

Etude des solutions élémentaires du problème de filtration tangentielle

Sondes Khabthani^{1,2} & Lassaad El Asmi¹

¹ Laboratoire d'Ingénierie Mathématique

Ecole Polytechnique de Tunisie, rue El Khawarezmi, BP 743, La Marsa, Tunisie

² Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes

École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles, 10 rue Vauquelin - 75231 Paris Cedex 5 - FRANCE

Sondes.Khabthani@espci.fr

Résumé :

On étudie ici un modèle mathématique du problème de filtration tangentielle. Les écoulements dans la partie libre et dans la membrane sont supposés régis respectivement par les équations de Stokes et de Darcy. Ces deux systèmes d'équations sont couplés par une condition aux limites de glissement, prise sur les deux côtés de la membrane filtrante. La solution élémentaire de ce problème est calculée analytiquement pour les champs de vitesse et de pression dans la région où le fluide circule librement ainsi qu'à l'intérieur de la membrane. Les lignes de courants sont tracées et les résultats sont discutés en fonction du coefficient de glissement, la perméabilité et de l'épaisseur du milieu poreux.

Abstract :

We study the mathematical model of the tangential filtration problem. The flow is supposed to be governed by the Stokes equations in the fluid region and the Darcy's equations in the porous medium. These equations are coupled across the interface by a slip boundary condition. We calculate analytically the elementary solution associated to the velocity and the pressure in the fluid and the porous medium. The elementary flow in the several regions is derived. We calculate numerically the streamlines and represent them for various values of the slip coefficient and the characteristics of the porous slab, i.e. its thickness and permeability.

Mots-clefs :

Filtration; condition de glissement ; Fonction de Green

1 Introduction

La modélisation du processus de filtration tangentielle d'un fluide chargé de particules est un sujet d'intérêt majeur dans l'industrie et le génie des procédés. Les applications couvrent en particulier les procédés de traitement des effluents industriels et de la purification de l'eau. On s'intéresse ici à l'aspect hydrodynamique de ces procédés et en particulier à l'étude, à l'échelle des particules, des interactions particule-particule et particule-paroi de la membrane filtrante. Cette étude pourrait servir à une meilleure compréhension du phénomène de colmatage qui reste encore l'une des principales questions à résoudre dans le cadre de l'optimisation des mécanismes de filtration. On calcule ici la solution fondamentale qui est nécessaire pour établir une modélisation de la filtration tangentielle au moyen d'un code construit sur la base de la méthode des éléments de frontière. Ce code permettrait plus précisément de modéliser l'écoulement d'une suspension concentrée en particules au voisinage d'une paroi poreuse au travers de laquelle le fluide s'écoule. Pour le calcul de cette solution fondamentale, on utilise des conditions particulières de glissement sur les deux surfaces de la membrane.

On suppose que le fluide occupe un domaine non borné constitué de trois régions. Une première région constituée par le demi-espace semi-infini borné d'un côté par la surface supposée plane de la membrane filtrante. Cette première région contient l'écoulement moteur supposé régi par

les équations de Stokes. Une deuxième région correspondant à l'espace dans le milieu poreux, où l'écoulement est supposé régi par les équations de Darcy. La troisième région est constituée de l'espace semi-infini qui se trouve de l'autre côté de la membrane poreuse. Dans cette région, l'écoulement est animé par le flux de fluide traversant la paroi poreuse et il est supposé également régi par les équations de Stokes.

La condition à la limite sur l'interface fluide-milieu poreux a fait l'objet de plusieurs travaux : Beavers & Joseph (1967), Beavers *et al.* (1974), Hornung (1997), Jäger & Mikelić (2000), Saffman (1971), Sahraoui & Kaviany (1992). La condition classique indique que le fluide ne glisse pas le long de la paroi poreuse. Cependant le travail expérimental de Beavers & Joseph (1967) montre que la vitesse de glissement n'est pas nulle. Ils ont proposé une condition à l'interface perméable pour décrire l'interaction entre l'écoulement à l'intérieur du milieu poreux et l'écoulement à l'extérieur qui s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial n} = \frac{\sigma}{\sqrt{K}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_d)$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale, \mathbf{u}_s est la composante tangentielle de la vitesse de l'écoulement de Stokes, \mathbf{u}_d est la composante tangentielle de la vitesse de Darcy, K la perméabilité du milieu poreux et σ le coefficient de glissement (sans dimension). Cette condition a été également étudiée par Saffman (1971), qui montre que la condition de glissement décrit proprement le phénomène physique de l'écoulement laminaire au-dessus d'un milieu poreux et a montré que le terme u_d peut être omis lorsque la perméabilité est assez faible. Les travaux numériques faites par Sahraoui & Kaviany (1992) ainsi que les travaux expérimentaux réalisés par Gupte & Advani (1997) appuient ces résultats.

