

# Essai dynamique de rupture en flexion de matériaux quasi-fragiles obtenue à l'aide d'un dispositif de barres de Hopkinson.

Patrice BAILLY<sup>1</sup>, Franck DELVARE<sup>1</sup> & Sébastien RICHOMME<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Energétique Explosions Structures UPRES-EA 1205  
ENSI Bourges et Université d'Orléans  
88 boulevard Lahitolle, 18020 Bourges Cedex

<sup>2</sup> INERIS, Parc Technologique ALATA, BP 2, 60550 Verneuil-en-Halatte  
[franck.delvare@ensi-bourges.fr](mailto:franck.delvare@ensi-bourges.fr)

## Résumé :

*La rupture, sous chargement dynamique, des matériaux quasi-fragiles est un phénomène difficile à appréhender. La rupture apparaît pour des faibles déformations tout en dissipant peu d'énergie, contrairement à celle des matériaux ductiles. Le dispositif de barres de Hopkinson est utilisé pour la rupture dynamique en flexion d'éléments en béton. Les hypothèses de l'analyse des essais sur matériaux assez ductiles ne sont plus applicables. Une analyse adaptée des signaux enregistrés est développée. Elle permet de réaliser un calage temporel très précis des différents signaux et prend en compte le caractère dynamique transitoire des mouvements pendant l'essai. La méthode, utilisant des formulations analytiques des mouvements du système barres-corps d'épreuve, conduit à obtenir des résultats originaux.*

## Abstract :

*The fracture of quasi-brittle materials under dynamic loading is a difficult phenomenon to analyse. This fracture appears for very low deformations while dissipating weak energy, in opposition to that of ductile materials. The SHPB device is used for the dynamic bending fracture of concrete beams. The assumptions used to analyse the tests for ductile materials are not applicable any more. An adapted analysis of the recorded signals is developed. It makes possible to carry out a very accurate temporal check of signals and takes into account the transitional dynamic aspect of the motions during the test. Using analytical formulations, a transitional dynamic analysis of the system composed of the bars and of the specimen leads to original results.*

## Mots-clefs :

**flexion dynamique, matériau quasi-fragile, barres de Hopkinson**

## 1 Introduction

Beaucoup de matériaux de construction ont un mode de rupture qui est dit "quasi-fragile". Les études de risques amènent à envisager des calculs de structures qui doivent intégrer de manière correcte toutes les phases du comportement, y compris la phase "post-rupture", notamment en terme d'énergie dissipée.

L'approche expérimentale correspondante présente des difficultés liées aux possibilités de mesures. Le dispositif d'essais aux barres de Hopkinson peut être adapté à des essais de flexion dynamique et permet des mesures précises. Toutefois, les caractéristiques des matériaux testés engendrent des ruptures pour de très faibles déplacements et dans les premiers instants de l'essai. Les hypothèses faites usuellement, pour ce type d'essai sur des métaux, ne sont plus valides. Une analyse dynamique transitoire du système constitué des barres et du corps d'épreuve est indispensable pour réaliser un dépouillement correct.

## 2 Essai de flexion dynamique

Des essais de flexion dynamique sont réalisés avec un matériau de type béton. L'éprouvette testée est une poutre de longueur  $L = 16$  cm et de section carrée de 4 centimètres de côté  $a$ . Les caractéristiques du matériau sont  $E = 12$  GPa et  $\rho = 2000$  kg/m<sup>3</sup>. Le dispositif d'essai de flexion (Yokoyama (1993)) est un système de barres de Hopkinson composé d'une barre entrante et de deux barres sortantes (Figure 1). L'éprouvette, à caractériser, est sollicitée en flexion 3-points. Le chargement est réalisé par l'application d'une force sur une face de l'élément. Cette force peut-être le résultat d'un impact, ou comme dans notre cas, appliquée par une barre dite "entrante". Une onde de compression se propage alors dans une direction transversale de la poutre et se réfléchit sur les bords. Un temps caractéristique  $t_c$  de cette phase est la durée du trajet des ondes dans la dimension transversale, dans notre cas :

$$t_c = \frac{a}{C_p} = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

A une échelle de temps supérieure à  $t_c$  le mouvement peut être modélisé par une flexion de poutre. Ainsi, pour analyser cet essai dynamique trois cas peuvent être envisagés :

