

Développement d'un élément fini de plaque perforée pour le calcul des structures aéronautiques au crash et à l'impact

Nicolas Leconte^{a*}, Bertrand Langrand^a & Eric Markiewicz^b

^a Département de Mécanique du Solide et de l'Endommagement, ONERA, F-59000 Lille, France

^b LAMIH (UMR CNRS 8530), Université de Valenciennes, F-59300 Valenciennes, France

* email : nicolas.leconte@onera.fr

Résumé :

L'étude du crash d'un avion complet nécessite une discrétisation EF adaptée au problème « structure ». Ainsi, pour modéliser la ruine éventuelle de la structure, il faut se focaliser sur la modélisation des assemblages rivetés, sites privilégiés d'amorçage et de propagation de la rupture. Or, une modélisation EF fine des perforations est incompatible avec la taille de la maille EF du modèle de l'avion complet. Il s'avère donc nécessaire de rechercher des méthodes EF alternatives (éléments équivalents) adaptées à la problématique de modélisation de l'avion complet et permettant de simuler le comportement réaliste de l'assemblage riveté (concentrations de déformations). La MEF Hybrid-Treffitz permet la formulation d'EF de plaque perforée. Les éléments finis de la littérature sont toutefois limités aux problèmes d'élasticité. L'objectif de la recherche est donc d'étendre ces éléments, formulés pour le domaine élastique, aux problèmes non-linéaires, et à terme à la dynamique rapide.

Abstract :

The paper deals with the modelling of riveted assemblies for full-scale complete aircraft crashworthiness. To model the structural failure, one has to focus on the riveted joints modelling, which are known to be areas where cracks initiate and propagate. Nevertheless, a fine FE mesh of the holes is not suitable, due to the aircraft model mesh size. Therefore, it appeared necessary to investigate on FE techniques that would enable one to model accurately the perforated plates behaviour for a full-scale aircraft FE model. The literature survey showed that Hybrid-Treffitz FEM enables one to formulate perforated plate FE for elastic problems. The purpose is to find a way to extend this formulation so that the super-element can be used for plastic and crashworthiness problems.

Mots-clefs :

EF Hybrid-Treffitz ; Variable complexe ; Asemblages rivetés

1 Introduction

La comparaison de résultats numériques et expérimentaux d'impacts d'oiseaux a montré que les calculs numériques arrivaient difficilement à prédire la ruine de la structure lorsqu'elle survenait au niveau des joints rivetés (Deletombe et al. (2004)). L'analyse des résultats a mis en évidence l'insuffisance de la localisation des déformations plastiques macroscopiques dans l'élément de coque (ne comportant pas de trou), afin d'initier et de propager la rupture le long des lignes de rivets. Le recours à un maillage fin de la perforation n'étant pas possible dans le cadre de l'étude de la ruine d'une structure complète d'aéronef, il est apparu nécessaire d'évaluer des méthodes éléments finis permettant de formuler un « super-élément » de plaque perforée capable de décrire précisément les distributions de déformations, tout en conservant un coût de calcul modéré.

La recherche bibliographique met en évidence l'existence de « super-éléments » de plaque perforée (Chen (1994), Dhanasekar et al. (2006), Piltner (1985 et 2002), Soh et al. (1999), Wang et al. (2004)), fondés sur des méthodes éléments finis Hybrid-Trefftz (Qin (2000)). Les fonctions d'interpolation de ces éléments reposent sur la solution analytique du problème considéré (problème de « plaque perforée » dans notre cas) et la compatibilité de ces éléments finis spéciaux avec les éléments finis standards est assurée par un principe hybride (continuité des champs de déplacement aux frontières).

La formulation d'un élément caractéristique de la littérature est d'abord présentée. Le développement de cet EF et son extension au domaine non-linéaire et à la dynamique rapide sont ensuite discutés dans la perspective d'une implémentation. La solution analytique sur laquelle reposent les fonctions d'interpolation de ces éléments est finalement évaluée.

2 Élément fini Hybrid-Trefftz de plaque perforée pour les calculs d'élasticité

Un élément fini Hybrid-Trefftz repose sur :

- un principe variationnel hybride qui assure sa compatibilité avec les éléments finis standards (Zienkiewicz et al. (1989), Leconte (2006)),
- l'utilisation de la méthode de Trefftz (Trefftz (1926), Kita et al. (1995), Zienkiewicz et al. (1977)).