Les écoulements étant à faible nombre de Reynolds, le problème est régi par des équations linéaires et peut être résolu par la méthode de la fonction de Green. On calcule ici analytiquement la solution élémentaire due à une force ponctuelle exercée au dessus de la plaque poreuse. La fonction de Green du problème est ainsi obtenu pour chacune des trois régions et est explicitée sous forme de transformée de Hankel. L'implémentation numérique des résultats analytiques trouvés nous permettra de visualiser les trajectoires de l'écoulement des particules fluides dans les trois milieux connexes. L'allure de l'écoulement sera alors discuté en fonction du coefficient de glissement ainsi que la perméabilité et l'épaisseur du milieu poreux.

2 Solutions élémentaires analytiques du problème couplé Stokes-Darcy-Stokes

La fonction de Green correspond à la solution due à une force ponctuelle qu'on supposera placée en un point y de la région fluide Ω_1 et à une distance h d'une plaque poreuse d'épaisseur e (cf. Fig.2.1). Les champs de pression et de vitesse du fluide, associés à cette fonction de Green, calculés en un point x de Ω_1, \mathcal{P} et Ω_2 seront notés par $(H^k(x,y), G^k(x,y))$.

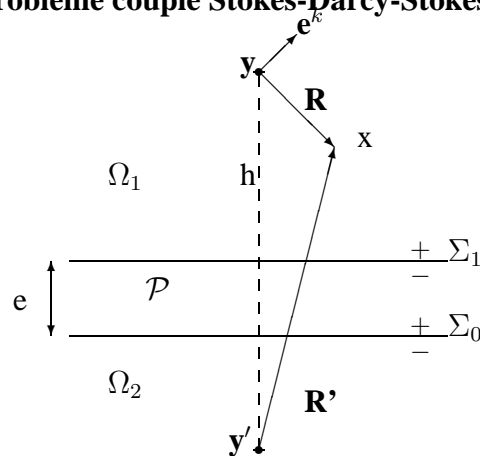


Fig.2.1. Stokeslet au-dessus d'une paroi poreuse

Les équations qui régissent l'écoulement dans les trois domaines se présentent comme suit:

$$\mu \Delta \mathbf{G}^k - \nabla H^k = -f \mathbf{e}^k \delta(x - y) \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{G}^k = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (1)$$

f représente l'intensité de la force ponctuelle, \mathbf{e}^k est le vecteur unitaire dans la direction k , δ est la masse de Dirac et μ est la viscosité du milieu fluide.

$$\mathbf{G}^k = -\frac{K}{\mu}\nabla H^k \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{G}^k = 0 \quad \text{dans } \mathcal{P} \quad (2)$$

où K est la perméabilité du milieu poreux.

$$\mu\Delta\mathbf{G}^k - \nabla H^k = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{G}^k = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3)$$

On suppose par ailleurs que les solutions recherchées tendent vers zéro à l'infini. Elles vérifient aussi les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} H^k(\Sigma_1^+) &= H^k(\Sigma_1^-) & H^k(\Sigma_0^+) &= H^k(\Sigma_0^-) \\ G_3^k(\Sigma_1^+) &= G_3^k(\Sigma_1^-) & G_3^k(\Sigma_0^+) &= G_3^k(\Sigma_0^-) \\ \frac{\partial G_\beta^k}{\partial x_3}(\Sigma_1^+) &= \frac{\sigma}{\sqrt{K}}(G_\beta^k(\Sigma_1^+) - G_\beta^k(\Sigma_1^-)) & \frac{\partial G_\beta^k}{\partial x_3}(\Sigma_0^-) &= -\frac{\sigma}{\sqrt{K}}(G_\beta^k(\Sigma_0^-) - G_\beta^k(\Sigma_0^+)) \end{aligned}$$

