

## Phénomène de résonance paramétrique nonlinéaire dans un hauban du pont d'Iroise: Modélisation et expérimentation

Olivier Boujard<sup>(1)</sup>, Stéphane Pernot<sup>(2)</sup>, Alain Berlioz<sup>(3)</sup>, Claude Lamarque<sup>(2)</sup>

- <sup>(1)</sup> Division Ingénierie Vent et Environnement, CSTB, Nantes, France, [boujard@cstb.fr](mailto:boujard@cstb.fr)  
<sup>(2)</sup> Département Génie Civil URA CNRS 1652, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Vaulx en Velin, France, [stephane.pernot@entpe.fr](mailto:stephane.pernot@entpe.fr), [claudelamarque@entpe.fr](mailto:claudelamarque@entpe.fr)  
<sup>(3)</sup> Département Génie Mécanique, Université Paul Sabatier, Toulouse III, LGMT, France, [berlioz@lm2f.ups-tlse.fr](mailto:berlioz@lm2f.ups-tlse.fr)

### Résumé :

De récentes campagnes d'expérimentation menées sur le pont à haubans d'Iroise entre Brest et Quimper ont mis en évidence des vibrations répétées siégeant dans les câbles et susceptibles de causer des problèmes de durabilité. Une analyse spectrale des réponses a permis d'identifier deux régimes dans lesquels soit le premier soit le troisième mode du câble H3Q22 était sollicité. Une analyse temps fréquence des scalogrammes ondelettes a mis à jour l'existence d'un mode localisé de pile excité par le trafic ambiant qui à son tour excite les modes de câbles par un mécanisme de résonance paramétrique nonlinéaire avec les modes de flexion verticale de la structure pile et tablier. Des résultats préliminaires sont présentés ainsi qu'une tentative d'explication d'un tel scénario.

### Abstract :

Recent experimental campaigns led on the Iroise cable stayed bridge near Brest, France, revealed repeated vibratory events in some cable stay likely to provoke durability problems. A spectral analysis emphasized two regimes in which either the fundamental or the third cable mode were excited. Yet, wavelet scalograms of tests allowed to exhibit a localized pylon mode excited by traffic environment which again excites cable modes by means of a nonlinear parametric resonance mechanism with vertical bending modes of the girder. Preliminary results are introduced as an attempt to explain such a scenario.

### Mots-clefs :

Dynamique des haubans ; résonance paramétrique nonlinéaire; modèle d'Irvine de câble

### 1 Introduction

Le pont à haubans d'Iroise qui relie la baie de Brest à Quimper (voir Fig. 1g.) est instrumenté par le CSTB depuis 2004 afin de mieux comprendre les phénomènes vibratoires siégeant dans le 22<sup>ème</sup> hauban ancré aux deux tiers de la traverse principale, animé par de nombreux épisodes de vibrations alors que ses voisins demeurent à l'équilibre. L'analyse des accélérations a mis en évidence deux régimes vibratoires dans lesquels soit le mode fondamental (amplitude 10 cm) soit le troisième mode du câble (amplitude 18 cm) prédominaient. Dans une précédente étude Boujard *et al.* (2006), une interaction avec des conditions particulières de vent et des modes de flexion verticale du tablier était suspectée d'être à l'origine du phénomène, mais les résultats de simulations obtenues à partir d'un modèle nonlinéaire équivalent n'avaient pas permis de conforter entièrement cette hypothèse et surtout ne tenait pas compte du grand élancement de la pile. Une analyse temps-fréquence d'enregistrements récents a depuis lors, permis d'isoler un mode localisé de pile excité par le trafic routier qui excite à son tour les modes du câble par un mécanisme de résonance paramétrique nonlinéaire avec les modes de flexion verticale du tablier.

