

# Modélisation de vibrations de barres aux moyennes fréquences par des quantités énergétiques

Cédric Devaux, Nicolas Joly & Jean-Claude Pascal

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine - UMR CNRS 6613  
Avenue Olivier Messiaen 72085 LE MANS Cedex 9  
[cedric.devaux@univ-lemans.fr](mailto:cedric.devaux@univ-lemans.fr)

## Résumé :

*Cet article présente une méthode basée sur des grandeurs quadratiques moyennées temporellement et spatialement, afin de décrire les transferts énergétiques dans les barres quand l'augmentation de la fréquence rend prohibitive l'utilisation d'une formulation classique en déplacement. Dans le cas particulier d'un amortissement faible, cette méthode est similaire à l'approche VCA (Vibrational Conductivity Approach). L'aspect novateur réside dans l'écriture de conditions limites pour les parties actives et réactives de l'intensité de structure, à partir d'une description des différentes jonctions par des impédances.*

## Abstract :

*This paper presents a time- and space-averaged quadratic method for describing energy transfers in rods when the increase of the frequency makes the classical displacement formulation difficult to use. In the particular case of a slight damping, this method is similar to the VCA (Vibrational Conductivity Approach). What is new is the computation of boundary conditions for both active and reactive structural intensity by describing junctions with impedances.*

## Mots-clefs :

**méthodes énergétiques ; intensité de structure ; conditions limites**

## 1 Introduction

L'utilisation d'outils de modélisation en acoustique et vibrations permet de prédire les chemins vibratoires et d'implémenter des solutions de contrôle du niveau de bruit engendré. Résoudre l'équation d'onde, par exemple à l'aide des Eléments Finis, est une procédure efficace en basses fréquences. En revanche la diminution de la longueur d'onde lorsque la fréquence augmente conduit d'une part à l'utilisation d'un maillage de plus en plus fin et d'autre part à une sensibilité accrue du système aux différentes imperfections, qu'il s'agisse des caractéristiques du matériau ou des conditions limites (Rébillard *et al.* (1997)). Ce dernier point implique la prise en compte d'incertitudes dans les méthodes Eléments Finis (Schuëller (2006)).

En hautes fréquences, la méthode SEA (Statistical Energy Analysis) donne une réponse quadratique moyennée fréquentiellement et spatialement pour des systèmes complexes (Lyon *et al.* (1995)). Cependant l'information résultante ne concerne que des densités d'énergie moyennées à l'échelle des différents sous-systèmes.

Développée pour les moyennes fréquences, l'approche VCA (Vibrational Conductivity Approach) initiée par Belov *et al.* (1977) est quant à elle basée sur une intensité acoustique ou structurale proportionnelle au gradient de la densité d'énergie totale, ce qui mène pour cette dernière à une équation présentant des similarités avec l'équation de la chaleur en régime stationnaire et conduit à parler d'analogie thermique. Basée sur une hypothèse d'ondes planes décorréliées, cette approche a été appliquée avec succès à des systèmes unidimensionnels tels

que des barres (Wohlever *et al.* (1992)) mais son extension à des systèmes multidimensionnels reste problématique (Langley (1995)).

Le travail présenté ici s'inscrit dans ce contexte et repose, comme d'autres auparavant (Carcattera *et al.* (1999); Djimadoum *et al.* (1995)), sur des grandeurs énergétiques moyennées afin de décrire les transferts d'énergie dans les barres. L'originalité de la formulation énergétique obtenue provient de l'écriture de conditions limites pour une intensité de structure complexe à partir de la description des différentes jonctions par des impédances.

## 2 Quantités énergétiques moyennées spatialement

Seules des hypothèses générales sont formulées : **i**) petites perturbations, **ii**) matériau homogène isotrope avec amortissement hystérétique (masse volumique  $\rho$ , section  $S$ , facteur d'amortissement  $\eta$ , module d'Young complexe  $E = E_0(1 + j\eta)$ , **iii**) régime harmonique à la pulsation  $\omega = 2\pi f$ , **iv**) système de grande dimension devant la longueur d'onde  $\lambda_0$ .

Pour un tel système, l'amplitude du déplacement  $u$  vérifie l'équation d'onde, avec pour nombre d'onde  $k = \sqrt{\rho\omega^2/E}$  pouvant s'écrire  $k = k_0(1 - j\theta)$  où  $\theta = (\sqrt{1 + \eta^2} - 1)/\eta$ .