Blake (1971) a montré que la fonction de Green due à une force ponctuelle exercée dans un fluide au-dessus d'une paroi imperméable peut être construite à partir d'un Stokeslet et d'images de singularités. On utilise ici la même idée pour résoudre le problème couplé Stokes-Darcy. La solution dans le milieu Ω_1 est donnée sous forme de la somme d'un Stokeslet placé au point y dans un domaine infini, d'un Stokeslet image placé en y' avec des intensités respectives f and f' et d'un terme complémentaire, (w_j^k, s^k) , qui est aussi solution à l'équation de Stokes dans Ω_1 et qui satisfait à des conditions aux limites appropriées. Le domaine étant axisymétrique, on applique la transformée de Fourier bidimensionnelle aux équations modélisant le problème couplé. On obtient donc des solutions radiales qu'on exprime en fonction de la transformée de Hankel d'ordre zéro. Comme les variables indépendantes ici sont ρ et R'_3 , on utilise la notation:

$$\mathcal{H}_0(g)(\rho, R'_3) = \int_0^{+\infty} \xi g(\xi, R'_3) J_0(\xi\rho) d\xi$$

On passe à des équations sans dimension en utilisant comme longueur de référence h . Ainsi ξ , R_i ($i = 1, 2, 3$) seront des quantités sans dimension. D'autres paramètres adimensionnés interviennent dans les équations: $\epsilon = \frac{e}{h}$ et $\kappa = \frac{\sqrt{K}}{h}$. Pour simplifier les expressions des solutions obtenues, on définit les fonctions adimensionnées suivantes:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2\kappa^2\xi}{\tanh(\epsilon\xi)}, \quad \theta = 1 + 2\sigma\kappa\xi, \quad \eta = \frac{\kappa}{\kappa\xi + \sigma}, \quad \gamma = 2\kappa\xi - \frac{1}{\kappa} \\ r &= \frac{1}{1 + \xi(\tau + \eta\theta)}, \quad \tau' = \frac{2\kappa^2\xi}{\sinh(\epsilon\xi)}, \quad S = \xi^2 r^2 \tau'^2 \end{aligned}$$

La solution élémentaire de l'écoulement dans le milieu fluide Ω_1 est alors donnée par:

$$\begin{aligned} \mu G_j^k &= \frac{1}{2}\mathbb{W}_j^k\phi - \frac{1}{2}\mathbb{W}_j^k\phi' - \mathbb{W}_j^3(J_{kl}\frac{\partial f_1}{\partial R'_l} + \delta_{3k}(\frac{\partial f_2}{\partial R'_3} + f_3)) \\ &+ \frac{\partial}{\partial R'_j}(J_{kl}\frac{\partial f_1}{\partial R'_l} + \delta_{3k}(\frac{\partial f_2}{\partial R'_3} + f_3)) \\ &- (1 - 2\sigma\kappa\frac{\partial}{\partial R'_3})\frac{\partial}{\partial R'_j}(J_{kl}\frac{\partial f_4}{\partial R'_l} + \delta_{3k}(\frac{\partial f_5}{\partial R'_3} + f_6)) \\ &- \frac{\partial}{\partial R'_j}(J_{kl}\frac{\partial f_7}{\partial R'_l} + \delta_{3k}\frac{\partial f_7}{\partial R'_3}) + \delta_{3k}\frac{\sigma}{\kappa}(1 + 2\kappa^2\frac{\partial}{\partial R'_3})\frac{\partial f_7}{\partial R'_j} \\ &- 2(\delta_{3j}J_{kl}\frac{\partial f_7}{\partial R'_l} - J_{kj}\frac{\partial f_7}{\partial R'_3}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$H^k = \frac{\partial}{\partial R_k} \phi - \frac{\partial}{\partial R'_k} \phi' - 2 \frac{\partial}{\partial R'_3} [J_{kl} \frac{\partial f_1}{\partial R'_l} + \delta_{3k} \frac{\partial f_2}{\partial R'_3} + \delta_{3k} f_3] \quad (5)$$

où les fonctions $f_i, i = 1..7$ sont les transformées de Hankel d'ordre zéro des fonctions radiales:

$$\begin{aligned} f_1(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{1+(2-\xi)\eta}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\psi}{1-S}\right) & f_2(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{\tau+1+(2-\xi+\sigma\gamma)\eta}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\psi}{1-S}\right) \\ f_3(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(S \frac{\psi}{1-S}\right) & f_4(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{1+(2-\xi)\eta}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\eta\psi}{1-S}\right) \\ f_5(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{\tau+1+(2-\xi+\sigma\gamma)\eta}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\eta\psi}{1-S}\right) & f_6(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\eta \frac{S\psi}{1-S}\right) \\ f_7(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0(\eta\psi) & \psi &= -\frac{f}{4\pi} \frac{e^{-\xi R'_3}}{\xi} = \mathcal{H}_0(\phi'), \quad \phi' = -\frac{f}{4\pi} \frac{1}{R'} \end{aligned}$$

$$J_{kl} = \delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} - \delta_{k3} \delta_{3l}, \quad \mathbb{W}_j^k = R'_k \frac{\partial}{\partial R'_j} - \delta_{kj}$$