Les principaux résultats de recherche ayant trait à la dynamique des câbles tendus ont été fournis par Irvine (1981) pour ce qui est de la modélisation théorique. Les expériences de

laboratoire développées par Fujino *et al.* (1993), Berlioz *et al.* (2005), Georgakis *et al.* (2005) ont également contribué à explorer diverses résonances paramétriques de câbles tendus excités par des modes de tablier. Toutes ces études font cependant l'hypothèse d'une pile de pont rigide ce qui n'est pas le cas présent.

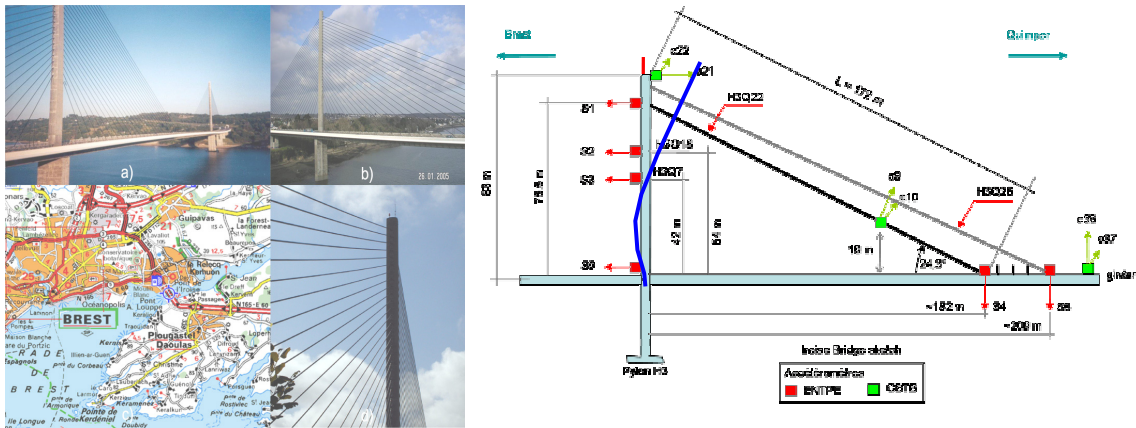


FIG. 1 – g) Le pont d'Iroise, Brest, France ; d) Plan d'expérience du 19 Décembre 2006 ; mode localisé de pile à 2.947 Hz (bleu)

Le présent travail consiste à étudier ce cas résonant pour un modèle de câble équivalent d'Irvine afin de prédire le comportement vibratoire non linéaire du câble dans le plan du pont. Le modèle équivalent d'Irvine reprend à sa charge les principales contributions modales du tablier, du mode localisé de pile assimilé à un mode global mais aussi les trois premiers modes plans de câble. La méthode des échelles multiples sera utilisée afin de valider le scénario observé expérimentalement, les données d'enregistrements en accélérations servant aussi bien pour l'identification des paramètres constitutifs du modèle que pour effectuer une comparaison avec les réponses du modèle analytique.

Le présent travail qui présente des résultats préliminaires est articulé comme suit : en section 1, est présentée l'analyse de résultats expérimentaux récents qui ont permis d'identifier le rôle du mode localisé de la pile H3 et ses propriétés modales. En section 2, un modèle condensé de câble à trois modes est présenté, incluant les couplages non linéaires avec les principaux modes de flexion du tablier et du mode localisé de pile. Enfin quelques perspectives sont données relativement aux travaux d'analyse des scénarios identifiés par la méthode des échelles multiples.

## 2 Analyse des résultats expérimentaux

Une campagne d'essais vibratoires a été conduite le 19 décembre 2006 sur le pont d'Iroise (voir Fig. 1d.) afin d'identifier les propriétés modales de la pile H3 incriminée, les paramètres identifiés servant à alimenter le modèle de câble d'Irvine.

Le plan d'expérience a consisté à enregistrer des données d'accéléromètres fixés sur la paroi intérieure de la pile (voir Fig. 2g.) et à l'intérieur du tablier. Ces essais ont été réalisés dans des conditions de sollicitations ambiantes et de trafic routier afin d'obtenir les fonctions de réponse en fréquence expérimentales. Une autres séries de tests a été développée consistant à faire circuler sur le tablier à plusieurs reprises un engin de déneigement chargé de sel et roulant à une vitesse voisine de 90 km/h. Cette vitesse qui apparaît comme étant une sollicitation dynamique excitant principalement le mode localisé de pile, a été estimée en considérant la distance moyenne entre des ancrages de haubans successifs.

