

## Simulation numérique de recherche de forme : application aux gilets de sauvetage gonflables

Julien Troufflard, Jean-Marc Cadou, Gérard Rio

Université de Bretagne Sud  
Laboratoire Génie Mécanique et Matériaux  
Rue de Saint-Maudé BP 92116 56321 Lorient Cedex  
troufflard@univ-ubs.fr

### Résumé :

*Cet article présente une application de la recherche de forme aux gilets de sauvetage gonflables. La recherche de forme est le nom générique désignant le processus de conception de la forme globale des structures légères instables telles que les structures gonflables. L'état d'équilibre statique des gilets gonflables est recherché pour analyser la forme générale, le volume contenu et la localisation des zones de plis. La méthode de relaxation dynamique avec amortissement cinétique permet d'éviter le problème de singularité de la matrice de raideur et le problème d'instabilité locale dans les zones de plis. Sa rapidité de convergence est très dépendante de la formulation de la matrice des masses. Dans cet article, plusieurs expressions des masses sont testées et leurs performances comparées entre elles.*

### Abstract :

*This paper presents an application of form-finding for lifejackets. Form-finding is the process in which the design of lightweight structures as inflatable structures is researched. The static equilibrium state is required for lifejackets to analyse their general form, contained volume and wrinkling zones localisation. The dynamic relaxation method with kinetic damping avoids the problem of singular stiffness matrix and local instability in wrinkling zones. Its convergence rate strongly depends on the mass matrix formulation. In this paper, some expressions for masses are tested and their efficiency are compared.*

### Mots-clefs :

### Recherche de forme, Relaxation dynamique, gilet de sauvetage gonflable

## 1 Introduction

La forme d'un gilet de sauvetage à l'état gonflé est impossible à prévoir à partir de la géométrie plane conçue en bureau d'études. En effet, la géométrie complexe du plan de conception et la présence de plis dans la forme finale rendent cette prévision très difficile par d'autres moyens que la simulation numérique. Actuellement, les concepteurs de gilets de sauvetage gonflables réalisent de nombreux prototypes pour vérifier si la forme finale répond à leurs attentes d'une part en terme de création de nouveaux modèles mais surtout en ce qui concerne le volume de gaz contenu. Ce volume de gaz est le critère majeur de conception car il induit l'intensité de l'aide à la flottabilité fournie à l'utilisateur.

Le comportement souple des peaux de l'enveloppe gonflable est modélisé par des éléments finis de membrane. L'utilisation de ce type d'élément implique le problème de singularité de la matrice de raideur due au manque de raideur en flexion. Ce problème numérique rencontré dans le cas des structures membranaires a conduit au développement des méthodes de recherche de forme. Le gilet de sauvetage gonflable se place dans ce cadre. La méthode de relaxation dynamique avec amortissement cinétique, proposée par Cundall (1976) et largement appliquée en

recherche de forme, notamment Barnes (1988), est une des méthodes classiques. L'utilisation de la dynamique explicite évite le problème d'inversion de la matrice de raideur qui est singulière étant donnée l'absence de rigidité en flexion des membranes. La dynamique explicite permet aussi d'éviter les problèmes numériques locaux d'instabilité due au flambement dans les zones de plis. Le mécanisme simple de dissipation de l'énergie cinétique offert par cette méthode permet d'aboutir à l'équilibre statique par un processus dynamique. La rapidité de convergence de la méthode est fortement liée à la matrice masse.

Dans cet article, l'impact de la formulation de la matrice masse sur la convergence est plus particulièrement étudiée. Pour ceci, trois expressions sont comparées, la matrice physique classique des masses, celle proposée par Han et Lee (2003) et une version modifiée de cette dernière. Dans une première partie, la méthode de relaxation dynamique est résumée. Ensuite, les différentes formulations des masses sont établies. Et enfin, une comparaison des performances de chacune est menée sur un cas de gilet de sauvetage.

## 2 Méthode de relaxation dynamique

Le problème de dynamique à résoudre est celui défini par la seconde loi de Newton :

$$\vec{F}_{acc} + \vec{F}_{int} = \vec{F}_{ext} \quad (1)$$

avec  $\vec{F}_{acc}$ ,  $\vec{F}_{int}$  et  $\vec{F}_{ext}$  respectivement les forces d'accélération, internes et externes. Les gilets de sauvetage gonflables sont soumis à des pressions internes relativement faibles (environ 150-200 mBars). Compte tenu des faibles déformations engendrées, les forces internes seront calculées pour un matériau élastique isotrope. Le chargement extérieur est modélisé par une pression suiveuse uniforme.