Dans le milieu poreux on obtient la pression sous forme de somme des fonctions Υ_i suivantes ainsi que de leurs dérivées:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{(2-\xi)\eta+1}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\tau'\psi_1}{1-S}\right) & \Upsilon_2(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{(2-\xi)\eta+1}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\tau'\psi_2}{1-S}\right) \\ \psi_1 &= \psi_0 e^{\xi(R'_3-1+\epsilon)} & \psi_2 &= \psi_0 e^{-\xi(R'_3-1+\epsilon)} \\ \Upsilon_3(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{(2-\xi)\eta+1}{\xi} \frac{S\psi_3}{1-S}\right) & \Upsilon_4(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{(2-\xi)\eta+1}{\xi} \frac{S\psi_4}{1-S}\right) \\ \psi_3 &= \psi_0 e^{-\xi(R'_3-1)} & \psi_4 &= \psi_0 e^{\xi(R'_3-1)} \\ \Upsilon_5(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{\eta \sinh(\xi(R'_3-1+\epsilon))}{1+\xi(\tau+\eta\theta)} \frac{\tau'\psi_0}{1-S}\right) & \Upsilon_6(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{\eta \sinh(\xi(R'_3-1))}{\xi} \frac{S\psi_0}{1-S}\right) \end{aligned}$$

La pression s'écrit donc sous la forme:

$$H_P^k = \frac{1}{2\kappa^2} \left[(J_{kl} \frac{\partial}{\partial R'_l} + \delta_{3k}) (\Upsilon_3 - \Upsilon_2) + \left(\frac{\partial}{\partial R'_k} + \delta_{3k} \right) (\Upsilon_1 - \Upsilon_4) - 4\delta_{3k} (\Upsilon_5 - \Upsilon_6) \right] \quad (6)$$

et la vitesse est obtenue à partir de l'équation (2):

$$\mu(G_j^k)_P = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R'_j} \left[(J_{kl} \frac{\partial}{\partial R'_l} + \delta_{3k}) (\Upsilon_3 - \Upsilon_2) + \left(\frac{\partial}{\partial R'_k} + \delta_{3k} \right) (\Upsilon_1 - \Upsilon_4) - 4\delta_{3k} (\Upsilon_5 - \Upsilon_6) \right] \quad (7)$$

On calcule finalement l'expression de la vitesse ainsi que la pression dans le milieu Ω_2 , qui se présente comme suit :

$$H_{\Omega_2}^k = 2 \frac{\partial}{\partial R'_3} \left[\frac{\partial F_1}{\partial R'_k} + \delta_{3k} \left(\left(1 - \frac{\partial}{\partial R'_3}\right) (F_1 - 2F_2) + \frac{\sigma}{\kappa} \frac{\partial F_2}{\partial R'_3} \right) \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mu(G_j^k)_{\Omega_2} &= \mathbb{W}_j^k \left[\frac{\partial F_1}{\partial R'_k} + \delta_{3k} \left(\left(1 - \frac{\partial}{\partial R'_3}\right) (F_1 - 2F_2) + \frac{\sigma}{\kappa} \frac{\partial F_2}{\partial R'_3} \right) \right] \\ &+ (\epsilon - 1) \frac{\partial}{\partial R'_j} \left[\frac{\partial F_1}{\partial R'_k} + \delta_{3k} \left(\left(1 - \frac{\partial}{\partial R'_3}\right) (F_1 - 2F_2) + \frac{\sigma}{\kappa} \frac{\partial F_2}{\partial R'_3} \right) \right] \\ &- (1 + 2\sigma\kappa) \frac{\partial}{\partial R'_3} \frac{\partial}{\partial R'_j} \left[\frac{\partial F_3}{\partial R'_k} + \delta_{3k} \left(\left(1 - \frac{\partial}{\partial R'_3}\right) (F_3 - 2F_4) + \frac{\sigma}{\kappa} \frac{\partial F_4}{\partial R'_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