- Poutre "courte" : Si la durée de l'essai de flexion est très grande devant le temps nécessaire aux mouvements transversaux pour se propager sur une longueur égale à celle de la poutre, on pourra considérer un équilibre similaire à celui obtenu en statique. Cette durée est de l'ordre de grandeur de  $\Delta t = L/C_f$  ( $C_f$  étant la célérité des ondes de flexion). On observera dans ce cas que  $R \approx F/2$ . C'est l'hypothèse qui est généralement retenue pour des essais sur métaux ou des essais de résilience du type Charpy (Jiang et Al (2004)).
- Poutre "longue" : Si la durée de l'essai de flexion est du même ordre de grandeur que le temps nécessaire aux mouvements transversaux pour se propager sur une longueur égale à celle de la poutre, on notera alors que  $R \neq F/2$ . La prise en compte du mouvement transitoire de la poutre est alors nécessaire. Les essais sur matériaux quasi-fragiles présentent cette caractéristique.
- Poutre "infinie" : Si la durée de l'essai de flexion est plus petite que le temps nécessaire aux mouvements transversaux pour se propager sur une longueur égale à celle de la poutre, on notera que  $R \approx 0$ . Le problème sera alors le même que si la poutre était de longueur infinie.



FIG. 1 – Dispositif d'essai de flexion dynamique

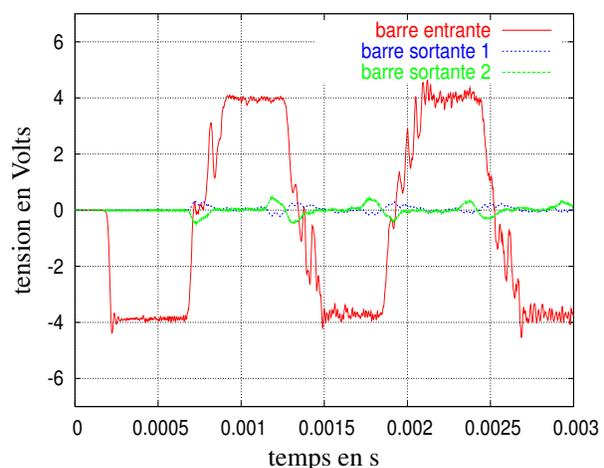


FIG. 2 – Signaux enregistrés

Si on examine les signaux enregistrés lors d'un essai dynamique de flexion 3-points (Figure 2), on remarque que les intensités des efforts mesurés sur les barres sortantes sont négligeables devant celle de l'effort mesurée sur la barre entrante. On note  $t_a$ , le temps de transfert de l'effort de son point d'application aux appuis. Avec ce type de matériau le modèle "poutre courte" est pratiquement impossible à réaliser (longueur  $L$  assez grande pour considérer une poutre, et assez petite pour que  $t_a$  soit petit devant la durée de l'essai). Le modèle de "poutre infinie" n'est donc valable que si le matériau est assez fragile pour que la durée de l'essai soit inférieure à  $t_a$ .