Après discrétisation par la méthode des éléments finis, l'expression [1] devient :

$$[M]\ddot{X} + R(X) = 0 \quad (2)$$

avec  $[M]$  la matrice masse diagonale,  $\ddot{X}$  et  $X$  respectivement le vecteur accélération et position aux noeuds et  $R(X)$  le résidu des forces internes et externes dépendant de la position des noeuds. Nous utilisons un élément fini de membrane triangulaire à trois noeuds et 3 degrés de liberté par noeud.

Une méthode de différences finies centrées (DFC) est couramment utilisée pour intégrer temporellement les équations de la dynamique. Elle conduit aux approximations suivantes pour le pas de temps  $\Delta t$  à l'incrément  $n$  :

$$\begin{aligned} \ddot{X}_n &= [M]^{-1} \cdot R(X_n) \\ \dot{X}_{n+\frac{1}{2}} &= \dot{X}_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \cdot \ddot{X}_n, \quad X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot \dot{X}_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Le schéma DFC est typiquement utilisé en recherche de forme par relaxation dynamique. Nous verrons plus loin que l'application du schéma de Tchamwa-Wielgosz (TW) permet une meilleure convergence de la méthode dans le cas d'une matrice physique des masses. Pour ce schéma, les vitesses et positions nodales sont habituellement calculées à l'incrément  $n+1$  selon Rio *et al.* (2005) :

$$\begin{aligned} \ddot{X}_n &= [M]^{-1} \cdot R(X_n) \\ \dot{X}_{n+1} &= \dot{X}_n + \Delta t \ddot{X}_n, \quad X_{n+1} = X_n + \Delta t \dot{X}_n + \phi \Delta t^2 \ddot{X}_n \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\phi$  est un paramètre supérieur ou égal à 1.

Pour l'application de ce schéma à la relaxation dynamique, le calcul des vitesses a été modifié

afin de résoudre un problème de divergence de la simulation. Cette divergence a tendance à apparaître aux alentours de la position d'équilibre. Les vitesses à  $n + 1$  seront calculées à partir de la moyenne des accélérations à  $n$  et  $n + 1$  :

$$\dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{X}_n + \ddot{X}_{n+1}) \quad (5)$$

L'utilisation du schéma TW permet de filtrer les hautes fréquences de vibrations numériques dues à la discrétisation spatiale par éléments finis. Le paramètre  $\phi$  exprime l'intensité de cette filtration.

Au cours du processus dynamique, l'énergie cinétique totale de la structure est contrôlée à chaque pas de temps. Pour chaque pic d'énergie cinétique rencontré, les vitesses nodales sont remises à 0. Ce traitement est répété jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait sur le résidu des forces ou sur les déplacements résiduels. En dissipant ainsi peu à peu l'énergie cinétique, le processus itératif dynamique conduit à la solution statique du problème d'une manière simple et efficace.

### 3 Expressions de la matrice masse

La convergence vers l'équilibre est fortement dépendante de la matrice masse diagonale. Pour la recherche de forme, l'expression générale de la masse au noeud  $i$  est donnée par Barnes (1974) :

$$m_i = \lambda \frac{\Delta t^2}{2} S_i \quad (6)$$

avec  $S_i$  un terme dépendant du matériau et de l'état de contrainte dans la membrane et  $\lambda$  un paramètre de convergence constant pour toute la structure. Cette expression [6] traduit une relation de stabilité définie par Courant *et al.* (1928). Le pas de temps  $\Delta t$  est arbitraire et typiquement égal à 1. Le terme  $S_i$  peut être décomposé en une partie matérielle et une partie géométrique relative à l'état de contrainte dans la membrane :

$$S_i = \sum_e (S_{mat}^e + S_{geo}^e) \quad (7)$$

Le type d'élément fini utilisé a une grande influence sur la formulation de [7]. C'est le premier aspect à prendre en compte. Ensuite, la raideur matérielle dépend évidemment du matériau de la structure et la raideur géométrique de l'état de contrainte. Pour un élément membrane à trois noeuds, l'expression suivante est proposée par Han et Lee (2003) :

$$S_i = \sum_e \frac{ep}{4.S_0^e} \left( \frac{E}{1-\nu^2} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy} \right) \quad (8)$$

avec  $S_0^e$  la surface initiale de l'élément  $e$  et  $ep$  l'épaisseur de la membrane.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_{xy}$  sont les composantes du tenseur des contraintes dans la membrane.  $E$  et  $\nu$  sont les coefficients d'une loi élastique isotrope.