La méthode de Trefftz est caractérisée par :

- la construction de fonctions d'interpolation basées sur la solution analytique du problème considéré,
- la réduction des intégrales d'intérieur de domaine en intégrales de frontière.

2.1 Solution analytique du problème de plaque perforée

Les solutions analytiques du problème « plaque perforée » des éléments Hybrid-Trefftz de la littérature ont été déterminées au moyen du formalisme de Kolossov-Muskelishvili (Muskelishvili (1953)), qui permet de résoudre n'importe quel problème d'élasticité plane.

Les étapes importantes de la formulation de cette solution (Leconte (2006)) sont décrites ci-après :

1) poser les équations de Kolossov-Muskelishvili décrivant l'état d'élasticité plane

$$\begin{cases} 2\mu(u + iv) = k\Phi - f \frac{d\bar{\Phi}}{df} - \bar{\Psi} \\ \sigma_{xx} - i\tau_{xy} = \frac{d\bar{\Phi}}{df} + \frac{d\Phi}{df} - \bar{f} \left(\frac{d^2\Phi}{df^2} - d\Phi \frac{d^2f}{df^3} \right) - \frac{d\Psi}{df} \\ \sigma_{yy} + i\tau_{xy} = \frac{d\bar{\Phi}}{df} + \frac{d\Phi}{df} + \bar{f} \left(\frac{d^2\Phi}{df^2} - d\Phi \frac{d^2f}{df^3} \right) + \frac{d\Psi}{df} \end{cases}$$

$$\bar{\Phi} + \bar{f} \frac{d\bar{\Phi}}{df} + \Psi = i \int (\bar{T}_x + i\bar{T}_y) dS$$

2) développer le potentiel Φ en série de Laurent : $\Phi(\zeta) = \sum_{j=-N}^M a_j \zeta^j$,

- 3) déterminer le potentiel Ψ en écrivant la condition de bord libre sur le trou ($\tilde{T}_x = \tilde{T}_y = 0$),
- 4) après avoir décomposé le complexe a_j en parties réelle et imaginaire ($a_j = \alpha_j + i\beta_j$), déterminer le champ de déplacement suivant x (u) et le champ de déplacement suivant y (v) par identification des parties réelle et imaginaire,
- 5) le champ des contraintes peut être obtenu en suivant une méthodologie similaire.

L'expression du champ des déplacements est volontairement omise (par souci de concision).
Le champ de contrainte obtenu est le suivant :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j \left[2R^{j-1} \cos(j-1)\theta - R^{-j-1} \cos(j+1)\theta - [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta \right] \\ &\quad + \beta_j j \left[-2R^{j-1} \sin(j-1)\theta + R^{-j-1} \sin(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j \left[2R^{j-1} \cos(j-1)\theta + R^{-j-1} \cos(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta \right] \\ &\quad + \beta_j j \left[-2R^{j-1} \sin(j-1)\theta - R^{-j-1} \sin(j+1)\theta - [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j \left[-R^{-j-1} \sin(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta \right] \\ &\quad + \beta_j j \left[-R^{-j-1} \cos(j+1)\theta + [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta \right]\end{aligned}$$

Cette solution analytique est évaluée dans la suite des travaux.

2.2 Principe variationnel

La construction du principe Hybrid-Trefftz sur lequel repose l'élément de plaque perforée (Leconte et al. (2006)) dérive du principe de l'énergie potentielle totale :

$$\Pi_{\text{TPE}}[u_i] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dV - \int_{\mathcal{V}} b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS$$

Appliquons le théorème de la divergence :

$$\Pi[u_i] = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\sigma_{ij,j}^u + b_i) u_i dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS$$

Or, $\sigma_{ij,j}^u + b_i = 0$ (fonctions d'interpolation basées sur la solution analytique du problème considéré), et par l'hypothèse $b_i = 0$ (efforts volumiques négligés), il vient :

$$\Pi[u_i] = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS$$

Un principe hybride est obtenu en forçant la compatibilité des déplacements de l'élément perforé avec les éléments conventionnels voisins :

$$\Pi_H[u_i] = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS + \int_{S_u+S_i} (\tilde{u}_i - u_i) T_i dS$$

Les attributs de ce principe sont : (1) hybride, (2) intégration sur les frontières (inter-élément, d'application des conditions aux limites statiques et cinématiques) de l'élément, (3)

utilisation de fonctions d'interpolation basées sur une solution analytique. Ces caractéristiques sont celles d'un élément Hybrid-Trefftz.

