

## Interactions hydrodynamiques en fluide non newtonien et conséquences sur le transport de particules sphériques

Antoine Despeyroux<sup>1</sup>, Abdelhak Ambari<sup>1</sup>, Abderrahim Ben Richou<sup>2</sup>

<sup>1</sup> EMT/LPMI ENSAM – 2, bd du Ronceray – BP 93525 – 49035 Angers cedex 01, France

E-mail : [antoine.despeyroux@angers.ensam.fr](mailto:antoine.despeyroux@angers.ensam.fr); [abdelhak.ambari@angers.ensam.fr](mailto:abdelhak.ambari@angers.ensam.fr)

<sup>2</sup> EMET – Faculté des Sciences et Techniques de Beni Mellal – BP 523 – Maroc

E-mail : [benricho@fstbm.ac.ma](mailto:benricho@fstbm.ac.ma)

### Résumé :

Pour contribuer à la compréhension des interactions hydrodynamiques, à faible nombre de Reynolds, exercées sur une particule par les parois d'un tube où elle est axialement positionnée, les équations du mouvement sont exprimées en formulation fonction de courant et de la vorticité pour être r ecrites en coordonn es curvilignes orthogonales. Ces équations sont résolues par la méthode des différences finies. La génération du maillage est effectuée en utilisant la méthode des singularités. La précision des résultats a permis d'évaluer les facteurs de correction de la force totale et de ses composantes de pression et de viscosité. L'analyse des résultats montre, contrairement à ce que l'on obtient en régime dilué, une prédominance des forces de pression sur celles de viscosité évoluant dans un rapport qui ne dépend pas de  $n$  en régime de lubrification. Quant au rapport des vitesses de sédimentation en milieu confiné et illimité, celui-ci s'av ere ne d ependre que du confinement.

### Abstract :

To contribute to the knowledge of the hydrodynamical interactions exerted on a spherical particle placed in the axis of a cylinder at small Reynolds numbers, momentum and continuity equations are expressed in the stream and vorticity formulation and are rewritten in an orthogonal system of curvilinear coordinates. These equations are solved using a finite difference method. The generation of the grid was carried out by the singularities method. The accuracy of the numerical code permitted us to compute the normalized correction factor of the drag force and the separate contributions of the pressure and viscous forces. This analysis allowed us to show, contrary to what is happening for the dilute regime, the prevalence of the pressure term over the viscosity one in the lubrication regime. On the other hand, the normalized correction factor of the sedimentation velocity seems to be dependent only on the confinement aspect ratio  $k$ .

**Mots-clefs :** fluide d'Ostwald ; interactions hydrodynamiques ; faible nombre de Reynolds

### 1 Introduction :

Qu'ils soient biologiques ( coulements sanguins...) ou industriels (injection des thermdurcissables chargés de microsphères...), l'étude des suspensions constitue un problème physique aux enjeux industriels importants (Clift *et al.*(1978)). La difficulté de bien décrire ces écoulements vient des interactions hydrodynamiques du fait que la présence d'une particule dans l'écoulement apporte une perturbation de longue port e ; en fluide newtonien la vitesse varie en  $1/r$ , alors qu'en fluide non newtonien la longueur d'écran peut être bien affectée par la loi de comportement. Ceci rend ces interactions très difficiles à estimer dans le cas du transport de suspensions. L'hypothèse communément admise dans la modélisation numérique de particules consiste à supposer que leurs vitesses de déplacement et de rotation sont identiques à celles de la particule fluide non perturbée. Cette hypothèse s'avère fautive dans le cas des fortes interactions (concentrations industrielles). En fluide newtonien, nous avons montré par l'utilisation de la matrice de résistance qu'une particule