### 3 Analyse d'essai de flexion dynamique

Lorsque le seuil de rupture est atteint, en flexion, il y a ouverture d'une fissure. Le caractère imparfaitement fragile se traduit par le fait que la contrainte ne s'annule pas instantanément, mais qu'elle est fonction de l'ouverture de fissure. Pour un élément en flexion on recherche alors le moment transmis dans la section de rupture en fonction de l'ouverture angulaire. Le problème à résoudre est donc celui d'une poutre longue dont on connaît deux conditions aux limites (le déplacement  $U_e$  et la force  $F_e$ ) et dont on recherche les deux autres, la rotation  $\psi$  et le moment  $M$  (figure 3). En effet, la force  $F_e$  ainsi que la vitesse d'impact  $V_e$  s'expriment en fonction de l'onde de déformation incidente  $\epsilon_i$  et de l'onde de déformation réfléchie  $\epsilon_r$  mesurées par la jauge de déformation située au milieu de la barre entrante :

$$V_e(t) = \frac{dU_e}{dt}(t) = C_B(\epsilon_i(t) - \epsilon_r(t)) \quad 2F_e(t) = S_B E_B(\epsilon_i(t) + \epsilon_r(t)) \quad (1)$$

où  $C_B$ ,  $S_B$  et  $E_B$  sont respectivement la célérité des ondes dans les barres, la section et le module d'Young des barres.

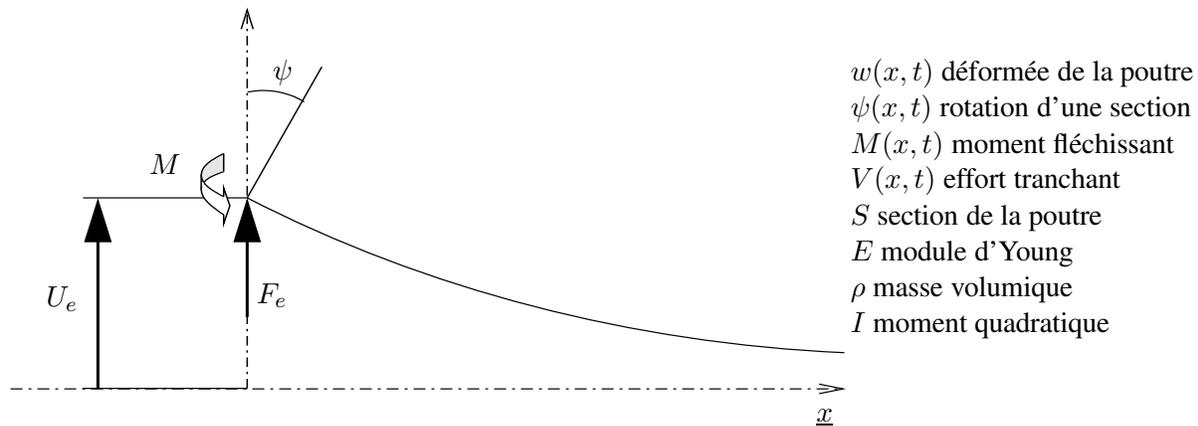


FIG. 3 – Poutre "semi-infinie" et conditions aux limites

Le modèle de Bernoulli permet de caractériser le comportement élastique de la poutre :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

En appliquant à cette équation une transformée de Laplace en temps et en posant  $\frac{\rho S}{EI} = \alpha^4$ , on montre que l'image opérationnelle  $\bar{w}(x, s)$  de  $w(x, t)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + (\alpha \sqrt{2s})^4 \bar{w} = 0 \quad (3)$$

dont la solution, en tenant des conditions à l'infini est donnée par :

$$\bar{w}(x, s) = e^{-\alpha x \sqrt{s}} \left[ \bar{K}_1 \cos(\alpha x \sqrt{s}) + \bar{K}_2 \sin(\alpha x \sqrt{s}) \right]. \quad (4)$$