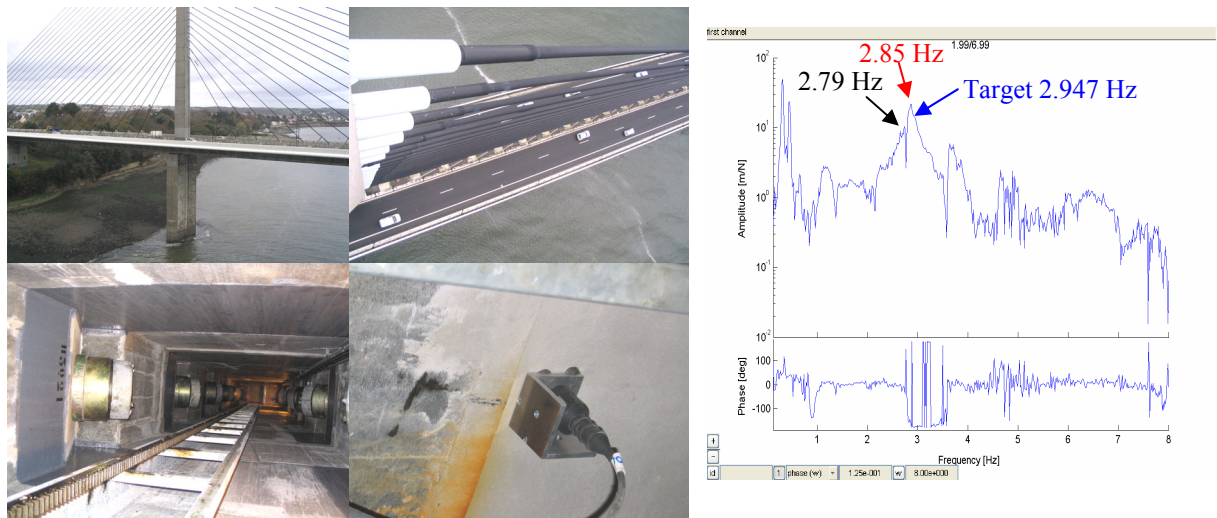
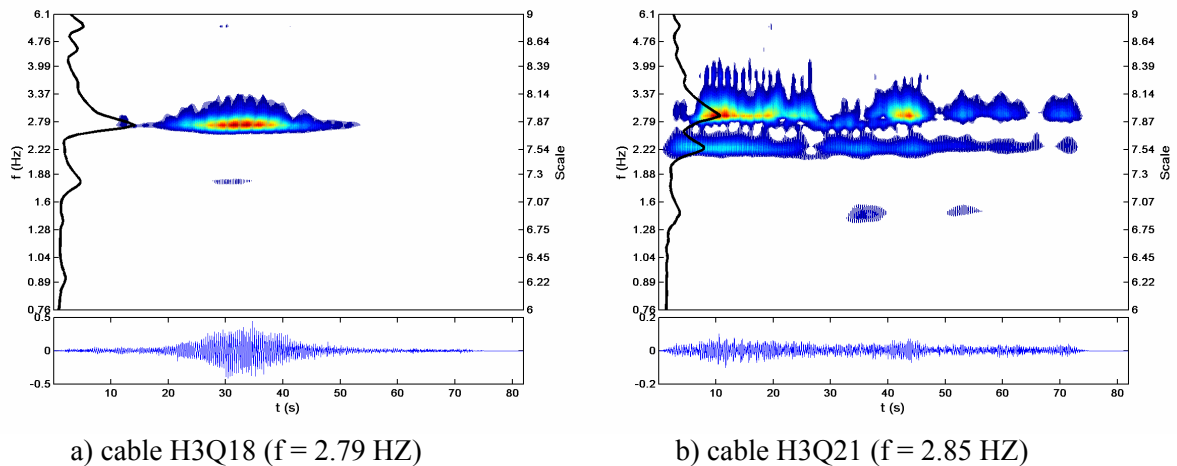