libre transportée dans un écoulement de Poiseuille avait une vitesse plus faible que celle du fluide en son centre de gravité (Ben Richou *et al.* (2003)). Etant donnée la non linéarité de l'équation de transport introduite par la loi non newtonienne de comportement, la technique des matrices de résistance qui présuppose la linéarité de la relation entre les efforts et leur cinématique n'est plus applicable. Par ailleurs, comme la plupart des fluides supports ont un caractère non newtonien viscoélastique rhéofluidifiant, et que les gradients élongationnels engendrés par le déplacement de ces particules sont souvent faibles, nous avons préféré étudier en premier lieu l'influence du comportement rhéofluidifiant en négligeant le caractère viscoélastique. Dans ce travail, nous allons présenter quelques résultats sur les interactions hydrodynamiques que subit une particule sphérique de rayon  $a$  se déplaçant à vitesse uniforme  $U$  le long de l'axe d'un tube cylindrique de rayon  $b$  dans le cas d'un fluide d'Ostwald. Ce problème a été largement abordé par de nombreux auteurs pour les faibles confinements  $k = a/b$  pour une extrapolation à  $k = 0$  (milieu illimité) : Missirlis *et al.* (2001), Gu Dazhi *et al.* (1985). Afin d'éviter tous les couplages entre l'élasticité, la rhéofluidification et le confinement qui peuvent avoir des effets souvent opposés, et afin d'étudier ces interactions hydrodynamiques aux fortes concentrations qui correspondent aux applications industrielles, nous allons nous focaliser sur les fluides en loi puissance et plus particulièrement sur les conséquences de la rhéofluidification sur ces interactions.

## 2 Formulation et résolution numérique du problème :

Le problème étudié est celui de la détermination de la force subie par une particule sphérique de rayon  $a$  se déplaçant à la vitesse constante  $U$  dans l'axe d'un tube de rayon  $b$  rempli d'un fluide d'Ostwald dont la loi de comportement est décrite par  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + 2m(2D_{II})^{(n-1)/2}\underline{\underline{D}}$  où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes,  $\underline{\underline{D}} = (1/2)(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^t\vec{u})$  le tenseur taux de déformations avec  $D_{II} = tr(\underline{\underline{D}}^2)$  son second invariant,  $p$  la pression,  $m$  la consistance ( $Pa s^n$ ) et  $n$  l'indice de fluidité. Cette loi rhéologique décrit un comportement pseudo-plastique de viscosité apparente  $\eta_a = m(2D_{II})^{(n-1)/2}$ . L'écoulement s'effectue à de très faibles nombres de Reynolds généralisés  $Re_n = (\rho U^{2-n} \cdot (2a)^n / m)$ . Dans ces conditions, il est géré en régime isotherme par les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement, où  $\vec{u}$  est la vitesse de l'écoulement :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}})\vec{u}) = -\underline{\underline{\nabla}} p + \underline{\underline{\nabla}} \cdot (\eta_a \underline{\underline{D}}) \end{cases}$$

Ces équations ont été rendues sans dimension par l'utilisation de la longueur, de la vitesse, de la pression et du temps caractéristiques respectifs suivants :  $l_c = a$ ,  $U_c = U$ ,  $p_c = m(U/a)^n$  et  $t_c = \rho a^2 / (m(U/a)^{n-1})$ . Dans ces conditions, la force hydrodynamique subie par la sphère peut s'écrire sous la forme :  $F(n, k) = 6\pi m (U/2a)^{n-1} a U \lambda(n, k)$  où  $\lambda(n, k) = \lambda(n, k=0) \lambda_+(n, k)$  avec  $\lambda(n, k=0)$  correspondant au facteur multiplicatif dans le cas d'un milieu illimité.  $\lambda_+(n, k)$  peut être considéré comme le facteur de correction de la force subie par la sphère en milieu confiné. Celui-ci dépend du confinement  $k = a/b$  et de la loi de comportement du fluide par le biais de  $n$  (couplage non linéaire).

Dans ce travail nous avons opté pour une résolution numérique vu la difficulté analytique hors du régime asymptotique. Le calcul de  $\lambda(n, k)$  a été obtenu en résolvant les équations du mouvement en formulation fonction de courant  $\psi$  et de la vorticité  $\omega$ , écrites dans un système orthogonal de coordonnées curvilignes épousant parfaitement le contour de la sphère et les parois cylindriques du tube. Cette technique est bien décrite dans Ben Richou *et al.* (2003). Ce calcul numérique a permis d'une part d'améliorer les résultats précédemment obtenus par les différents auteurs pour  $k \leq 0.5$  et d'autre part d'étendre les calculs au régime de forte concentration ( $0.1 \leq k \leq 0.99$ ) jusqu'au régime de lubrification. Il convient cependant de rappeler que la question de construction de maillage est traitée en utilisant la méthode des singularités (Katz *et al.* (1991)). Celle-ci consiste en la détermination des équipotentielles et des lignes de courant par la résolution du problème associé à l'écoulement d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel. Le maillage fourni par ces équipotentielles et ces lignes de courant est utilisé en tant que transformation conforme numérique pour la génération d'un maillage orthogonal de notre géométrie. Sur ce maillage, les techniques (A.D.I.) et (S.O.R.) (Peyret *et al.* (1985)) sont appliquées pour calculer les fonctions de  $\psi$  et  $\omega$  de l'écoulement visqueux pour toutes les situations considérées. Le critère de convergence est défini à partir de :  $\left| \frac{\lambda^{i+1}(k) - \lambda^i(k)}{\lambda^{i+1}(k)} \right| < 10^{-6}$ . Afin de vérifier nos calculs numériques, nous avons opté pour une comparaison de nos résultats avec ceux obtenus à l'aide du code commercial de type volumes finis FLUENT 6.2 dans lequel nous avons utilisé le modèle de loi puissance. Nous avons utilisé l'algorithme SIMPLE avec un schéma du second ordre et un maillage structuré en adoptant le même critère de convergence que celui précédemment défini. Nous avons donc calculé numériquement les contributions séparées des forces réduites de pression  $\lambda_p(n, k)$  et de viscosité  $\lambda_v(n, k)$  avec  $\lambda(n, k) = \lambda_p(n, k) + \lambda_v(n, k)$ .