En tenant compte des conditions en  $x = 0$  :

$$\bar{w}(0, s) = \bar{U}_e(s), \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(0, s) = \bar{\psi}(0, s), \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}(0, s) = \frac{1}{EI} \bar{M}(0, s), \quad \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3}(0, s) = \frac{1}{EI} \bar{F}_e(s) \quad (5)$$

on en déduit que l'image opérationnelle du mouvement de la poutre est donnée par :

$$\bar{w}(x, s) = e^{-\alpha x \sqrt{s}} \left[ \bar{U}_e(s) (\cos(\alpha x \sqrt{s}) - \sin(\alpha x \sqrt{s})) + \frac{\bar{F}_e(s)}{2EI\alpha^3 s \sqrt{s}} \sin(\alpha x \sqrt{s}) \right] \quad (6)$$

Il est possible d'expliciter le déplacement dans le domaine temporel, mais l'expression, qui fait intervenir des convolutions ainsi que des intégrales de Fresnel n'est pas indispensable à notre analyse. Une solution, pour une poutre de longueur infinie, continue en  $x = 0$ , a été explicitée par Ditkine et Proudnikov (1979). Toutefois, en revenant aux fonctions, on obtient l'expression temporelle de la rotation ainsi que du moment en  $x = 0$  :

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2EI\alpha^2} \int_0^t F_e(\tau) d\tau - 2\alpha \int_0^t \frac{V_e(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau \quad (7)$$

$$M(0, t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^t \frac{F_e(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau - 2EI\alpha^2 V_e(t) \quad (8)$$

En reportant dans l'expression de  $\psi$ , les expressions (1) de  $F_e$  et de  $V_e$  en fonction des ondes de déformation  $\epsilon_i$  et  $\epsilon_r$  et en posant

$$A = \frac{S_B E_B}{4EI\alpha^2} \quad B = 2\alpha C_B : \quad (9)$$

on obtient :

$$\psi(0, t) = \int_0^t \left[ A - \frac{B}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] \epsilon_i(\tau) d\tau + \int_0^t \left[ A + \frac{B}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] \epsilon_r(\tau) d\tau \quad (10)$$

On note  $t_r$ , l'instant où commence la fissuration de l'éprouvette. Pour  $t < t_r$ , on suppose que le comportement de la poutre est purement élastique (matériau quasi-fragile), ce qui se traduit en terme de rotation par  $\psi(0, t) = 0$  et donne donc une relation implicite entre  $\epsilon_i$  et  $\epsilon_r$  :

$$\int_0^t \left[ A - \frac{B}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] \epsilon_i(\tau) d\tau + \int_0^t \left[ A + \frac{B}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] \epsilon_r(\tau) d\tau = 0. \quad (11)$$

En s'inspirant des idées de Zhao et Gary (1996) pour le calage des essais de compression lors de faibles déformations, la relation précédente est utilisée pour réaliser une simulation de la réponse élastique de l'éprouvette et permet un calage très précis des deux ondes. En effet, à partir de l'onde incidente mesurée  $\epsilon_i^{mes}$ , il est possible d'estimer l'onde réfléchie  $\epsilon_r^{elas}$  correspondant à la réponse élastique de l'éprouvette. Ceci permet de repérer de manière précise le début de l'onde réfléchie. La figure 4 donne les ondes incidentes et réfléchies mesurées calées en temps ainsi que l'onde réfléchie obtenue à partir de la simulation élastique. Sur ce même graphique,

une des deux ondes transmises est aussi tracée. On remarque un décalage temporel de l'ordre de  $150\mu s$  qui correspond au temps nécessaire pour le transfert du chargement aux appuis  $t_a$ . Les ondes mesurées sont entachées d'un bruit de mesure. Dans la phase élastique, il est possible d'atténuer ce bruit, en introduisant un problème d'optimisation où l'on recherche les ondes incidente et réfléchie compatibles au sens de la relation (11) et qui s'approchent aux mieux des mesures. Il s'agit de minimiser la fonctionnelle

$$\int_0^{t_r} (\epsilon_i(t) - \epsilon_i^{mes}(t))^2 dt + \int_0^{t_r} (\epsilon_r(t) - \epsilon_r^{mes}(t))^2 dt$$

sous la contrainte égalité

$$\psi(0, t) = 0 \quad \forall t < t_r. \quad (12)$$

La figure 5 représente les ondes mesurées ainsi que les ondes obtenues grâce au problème d'optimisation. La figure 6 et la figure 7 représentent les vitesses et les forces en fonction du