Les grandeurs quadratiques que sont la densité d'énergie cinétique  $T$ , la densité d'énergie de déformation  $U$ , la densité d'énergie totale  $W = T + U$ , la densité lagrangienne  $L = T - U$  et l'intensité de structure  $I$  s'obtiennent à partir de  $u$  (tableau 1, où \* représente le nombre complexe conjugué). La partie réelle de la densité d'énergie de déformation est stockée tandis que

intensité de structure	$I = j\omega ESu_{,x}u^*/2$
densité d'énergie cinétique	$T = \rho S\omega^2 uu^*/4$
densité d'énergie de déformation	$U = ESu_{,x}u_{,x}^*/4$
densité d'énergie totale	$W = T + U$
densité lagrangienne	$L = T - U$

TAB. 1 – Amplitudes complexes des quantités énergétiques.

la partie imaginaire est proportionnelle à la puissance dissipée. La densité d'énergie cinétique est une exception en tant que quantité purement réelle.

Afin de supprimer les variations à l'échelle de la demi-longueur d'onde (nombre d'onde  $k + k^*$ ) et ne conserver que les composantes décrivant les transferts à grande échelle devant la longueur d'onde (nombre d'onde  $k - k^*$ ), ces quantités énergétiques peuvent être moyennées à l'échelle de la demi-longueur d'onde. Cette opération permet d'obtenir une densité d'énergie de déformation moyennée spatialement  $\langle U \rangle$  proportionnelle, à un facteur  $f(\theta) = \text{sh}(\pi\theta)/(\pi\theta)$  près, aux composantes à grande échelle de  $U$ . Elle est de plus proportionnelle à  $\langle T \rangle$  :

$$\langle U \rangle = \langle T \rangle (1 + j\theta)/(1 - j\theta).$$

Comme toutes les autres quantités énergétiques moyennées spatialement, l'intensité de structure moyennée  $\langle I \rangle$  vérifie, entre les jonctions, l'équation différentielle

$$\Delta \langle I \rangle + (k - k^*)^2 \langle I \rangle = 0. \quad (1)$$

Le nombre d'onde  $k - k^*$  étant un imaginaire pur, l'intensité de structure moyennée  $\langle I \rangle$  est la solution évanescence d'une équation de propagation, quelle que soit la valeur du facteur d'amortissement  $\eta$ . Dans le cas particulier d'un amortissement faible, cette équation est similaire à l'équation de base de l'approche VCA (Belov *et al.* (1977)).

Les densités d'énergie moyennées s'obtiennent à partir de l'intensité complexe moyennée. Comme en acoustique (Smith *et al.* (1964)), l'intensité et les densités d'énergie (tableau 1) sont liées par :

$$I_{,x} = -2j\omega(T - U) + P, \quad (2)$$

où la puissance injectée  $P$ , associée aux forces extérieures  $f_x$ , est définie par

$$P = -j\omega f_x \cdot u^*/2. \quad (3)$$

Moyenner spatialement l'équation (2) et utiliser la proportionnalité entre  $\langle T \rangle$  et  $\langle U \rangle$  permet de calculer  $\langle T \rangle$  par exemple, puis d'en déduire  $\langle U \rangle$ ,  $\langle W \rangle$  et  $\langle L \rangle$ .

### 3 Conditions limites

Les grandeurs énergétiques moyennées spatialement, d'abord l'intensité puis les densités d'énergie, s'obtiennent en résolvant l'équation (1) avec les conditions limites pour des jonctions actives ou passives.

#### 3.1 Jonctions actives

Pour une jonction active située en  $x = a$  où le chargement concentré  $f_x$  est appliqué, l'intensité moyennée  $\langle I \rangle$  et sa dérivée spatiale  $\langle I \rangle_{,x}$  sont discontinues. Les deux conditions portent sur les valeurs limites à gauche  $\langle I \rangle (a^-)$  et à droite  $\langle I \rangle (a^+)$  et font notamment apparaître la puissance injectée  $P$ . La première condition s'écrit

$$\langle I \rangle (a^+) - \langle I \rangle (a^-) = \frac{P}{2} \left( 1 + \frac{k^* P^*}{k P} \right) f(\theta) \quad (4)$$

tandis que la seconde fait appel à l'impédance ramenée  $Z_r$  de  $x = -L_1$  en  $x = a^-$

$$Z_r = \rho c \frac{e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)} + z_1(e^{jk(L_1+a)} + e^{-jk(L_1+a)})}{z_1(e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)}) - e^{jk(L_1+a)} - e^{-jk(L_1+a)}}. \quad (5)$$

et s'écrit finalement

$$\frac{\langle I \rangle (a^+)}{\langle I \rangle (a^-)} = 1 + \frac{P \left( 1 + \frac{k^* P^*}{k P} \right)}{2j \frac{P P^*}{f_x f_x^*} \left( Z_r - \frac{k^* Z_r^*}{k} \right)}. \quad (6)$$