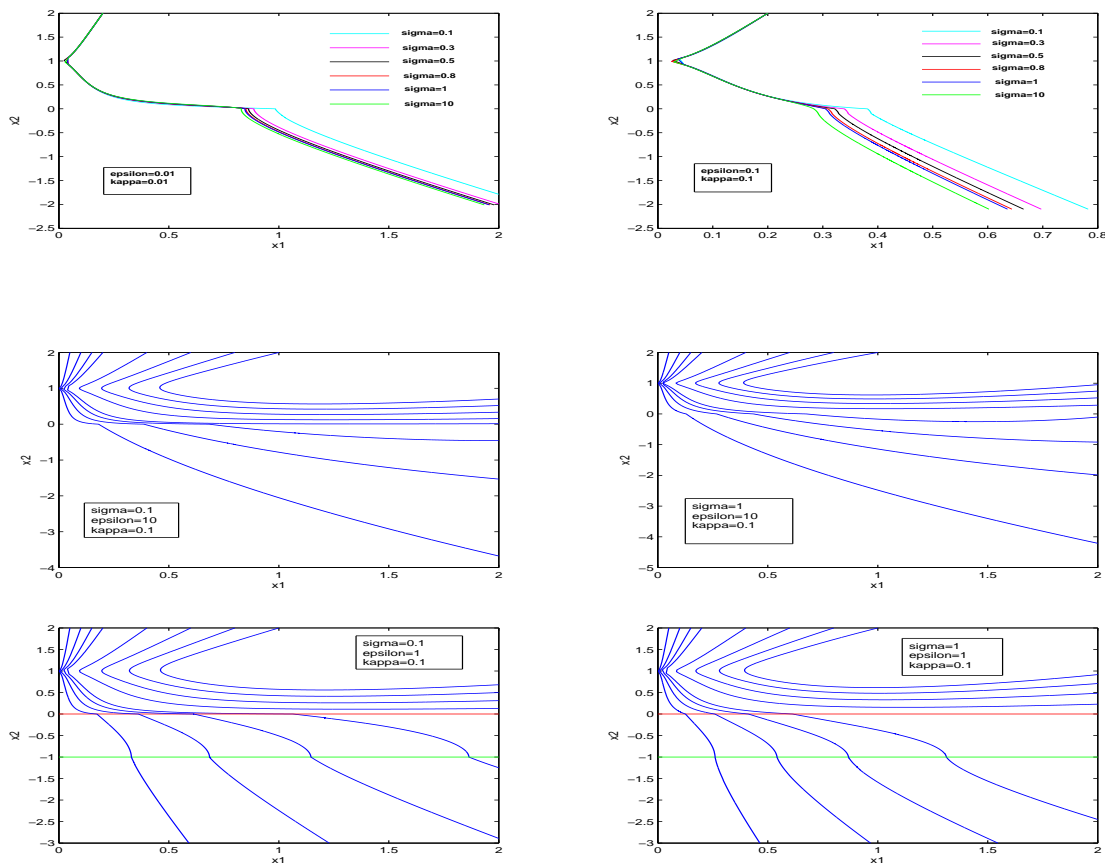
$$\begin{aligned} F_1(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{(2-\xi)\eta+1}{\xi\tau'} \frac{S\psi_1}{1-S}\right) & F_2(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{\eta}{\xi\tau'} \frac{S\psi_1}{1-S}\right) \\ F_3(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{(2-\xi)\eta+1}{\xi\tau'} \frac{S\eta\psi_1}{1-S}\right) & F_4(\rho, R'_3) &= \mathcal{H}_0\left(\frac{\eta^2}{\xi\tau'} \frac{S\psi_1}{1-S}\right) \end{aligned}$$