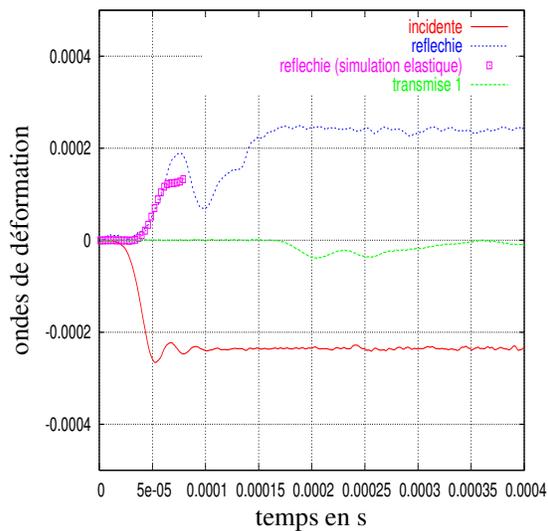


FIG. 4 – Ondes de déformations mesurées calées en temps

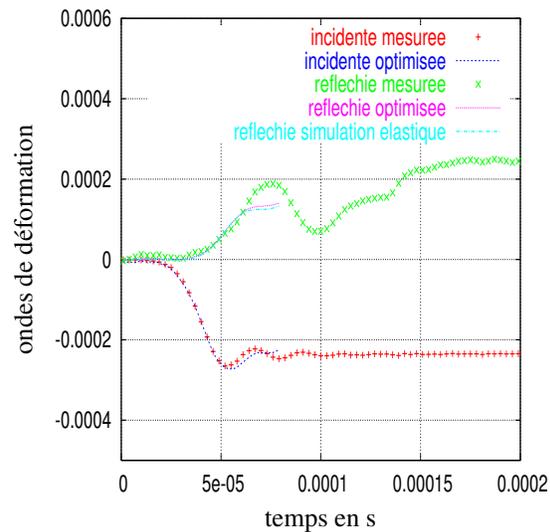


FIG. 5 – Ondes de déformations mesurées et optimisées calées en temps

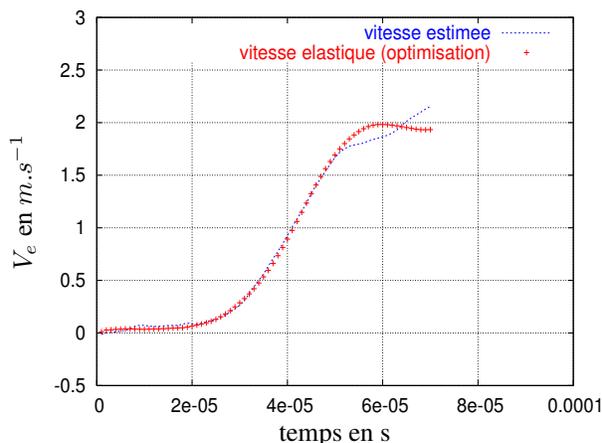


FIG. 6 – vitesses d'impact en force du temps

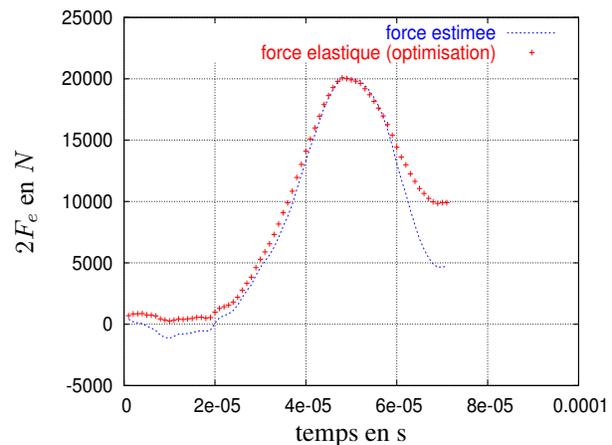


FIG. 7 – forces d'impact en force du temps

temps obtenues à partir des relations (1) en utilisant d'une part les ondes mesurées et d'autre part les ondes obtenues par le problème d'optimisation basé sur la simulation élastique. Sur ces