### 3 Résultats et discussion :

Rappelons que dans le cas d'un fluide en loi puissance en milieu illimité, l'équivalent de la force de Stokes dans le cas newtonien nécessite la connaissance de la valeur de  $\lambda(n, k=0)$ . Ce facteur a été calculé par Slattery (1962) et Wasserman *et al.* (1964) par l'utilisation des méthodes variationnelles décrites dans Johnson (1960), et appliquées aux fluides incompressibles dont la viscosité apparente ne dépend que du second invariant du tenseur taux de déformations en régime stationnaire.

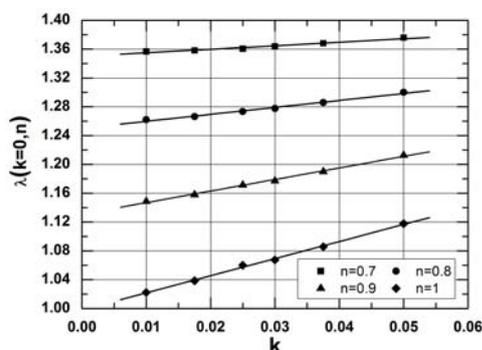


Fig.1 : extrapolation de  $\lambda(n, k)$  pour  $k \rightarrow 0$

Sur la figure 1, nous avons extrapolé nos résultats numériques de  $\lambda(n, k)$  pour  $k \rightarrow 0$ . Les valeurs obtenues pour  $\lambda(n, k=0)$  sont comparées sur le tableau 1 à celles obtenues soit numériquement par Dazhi *et al.* (1985), Missirlis *et al.* (2001), soit par la

n	Nos résultats numériques	Missirlis et al. (numérique)	Gu Dazhi et al. (numérique)	Wasserman et al. (upper bound)	Cho et al. (upper bound)
0.7	1.35008	1.3554	1.320	1.366	1.3604
0.8	1.25023	1.2558	1.240	1.260	1.2594
0.9	1.13089	1.1371	1.140	1.140	1.1402
1	0.9996	1.0055	1.002	1.005	1.0060

Tab.1 : résumé des valeurs de  $\lambda(n, k=0)$  obtenues numériquement ou par la méthode variationnelle par différents auteurs

méthode variationnelle par Wasserman *et al.* (1964) et Cho *et al.* (1983). Nos résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus par ces différents auteurs. Ces valeurs seront donc utilisées pour les normalisations de la force de traînée subie par la sphère afin de calculer l'effet du confinement  $k$  sur celle-ci.

Avant de calculer ce facteur de correction lié au confinement, nous nous sommes assurés de l'absence de l'effet de l'inertie sur la force calculée. Pour cela, nous avons tracé à titre d'exemple sur la figure 2.1 le coefficient de traînée  $C_d(\text{Re}_n, k) = 2F(n, k) / (\rho U^2 \pi a^2)$  pour  $k = 0.29$ . On peut y voir que pour  $\text{Re}_n < 1$ , la relation suivante  $C_d(\text{Re}_n, k) = 24\lambda(k, n) / \text{Re}_n$  est parfaitement vérifiée comme cela a été déjà prévu par d'autres auteurs pour  $k = 0$ . Néanmoins,  $C_d$  continue de dépendre de  $n$  pour un confinement  $k$  donné. La figure 2.2 montre ce couplage non linéaire entre le confinement et la loi de comportement qui se traduit par une dépendance de  $\lambda(k, n)$  à cet indice de fluidité  $n$  alors que  $C_d$  continue toujours de varier en  $\text{Re}_n^{-1}$ .