Bien que cette expression soit une bonne évaluation de la raideur environnant chaque noeud, on s'aperçoit que le terme obtenu en injectant [8] dans [6] n'a pas la dimension d'une masse. Pour éviter ce problème d'homogénéité des dimensions, nous proposons la forme modifiée suivante :

$$S_i = \sum_e \frac{ep}{4} \left( \frac{E}{1-\nu^2} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy} \right) \quad (9)$$

L'expression [6] offre une bonne approximation des masses pour avoir une convergence optimale. De ce fait, la matrice physique classique des masses a peu d'intérêt en terme de rapidité

de convergence. Cependant, les masses physiques sont introduites ici comme élément de comparaison en terme de performance. Toujours dans le cas d'éléments membrane triangulaires à trois noeuds, la masse physique  $m^i$  au noeud  $i$  est obtenue en sommant sur chaque élément  $e$  incluant le noeud  $i$  :

$$m^i = \frac{1}{3} \sum_e \rho \cdot S_0^e \cdot ep \quad (10)$$

avec  $\rho$  la masse volumique des peaux de l'enveloppe gonflable.

## 4 Résultats

Le cas d'étude est un gilet de sauvetage de catégorie 150N. Les données pour ce calcul sont les suivantes :

- module d'Young :  $E = 125$  MPa
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0.41$
- pression de gonflage :  $p = 150$  mBars
- épaisseur de membrane :  $ep = 0.27$  mm

Au voisinage de la position d'équilibre du gilet, les deux parties inférieures sont en contact. L'interpénétration de ces zones est évitée par l'application d'une force aux noeuds équivalente à une méthode de pénalisation. Le déroulement du calcul par relaxation dynamique est illustré sur la figure 1 montrant la dissipation progressive de l'énergie cinétique du système. On distingue trois phases sur cette courbe. Dans la première phase, de hauts niveaux d'énergie cinétique sont atteints découlant du fort déséquilibre entre la forme initiale plane du gilet et son chargement de pression. La seconde phase traduit le mouvement des parties inférieures du gilet vers le plan de symétrie. Dans la troisième phase, on observe la stabilisation finale de la géométrie. La forme finale du gilet réel et gonflé numériquement est montrée sur la figure 2. Plusieurs

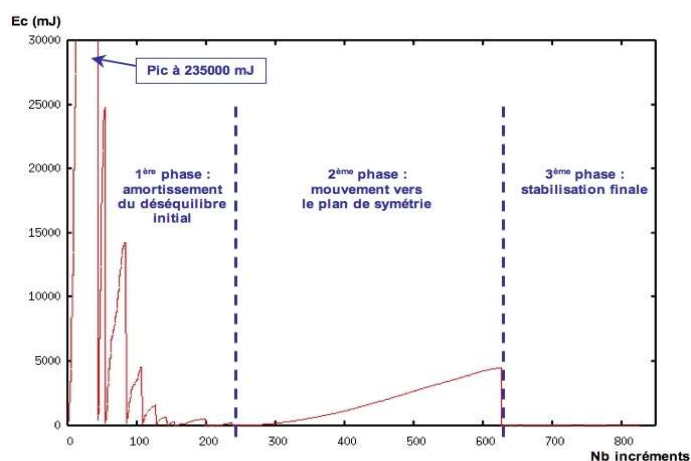


FIG. 1 – Evolution de l'énergie cinétique en fonction du nombre d'incrémentations

finesses de maillage sont utilisées. L'influence du paramètre  $\lambda$  de l'expression [6] est étudiée. Les résultats pour les expressions [8] et [9] des masses sont regroupés respectivement dans les tableaux 1 et 2. Le tableau 2 montre également des résultats pour une matrice masse physique avec le schéma TW. On constate une grande sensibilité au maillage du paramètre  $\lambda$  dans le cas de la formulation [8]. L'expression modifiée [9] efface cette sensibilité. De plus, les perfor-