3 Discussion

L'élément présenté est un élément fini de plaque perforée pour les calculs statiques d'élasticité plane. L'objectif de la recherche vise à étendre le domaine d'utilisation de cet élément à la plasticité puis à la dynamique rapide.

En ce qui concerne l'extension à l'élasto-plasticité, il apparaît qu'une formulation Hybrid-Trefftz nécessite une solution analytique afin de bâtir les fonctions d'interpolation de l'élément. Une solution du problème « plaque perforée parfaitement plastique » (Dinca (1965)) a été établie suivant le formalisme de Kolossov-Muskelishvili. Une première solution sera de développer un élément Hybrid-Trefftz de plaque perforée parfaitement plastique. En revanche, cette solution n'existe pas dans le cas général d'un problème de la plaque perforée élasto-plastique écrouissable.

Une deuxième solution consisterait à abandonner la méthode de Trefftz (et donc à calculer les intégrales de volume de la potentielle Π). Il s'agirait alors de développer un élément fini hybride enrichi par les fonctions d'interpolation élastique précédentes, pour effectuer des calculs élasto-plastiques. Il s'agira alors d'évaluer l'erreur commise par cet élément en effectuant des comparaisons avec des résultats de modèles éléments finis suffisamment fins.

En ce qui concerne une extension ultérieure à la dynamique rapide, la viscoplasticité sera dans un premier temps considérée ($\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$), et dans un deuxième temps la matrice de masse formulée. Les efforts volumiques seront dans ces cas non négligeables $b_i \neq 0$, ce qui nous incite à privilégier la deuxième solution, abandonnant la méthode de Trefftz.

4 Evaluation de la solution analytique en vue de l'extension à l'élasto-plasticité

La solution analytique élastique du problème de plaque perforée joue un rôle essentiel aussi bien dans l'élément Hybrid-Trefftz élastique de la littérature que dans l'élément hybride enrichi que nous souhaitons développer. C'est la raison pour laquelle la représentativité de cette solution, qui est censée être exacte indépendamment du chargement, est évaluée avant d'implémenter ces éléments.

La solution de Kolossov-Muskelishvili est comparée à celle de Timoshenko (1934), pour un chargement appliqué de traction. Le champ des contraintes présenté précédemment est tronqué tel que $N=M=4$ et le terme $j=0$ n'est pas conservé car toutes les contraintes sont nulles (ce qui correspond aux fonctions d'interpolation de l'élément perforé à 8 nœuds). Un système de 16 équations est constitué pour déterminer les 8 inconnues α_j et les 8 inconnues β_j . 8 points, pour lesquels les valeurs de σ_{xx} et σ_{yy} sont déterminées par la solution de Timochenko, sont utilisés (soit $8*2$ valeurs ponctuelles). Un système de 16 équations à 16 inconnues est ainsi constitué. On remarquera que pour $j=1$ l'équation associée à β_j vaut 0. L'équation associée à β_1 est donc retirée du système (il reste 15 équations et 15 inconnues).

Une fois les inconnues α_j et β_j déterminées, les champs continus σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} sont obtenus en tous points par la solution de Kolossov-Muskelishvili et comparés à ceux de la méthode de Timoshenko :

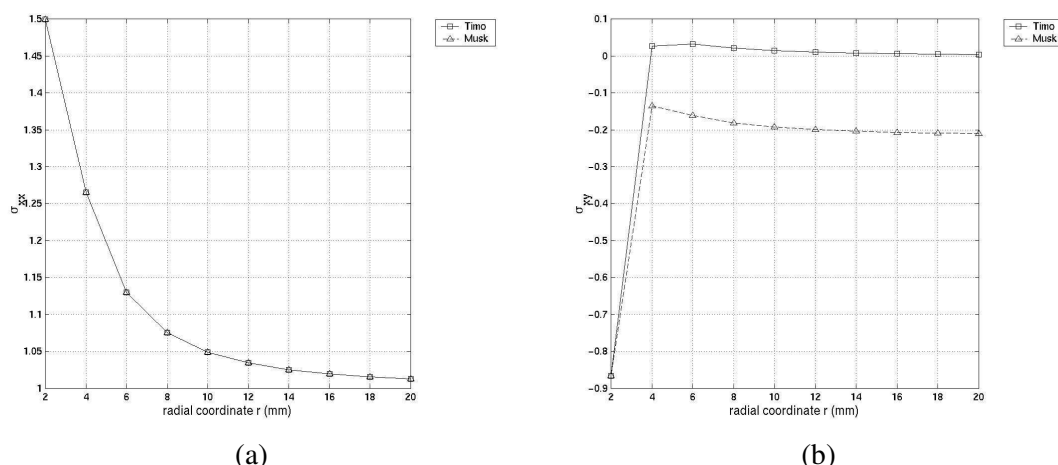


FIG. 1 – Comparaison des solutions analytiques. (a) σ_{xx} ; (b) σ_{xy} .