#### 3.2 Jonctions passives

##### 3.2.1 Conditions mixtes

L'amplitude du déplacement  $u$  vérifie la condition d'impédance  $u_{,n}(L) + jkzu(L) = 0$ , où  $z$  est l'impédance spécifique en  $x = L$  :  $z = z_1$  quand  $L = -L_1$  et  $z = z_2$  quand  $L = L_2$ . L'impédance spécifique s'écrit  $z = \frac{1}{\rho c} \left( \frac{K}{j\omega} + C \right)$ ,  $c$  désignant la célérité des ondes,  $K$  et  $C$  désignant respectivement la raideur et l'amortissement de la jonction. L'utilisation de cette condition d'impédance conduit à la condition mixte suivante pour l'amplitude complexe de l'intensité de structure moyennée (Devaux *et al.* (2006)) :

$$\langle I \rangle_{,n} (L) + j(k - k^*) \frac{1 + zz^*}{z + z^*} \langle I \rangle (L) = 0. \quad (7)$$

### 3.2.2 Changement de matériau ou de section

Les conditions limites concernant un changement de matériau ou de section en  $x = d$  (Figure 1) font intervenir les trois impédances spécifiques  $z_{a-}$ ,  $z_a$ ,  $z_{a+}$  ainsi que les trois impédances spécifiques  $z_{b-}$ ,  $z_b$ ,  $z_{b+}$ , liées respectivement par  $z_{a+} + z_{a-} = z_a$  et  $z_{b+} + z_{b-} = z_b$ .

En  $x = d$  le déplacement et la contrainte normale sont continus :  $u(d^-) = u(d^+)$  et  $E_1 S_1 u_{,x}(d^-) = E_2 S_2 u_{,x}(d^+)$ . L'intensité de structure moyennée est continue et la première condition s'écrit

$$\langle I \rangle (d^+) = \langle I \rangle (d^-). \quad (8)$$

Des conditions mixtes de la forme (7) peuvent être écrites pour les intensités moyennées  $\langle I \rangle (d^-)$  et  $\langle I \rangle (d^+)$ , en ramenant les impédances  $z_1$  et  $z_2$  pour calculer  $z_{d-}$  et  $z_{d+}$ . La deuxième condition porte donc sur le rapport  $\langle I \rangle_{,x} (d^+) / \langle I \rangle_{,x} (d^-)$  :

$$\frac{\langle I \rangle_{,x} (d^+)}{\langle I \rangle_{,x} (d^-)} = - \frac{k_2 - k_2^*}{k_1 - k_1^*} \frac{1 + z_{d+} z_{d+}^*}{1 + z_{d-} z_{d-}^*} \frac{z_{d-} + z_{d-}^*}{z_{d+} + z_{d+}^*} \quad (9)$$

## 4 Application numérique

Les calculs ont été effectués pour des ondes purement longitudinales se propageant à une fréquence de 4000 Hz dans de l'acier (tableau 2) entre  $-L_1 = -10$  m et  $d = 3$  m, et dans de l'aluminium (tableau 2) entre  $d = 3$  m et  $L_2 = 10$  m (Figure 1). La connexion entre les deux barres est supposée parfaitement rigide. Une première force concentrée  $f_{x_1} = 1$  N est appliquée en  $a = -2$  m et une seconde  $f_{x_2} = 2$  N en  $b = 7$  m. L'impédance spécifique  $z_1$  vaut  $z_1 = 0.05 + 0.01j$  signifie que la jonction située en  $x = -L_1$  est fortement réfléchissante et peu dissipative. L'impédance spécifique  $z_2 = 0.1$  signifie que la jonction située en  $x = L_2$  est fortement réfléchissante. Les quantités énergétiques locales sont calculées à partir de la formulation en déplacement, tandis que les quantités énergétiques moyennées spatialement sont obtenues à l'aide de la formulation présentée dans cet article.

La discontinuité de masse volumique en  $x = d$  implique une discontinuité de la première dérivée spatiale de l'intensité de structure locale (calculée à partir du champ de déplacement) comme de l'intensité moyennée spatialement. La formulation moyennée permet d'obtenir une bonne reconstitution de cette discontinuité (Figure 2a).