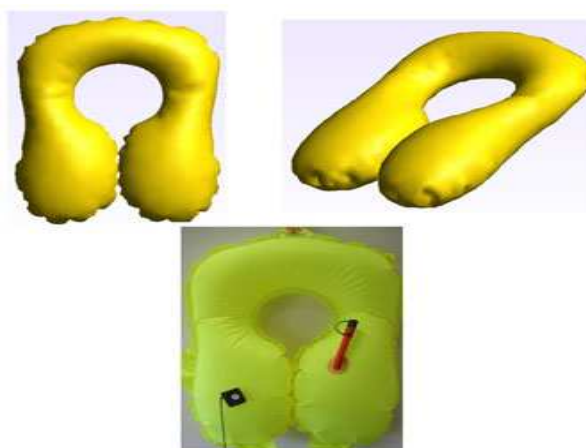


FIG. 2 – Forme finale du gilet de sauvetage (en haut : résultat de simulation, en bas : gilet réel)

Nb ddl	$\lambda$ :	100	400	800	1000	2000	3000	4000
1053	nb incr :	div	div	div	div	div	386	469
1971	nb incr :	div	div	div	div	1579	716	2288
4590	nb incr :	div	div	div	1574	2494	3086	3947
7611	nb incr :	div	div	2678	3839	4312	4800	5475
11349	nb incr :	div	div	4085	3850	6731	8162	9631
16506	nb incr :	div	3878	6947	7153	8612	11145	12210

TAB. 1 – Influence de  $\lambda$  sur le nombre d'incrémentes nécessaire (masses calculées selon expression [8])

Nb ddl	$\lambda$ :	2.2	2.5	3	4	5	6	TW ( $\phi = 1.1$ )
1053	nb incr :	div	div	298	350	390	428	415
1971	nb incr :	div	417	426	523	547	596	676
4590	nb incr :	div	div	837	1002	1125	1227	1919
7611	nb incr :	div	953	941	1301	1473	1548	2394
11349	nb incr :	div	1402	1572	1664	1995	2272	3772
16506	nb incr :	div	1800	1883	1991	2393	2611	4122

TAB. 2 – Influence de  $\lambda$  sur le nombre d'incrémentes nécessaire (masses calculées selon expression [9]) et résultats avec matrice masse physique en utilisant le schéma TW pour  $\phi = 1.1$ 

mances atteintes avec cette formule modifiée en terme de nombre d'incrémentes sont largement meilleures, notamment pour les maillages fins. Ceci a un intérêt concret dans son application en bureau d'étude pour la conception des gilets. En effet, les utilisateurs de cette simulation ne sont pas toujours initiés au calcul numérique. Les logiciels qui leur sont fournis doivent être simples d'utilisation en nécessitant très peu d'interventions de la part des utilisateurs. Cette version modifiée de l'expression des masses permet au concepteur de faire une recherche de forme avec une simulation performante quelquesoit la finesse de maillage.

Le tableau 2 montre aussi une comparaison de performance entre matrice masse physique et matrice masse selon l'expression [9]. Le schéma TW est utilisé dans le cas des masses physiques pour éviter un problème de divergence des calculs observée avec le schéma DFC. Une étude numérique sur un cas de coussin gonflable a permis de fixer le paramètre  $\phi$  pour améliorer la convergence mais les performances restent inférieures. On constate également des performances

similaires entre matrice masse physique et matrice masse selon l'expression [8].

L'application du schéma TW couplé à un calcul de masse selon l'expression [9] est une perspective de ce travail.

## 5 Conclusion

Dans cette étude, l'influence de la matrice masse sur les simulations par relaxation dynamique a été étudiée. Pour ceci, une comparaison entre plusieurs formulations de matrice masse a été réalisée. Une expression basée sur une formule de la littérature a été modifiée pour améliorer la rapidité de convergence et éviter l'influence de la finesse de maillage. Le but de ces simulations est leur application en bureau d'étude pour la conception de gilets de sauvetage gonflables.

Cette étude est financée par la région Bretagne et en collaboration avec la société Plastimo.



## Références

- P. A. Cundall 1976, *Explicit finite-difference methods in geomechanics*, Blacksburg, VA
- M. R. Barnes 1988, *Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes*, Computers & Structures, Volume 30, Issue 4, p.685-695
- S.-E. Han, K.-S. Lee 2003, *A study of the stabilizing process of unstable structures by dynamic relaxation method*, Computers & Structures, Volume 81, Issue 17, Pages 1677-1688
- G. Rio, A. Soive, V. Grolleau 2005, *Comparative study of numerical explicit time integration algorithms*, Advances in Engineering Software, Volume 36, Issue 4, Pages 252-265
- M. R. Barnes 1974, *Dynamic relaxation analysis of tension networks*, Int. Conf. on Tension Structures, London
- R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy 1928, *On the partial Difference Equations of Mathematical Physics*, Mathematische Annalen, Volume 100, p.32-74.