figures, on remarque que pour  $t < 50\mu s$ , les courbes coïncident et valident l'hypothèse d'un comportement purement élastique de la poutre.

Pour  $t > 50\mu s$ , on suppose que les phénomènes non linéaires sont uniquement localisés dans la section centrale de l'éprouvette (comportement quasi-fragile). On considère qu'une ouverture de fissure apparaît au niveau de la section centrale et que nous avons deux demi-poutres semi-infinies élastiques. Les relations (7) et (8) donnent alors une estimation de l'ouverture de fissure et du moment de flexion en fonction du temps et permettent d'établir une loi moment-ouverture de fissure (figure 8). Sur cette figure, nous avons tracé cette loi pour deux essais réalisés avec des vitesses d'impact différentes.

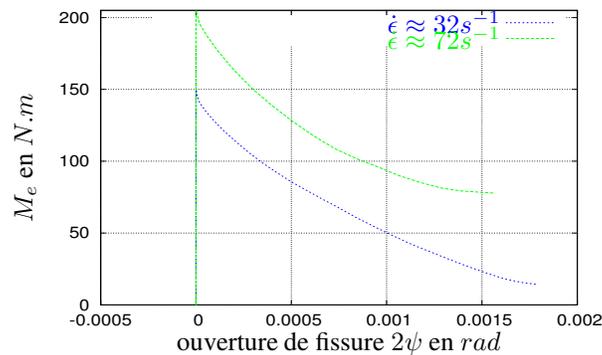


FIG. 8 – relations moment-ouverture de fissure ( $\dot{\epsilon}$  est la vitesse de déformation maximale estimée dans la phase élastique)

#### 4 Conclusion

Des essais dynamiques de flexion 3-points sont réalisés sur des éprouvettes de béton en utilisant un dispositif de barres de Hopkinson à deux barres sortantes. Le dépouillement des essais ne pouvant être réalisés de manière classique, une technique a donc été proposée. Elle est basée sur le fait que l'éprouvette se comporte dans les premiers instants de l'essai comme une poutre "semi-infinie" élastique. Ceci permet le calage précis ainsi que le débruitage dans les premiers instants des ondes de déformation mesurées. En supposant que la non-linéarité se localise dans la section fissurée (matériau quasi-fragile), cette technique permet l'identification de la relation moment-ouverture de fissure.

Il est envisagé d'utiliser et d'étendre la méthode présentée ici pour des essais de flexion sur des éléments en béton armé ou renforcé par des composites dans le but d'accéder au comportement dynamique post-fissuration de ces matériaux et de quantifier l'énergie dissipée par la rupture de ces éléments.

#### Références

- Yokoyama T., « Determination of Dynamic Fracture-Initiation Toughness Using a Novel Impact Bend Test Procedure », *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 115 , pp. 389-397,1993.
- Jiang F., Vecchio K., Rohatgi A., « Analysis of modified split Hopkinson pressure bar dynamic fracture test using an inertia model », *International Journal of Fracture*, vol. 126 , pp. 143-164,2004.
- Ditkine V., Proudnikov A., « Calcul opérationnel », *Editions MIR*, Moscou,1979.
- Zhao H., Gary G., « On the use of SHPB techniques to determine the dynamic behavior of mterials in the range of small strains », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33 ,n23, pp. 3363-3375,1996.