Une fois moyennées spatialement, les variations spatiales à petite échelle des quantités énergétiques telles que les densités d'énergie sont supprimées (Figure 2b et c). Un modèle Eléments Finis basé sur le champ de déplacement avec 6 éléments par longueur d'onde nécessiterait 76 noeuds à 4000 Hz, sans tenir compte du dédoublement des noeuds là où doit être représentée une discontinuité, tandis que très peu de noeuds sont nécessaires sur  $-L_1 \leq x \leq L_2$  à la représentation des quantités énergétiques moyennées. Cette approche s'avère donc pertinente dès lors que la fréquence augmente.

	milieu 1	milieu 2
Masse volumique $\rho$ ( $kg\ m^{-3}$ )	7800	2700
Section $S$ ( $cm^2$ )	1.3	1.7
Module d'Young $E$ (Pa)	$2.1 \cdot 10^{11} (1 + j \cdot 0.01)$	$0.7 \cdot 10^{11} (1 + j \cdot 0.01)$
Coefficient de Poisson $\nu$	0.3	0.3

TAB. 2 – Propriétés des barres considérées dans l'application numérique.

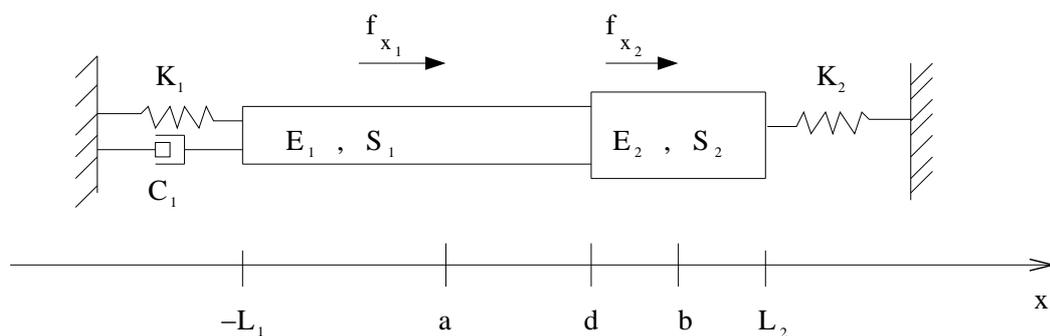


FIG. 1 – Configuration du système étudié.