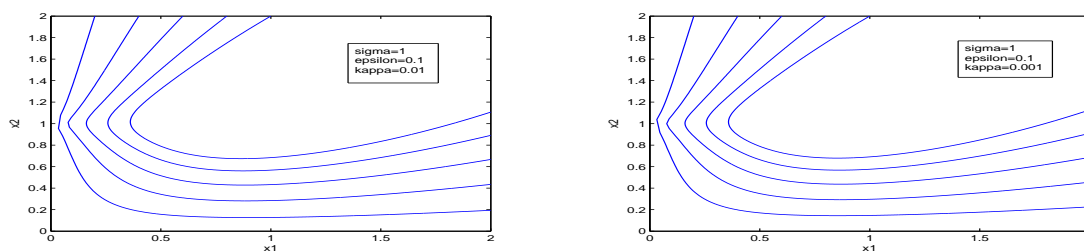
3 Résultats numériques

Dans cette section, on se propose d'illustrer les solutions analytiques obtenues par le calcul numérique des trajectoires, dans les trois milieux Ω_1 , \mathcal{P} et Ω_2 . On trace les lignes de courants pour diverses valeurs des paramètres sans dimension : le coefficient de glissement σ ainsi que ϵ et κ qui caractérisent respectivement l'épaisseur et la perméabilité du milieu poreux.

3.1 Trajectoires de l'écoulement

On se restreint ici au cas d'un Stokeslet perpendiculaire à la paroi poreuse. On s'intéresse en premier lieu à ce qui se passe dans Ω_1 . On remarque que le coefficient de glissement σ influence nettement l'allure des trajectoires dues à un Stokeslet normal à la paroi perméable. Lorsqu'on prend σ trop petit, on approche le cas d'un glissement parfait ($\frac{\partial G_\beta}{\partial x_3} = 0$): comme dans le cas d'une surface libre. Dans le cas où σ est très grand on retrouve le cas de la condition de non glissement (adhérence à la paroi). $\frac{\sqrt{K}}{\sigma}$ est la longueur de glissement, on doit avoir $\sigma \sim 1$ pour réaliser parfaitement la condition de glissement de Beavers et Joseph. Maintenant pour un coefficient de glissement donné, on peut visualiser les trajectoires de l'écoulement dans tout le domaine. L'allure des lignes de courants peut être interprétée suivant le paramètre $\frac{eh}{K} = \frac{\epsilon}{\kappa^2}$: lorsque ce paramètre est $\simeq 10$ ou 10^2 le fluide a tendance à s'infiltrer dans le milieu poreux et par suite on a un écoulement dans le milieu Ω_2 . Pour des valeurs supérieures, le fluide tend à se comporter comme dans un écoulement au-dessus d'une plaque imperméable.





4 Conclusions

La Solution élémentaire ou fonction de Green associée au problème de filtration le long d'une plaque poreuse a été calculée analytiquement. On a aussi calculé et visualisé les trajectoires de l'écoulement dans les différentes régions du domaine, pour diverses valeurs de σ , κ et ϵ . Cette solution qui modélise mathématiquement le couplage des équations de Stokes et de Darcy par la condition de glissement de Beavers et Joseph aux interfaces Σ_1 et Σ_0 pourra servir pour étudier numériquement ce problème par la méthode des éléments de frontière. Elle permettra d'étudier les interactions de plusieurs particules placées dans un écoulement de fluide visqueux incompressible au voisinage d'une plaque perméable. En particulier, il sera possible de chercher la force et le couple qui s'exercent sur chacune des particules en mouvement prenant en considération les différentes interactions hydrodynamiques.

Références

- Beavers,G., Joseph,D. 1967 Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J.Fluid Mech.* **30** 197-207
- Beavers,G.S.,Sparrow,E.M. and Masha,B.A. 1974 Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow *AICHE J.* **20** 596 - 597
- Blake,J.R. 1971 A note on the image system for a stokeslet in a no-slip boundary. *Proc.Cambridge Philos.Soc.* **70** 303-310
- Elasmi,L., Feuillebois,F. 2001 Green function for a Stokes flow near a porous slab. *Z.Angew.Math.Mech.ZAMM.* **81** 743-752
- Gupte,S.K., Advani,S.G. 1997 Flow near the permeable boundary of a porous medium: an experimental investigation using LDA. *Exps.Fluids* . **22** 408-422
- Hornung,U. 1997 Homogenization and porous media. *Interdisciplinary Applied Mathematics.Springer-Verlag,New York.*
- Jäger,W. and Mik elić,A. 2000 On the interface boundary condition by Beavers,Joseph and Saffman *SIAM J.Appl.Maths.* **60** 1111-1127
- Saffman,P.G 1971 On the boundary condition at the surface of a porous medium *Stud.Appl.Maths.* **2** 50-93
- Sahraoui,M. and Kaviani,M. 1992 Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *Intl J.Heat Mass transfer.* **35** 927-943