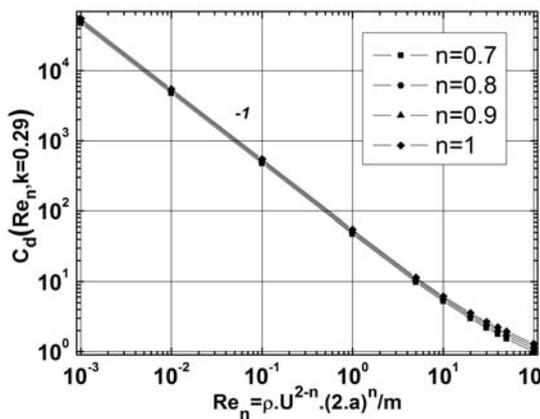


Fig.2.1 : Variation de  $C_d$  en fonction de  $\text{Re}_n$  pour  $k=0.29$  montrant le début de l'influence de l'inertie

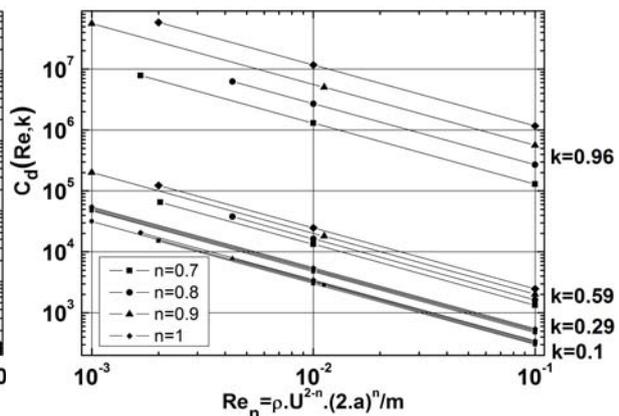


Fig.2.2 : Variation de  $C_d$  en fonction de  $\text{Re}_n$  pour  $k = 0.1, k = 0.29, k = 0.59, k = 0.96$  et  $n$  variable

Pour bien étudier ce couplage entre le confinement et le comportement non linéaire du fluide, nous avons tracé sur la figure 3.1 le facteur de correction  $\lambda_+(n, k) = \lambda(n, k) / \lambda(n, k = 0)$  de la force de traînée subie par la sphère. Le couplage entre le confinement et le comportement rhéofluidifiant du fluide semble réduire les effets de paroi : pour  $k = 0.1$ , lorsque la correction de la force de Stokes pour un fluide newtonien est de 26%, celle pour un fluide en loi puissance pour  $n = 0.7$  est de 6%. Néanmoins ces effets restent toujours non négligeables pour les grands confinements (fortes concentrations). Des résultats présentés sur la figure 3.1, à partir de la relation suivante :

$U(k, n) / U(k = 0, n) = (\lambda_+(k, n))^{-1/n}$ , on peut déduire la vitesse de sédimentation réduite d'une particule dans l'axe d'un tube pour une éventuelle application aux viscosimètres à chute de bille. Celle-ci est présentée sur la figure 3.2 pour différents confinements. Cette figure montre deux résultats : i) la vitesse de sédimentation d'une particule ne semble pas être très affectée par le confinement pour  $k < 0.1$  et, par contre, elle décroît brutalement par l'effet du confinement lorsque  $k \rightarrow 1$  ; ii) dans l'ensemble, l'indice de fluidité ne semble plus affecter la vitesse de sédimentation contrairement à la force. Ce résultat surprenant est confirmé par le traitement de nos données qui montrent bien l'évolution de  $\lambda_+ \sim (\beta(k))^n$

Mais sur le plan expérimental il est notable que la vitesse de sédimentation d'une particule dans un tube subisse une correction liée à son confinement qui soit indépendante de son indice de fluidité  $n$ . Ceci facilite les mesures de la viscosité apparente de tels fluides.