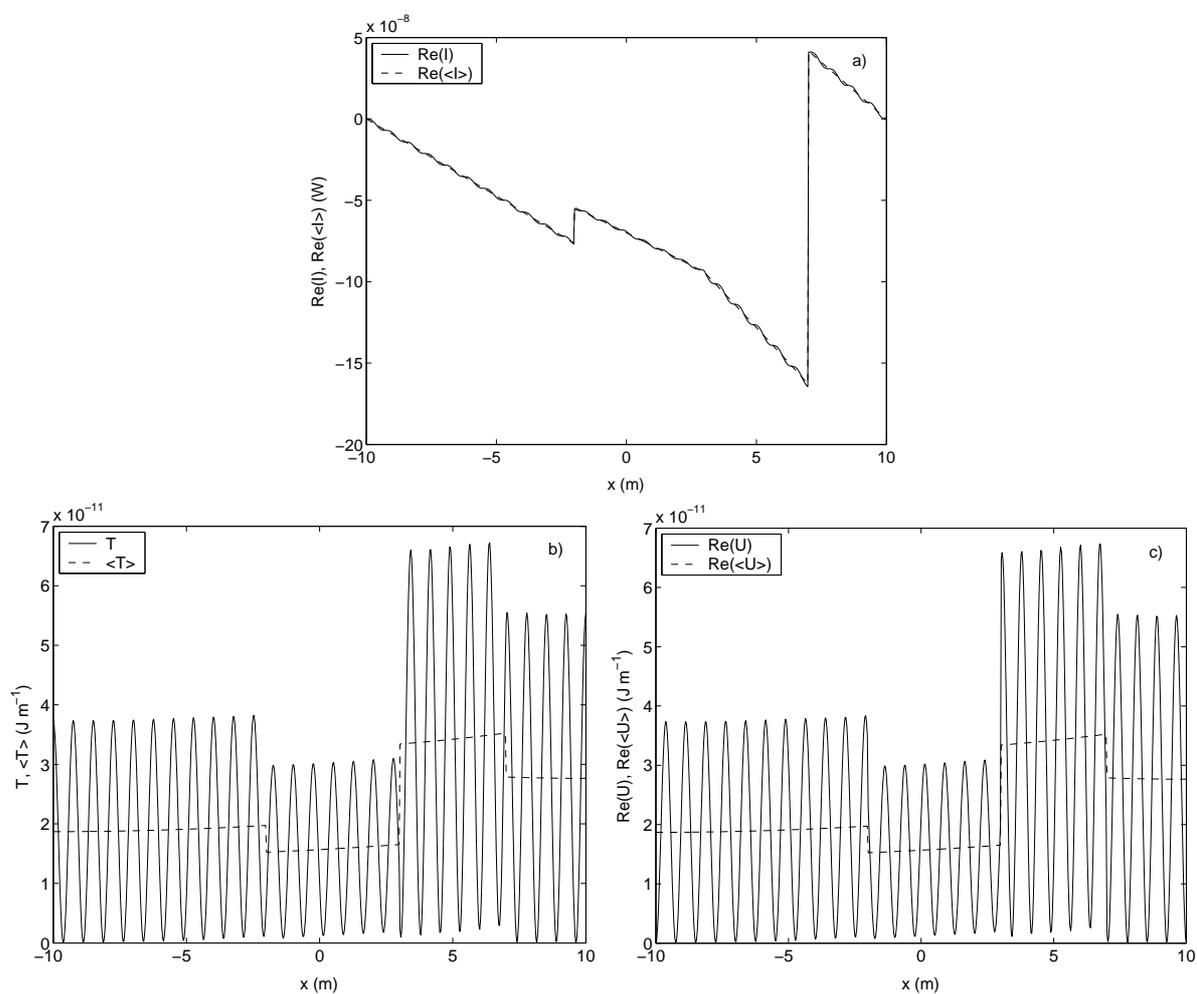


FIG. 2 – Quantités énergétiques à  $4000\text{ Hz}$  : a) partie réelle des intensités de structure, b) densités d'énergie cinétique, c) partie réelle des densités d'énergie de déformation. Ligne pleine : solution obtenue à partir de la formulation en déplacement, ligne pointillée : solution obtenue à partir de la formulation quadratique moyennée spatialement.

## 5 Conclusions

L'utilisation de variables quadratiques moyennées spatialement pour la description, à une échelle grande devant la longueur d'onde, des transferts énergétiques dans les barres a été présentée dans cet article. Elle induit l'écriture de nouvelles équations différentielles et surtout de nouvelles conditions limites vérifiées par ces variables, notamment l'intensité de structure complexe moyennée. Différentes conditions limites, prenant en compte les parties active et réactive de cette intensité, ont été obtenues à partir d'une caractérisation des jonctions par des impédances. Les cas de jonctions passives (changement des caractéristiques du milieu de propagation, frontières) font intervenir des conditions mixtes analogues aux conditions d'impédance d'une formulation en déplacement. Le cas des jonctions actives fait quant à lui intervenir non seulement des impédances mais également la puissance injectée dans la discontinuité d'intensité moyennée.

Une application numérique a montré que cette formulation quadratique moyenne est bien adaptée à une gamme fréquentielle pour laquelle résoudre l'équation d'onde, par exemple à l'aide d'une méthode Eléments Finis, n'est plus possible. De plus la description spatiale de la réponse énergétique obtenue est plus fine que celle d'un résultat SEA puisque l'intervalle sur lequel sont effectuées les moyennes est la demi-longueur d'onde.

## Références

- Rébillard E., Guyader J.L. 1997 Vibrational behaviour of lattices of plates. Basic behaviour and hypersensitive phenomena. *J. Sound Vib.* **205** 337-354
- Schuëller, G.I. 2006 On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis. *Comput. Struct.* **85** 235-243
- Lyon R.H., DeJonj R.G. 1995 Theory and Application of Statistical Energy Analysis. *Butterworth-Heinemann*
- Belov V.D., Rybak S.A., Tartakovski B.D. 1977 Propagation of vibrational energy in absorbing structures. *Sov. Phys. Acoust.* **23** (2) 115-119
- Wohlever J.C., Bernhard R.J. 1992 Mechanical energy flow models of rods and beams. *J. Sound Vib.* **153** (1) 1-19
- Langley R.S. 1995 On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *J. Sound Vib.* **182** (4) 637-657
- Carcattera A., Adamo L. 1999 Thermal analogy in wave energy transfer : theoretical and experimental analysis. *J. Sound Vib.* **226** (2) 253-284
- Djimadoum M., Guyader J.L. 1995 Vibratory prediction with an equation of diffusion. *Acta Acust.* **3** 11-24
- Smith Jr P.W., Schultz T.J., Malme C.I. 1964 Intensity Measurement in near fields and reverberant spaces. Bolt Beranek and Newman Inc. Rep. N° 1135
- Devaux C., Joly N., Pascal J.-C. A middle frequency method based on space-averaged quadratic variables for one-dimensional systems Proceedings of The Thirteen International Congress on Sound and Vibration, Vienna, July 2-6, 2006