On peut observer une parfaite adéquation des deux solutions pour σ_{xx} et σ_{yy} (Fig. 1a). Ce n'est en revanche pas le cas pour σ_{xy} . L'explication est probablement la suivante : l'expression associée à β_1 est nulle dans σ_{xx} et σ_{yy} contrairement à σ_{xy} . Le fait de déterminer les inconnues α_j et β_j en n'utilisant pas de valeur ponctuelle de σ_{xy} ne permet pas de déterminer β_1 , ce qui nuit à la description du champ continu σ_{xy} . Une solution, en cours d'évaluation, consiste à calculer les inconnues α_j et β_j avec des valeurs ponctuelles des champs σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} prélevées de la solution de Timoshenko. La description du champ continu σ_{xy} s'en trouvera certainement améliorée (détermination du paramètre β_1).

5 Conclusions

La formulation d'un élément Hybrid-Trefftz de plaque perforée pour les calculs d'élasticité plane a été présentée. Les possibles extensions de l'élément de plaque perforée à la plasticité et à la dynamique rapide sont ensuite discutées. Cette discussion montre que la solution analytique de plaque perforée de Kolossov-Muskhelishvili joue un rôle central dans l'implémentation de l'élément à développer. C'est la raison pour laquelle une première évaluation de cette solution analytique a été étudiée. D'autres évaluations de cette solution sont en cours. Une implémentation d'un élément fini Hybrid-Trefftz perforé est en cours pour des calculs d'élasticité, pour en évaluer la représentativité et la performance. Ces développements préparent l'implémentation d'un élément fini de plaque perforée pour des calculs élasto-plastiques (et à terme viscoplastiques et de dynamique rapide).

Références

- Chen, H. C. 1994 A special finite element with an elliptical hole for laminated structures. AIAA-94-1337-CP 253-263.
- Deletombe, E., Delsart, D., Fabis, J., Langrand, B. & Ortiz, R. 2004 Recent developments in modelling and experimentation fields with respect to crashworthiness and impact of aerospace structures. European Congress on Comput. Meth. in Appl. Sci. and Engng., (ECCOMAS), Jyväskylä, Finland.

- Dhanasekar, M., Han, J. & Qin, Q-H. 2006 A hybrid-Trefftz element containing an elliptic hole. *Finite Elements in Analysis and Design* **42**, 1314-1323.
- Dinca, G. 1965 Sur la déformation plane du corps élastique parfait (utilisation des variables complexes). *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* Tome X, N°5, 645-651.
- Kita, E. & Kamiya, N. 1995 Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering Software* **24**, 3-12.
- Leconte, N., Langrand, B. & Markiewicz, E. 2006 Toward a Hybrid-Trefftz element with a hole for elasto-plasticity ? Finite Element Methods in Engineering and Science (FEMTEC), El Paso, Texas, USA.
- Leconte, N. 2006 Eléments finis Hybrid-Trefftz à trous internes. Rapport ONERA n° RA 4/11377 DMSE.
- Muskelishvili, N.I. 1953 Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Groningen, Holland.
- Piltner, R. 1985 Special finite elements with holes and internal cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **21**, 1471-1485.
- Piltner, R. 2002 Mixed finite elements with voids and inclusions. 15th Engineering Mechanics Conference, New York.
- Qin, Q-H. 2000 The Trefftz Finite and Boundary Element Method. WIT Press, Southampton.
- Soh, A.K. & Long, Z.F. 1999 A high precision element with a central circular hole. *Int. J. of Solids Struct.* **36**, 5485-5497.
- Timoshenko, S. 1934 Theory of elasticity. First ed., McGraw-Hill Book Co.
- Trefftz, E. 1926 Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. 2. Int. Congr. Fur Tech. Mech., Zurich, pp. 131-137 (en Allemand).
- Wang, X., Zhou, Y. & Zhou, W. 2004 A novel hybrid finite element with a hole for analysis of plane piezoelectric medium with defects. *Int. J. of Solids Struct.* **41**, 7111-7128.
- Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W. & Bettess, P. 1977 The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **11**, 355-375.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L. 1989 The Finite Element Method. pp 373-397. McGraw-Hill, London.