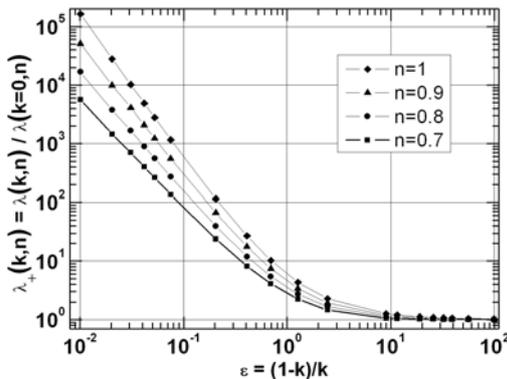


Fig.3.1 : Facteur de correction de la force de traînée subie par une particule sphérique en fonction de son confinement

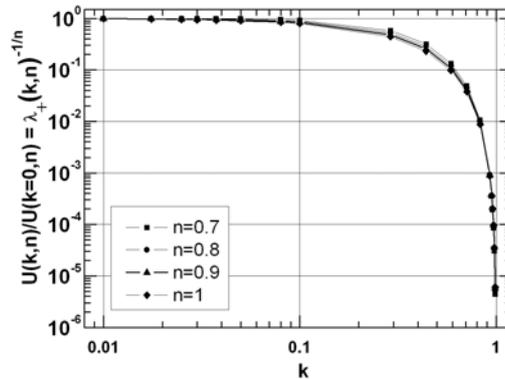
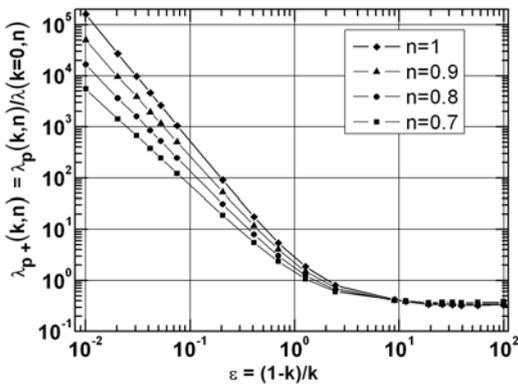
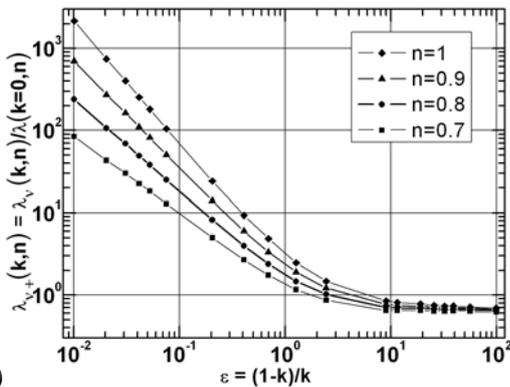


Fig.3.2 : Facteur de correction de la vitesse de sédimentation d'une particule sphérique en fonction de son confinement

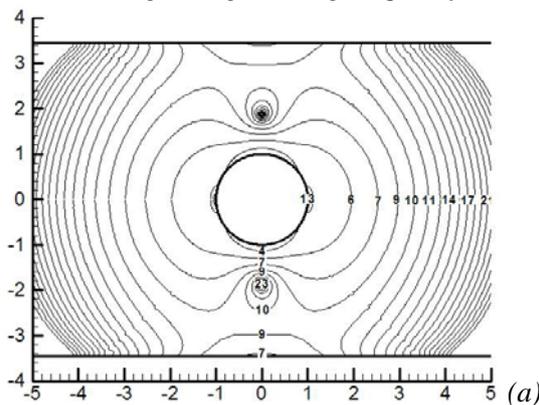


(a)

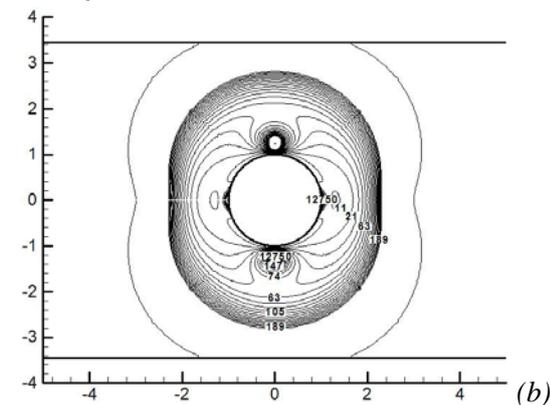


(b)

Fig.4 : Evolution des composantes de pression (a) et de viscosité (b) du facteur de correction de la force de traînée subie par une particule sphérique en fonction de son confinement



(a)



(b)

Fig.5 : Evolution de la viscosité apparente en fonction de la loi de comportement du fluide pour un confinement donné  $k=0.29$  : (a)  $n=0.7$  (b)  $n=0.1$

