 1987. Non local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics* 113(10): 1512-1533.