Sur les figures 4.a et 4.b, nous avons reporté les facteurs de correction des deux composantes de la force, celle de pression  $\lambda_{p+}(n,k)$  et celle de viscosité  $\lambda_{v+}(n,k)$  normalisées par  $\lambda(n,k=0)$ . Après traitement des données, ces deux composantes s'avèrent se comporter conformément aux lois de lubrification suivantes :

$$\lambda_+(n, k) \sim \lambda_{p+}(n, k) \sim \varepsilon^{-(1+4n)/2} \text{ et } \lambda_{v+}(n, k) \sim \varepsilon^{-(4n-1)/2}$$

qui, pour  $n = 1$ , donnent  $\varepsilon^{-5/2}$  dans le cas de la pression et  $\varepsilon^{-3/2}$  pour la viscosité, en parfait accord avec ce qui a été obtenu par Ben Richou *et al.* (2003) dans le cas newtonien. De ces deux relations, nous pouvons déduire que  $\lambda_p/\lambda_v$  varie comme  $\varepsilon^{-1}$  dans le cas des fluides d'Ostwald. Ceci a été bien vérifié. Sur les figures 5.a et 5.b, nous avons reporté les iso-viscosités apparentes dans le plan méridien de la sphère. Elles montrent l'existence d'un domaine toroïdal où la viscosité est très élevée, correspondant au cœur de la cellule d'écoulement due au backflow, et deux autres domaines de viscosité importante correspondant aux deux zones de stagnation amont et aval de la sphère. Les gradients de viscosité apparente sont d'autant plus grands que  $n$  est faible.

#### 4 Conclusion :

Dans cette communication, nous avons donné les résultats numériques sur les facteurs de correction normalisés de la force de traînée subie par une sphère en fonction de son confinement pour un fluide en loi puissance en écoulement uniforme, pour lesquels les solutions analytiques sont difficiles à obtenir autrement que par une approche asymptotique. Les résultats les plus importants obtenus sont que le facteur de correction normalisé de cette force dépend du confinement et du comportement du fluide suivant une fonction de puissance  $n$ , ce qui a pour conséquence de rendre le facteur de correction normalisé de la vitesse de sédimentation dépendant uniquement de  $k$ . La décomposition de cette force en forces de pression et de viscosité fait apparaître qu'en régime de lubrification, celles-ci ont un comportement en  $\varepsilon^{-f(n)}$  cohérent avec les exposants obtenus dans le cas newtonien. Cette analyse a également été effectuée dans le cas d'un écoulement de Poiseuille. L'ensemble de ces résultats nous permettra de déterminer la vitesse relative de la particule, discutée en introduction par l'adoption d'une méthode inverse dans le cas d'un tel problème non linéaire. Ce résultat simplifie les mesures de la viscosité apparente dans un viscosimètre à chute de bille pour un fluide en loi puissance puisqu'il implique que seule la connaissance du facteur de correction dû au confinement est nécessaire pour corriger les mesures réalisées.

#### Références:

- Ben Richou, A., Ambari, A. and Naciri, J. K 2003 Correction factor of the Stokes force undergone by a sphere in the axis of a cylinder in uniform and Poiseuille flows. *Eur. Phys. J. Appl.* **24**, 153-165
- Cho, Y.I. and Hartnett, J.P. 1983 Drag coefficient of a slowly moving sphere in non-Newtonian fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **12**, 243-247
- Clift, R., Grace, J. J. & Weber, M. E. 1978 Bubbles, Drops and Particles. Ed. Academic press.
- Dazhi, G. and Tanner, R. I. 1985 The drag on a sphere in a power-law fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **17**, 1-12
- Johnson, M. W. 1960 Some variational theorems for non-Newtonian flow. *The Physics of Fluids* **3**, 871-878
- Katz, J. and Plotkin, A. 1991 Low speed aerodynamics from wing theory to panel methods. McGraw-Hill Book Co., New York, NY, series in Aeronautical and Aerospace Engineering
- Missirlis, K. A., Assimacopoulos, D., Mitsoulis, E. and Chhabra, R. P. 2001 Wall effects for motion of spheres in power-law fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **96**, 459-471
- Peyret, R. and Taylor, T.D. 1985 Computational methods for fluid flows. Springer-Verlag, N.Y
- Slattery, J. C. 1962 Approximations to the drag force on a sphere moving slowly through either an Ostwald-De Waele or a Sisko fluid. *Am. Ind. Chem. Eng. J.* **8**, 663-667.
- Wasserman, M.L. and Slattery, J.C. 1964 Upper and lower bounds on the drag coefficient of a sphere in a power-model fluid. *Am. Ind. Chem. Eng. J.* **10**, 383-388.