FIG. 2 – Pont d’Iroise : g) vue sur les haubans ; intérieur de la pile et accéléromètres utilisés ; d) FrF et phase de la pile à l’ancrage H3Q22

Une analyse de la réponse en fréquence de la pile H3 calculée en position S1 permet de localiser la fréquence d’un mode de pile à  $f = 2.947$  Hz (voir Fig. 2d.). L’analyse de toutes les données FrF et phases disponibles a permis de reconstruire la déformée expérimentale du mode localisé de pile (voir Fig. 1d.) qui coïncide avec le deuxième mode de flexion verticale de la pile. La présence d’autres fréquences voisines est à mettre sur le compte du troisième mode des câbles H3Q18 et H3Q21 et est confirmée par l’analyse des scalogrammes ondelettes suivants.



L’amortissement spécifique du mode localisé de pile est estimé à 0.5% avec une grande part d’erreur du fait de la mauvaise séparation modale. Les vibrations mettant en scène le mode de pile  $f_{H3} = 2.947$  Hz et le troisième mode de câble H3Q22  $f_{c3} = 2.20$  Hz sont visibles dans les encadrés en rouge des figures 3c) et 3d). Le premier constat est que  $f_{H3}$  coïncide avec les combinaisons  $f_{c1} + f_{c3}$  et  $2 f_{c1} + f_{c2}$ ,  $f_{c1} = 0.73$  Hz et  $f_{c2} = 1.46$  Hz étant les fréquences respectives du premier et du second mode de câble H3Q22.

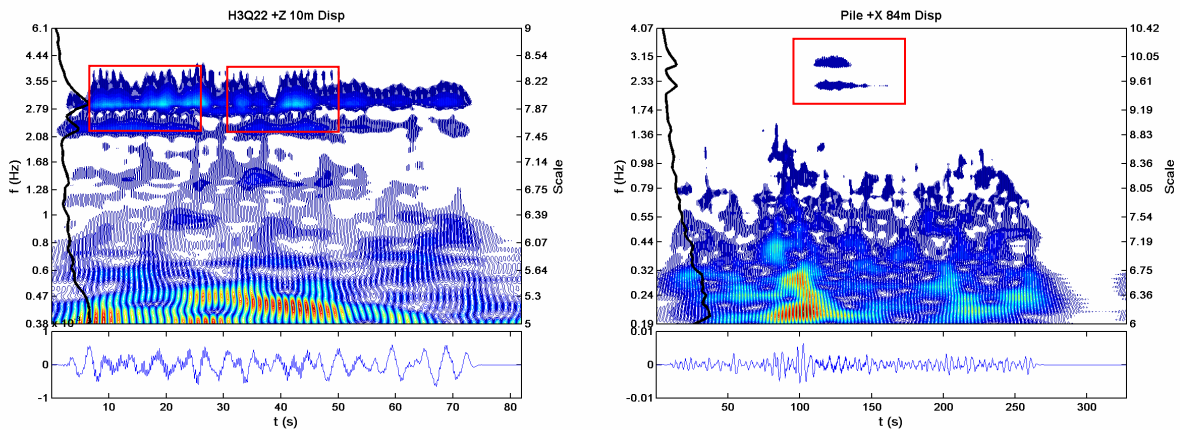
c) câble ( $f_{c3} = 2.20$  Hz ;  $f_{H3} = 2.94$  Hz)d) Pile H3 ( $f_{c3} = 2.20$  Hz ;  $f_{H3} = 2.947$  Hz)

FIG. 3 – Scalogramme des réponses en déplacement

Ainsi, une résonance paramétrique nonlinéaire entre la pile H3 est suspectée être à l'origine des vibrations de grande amplitude ( $f_{c3} = 2.20$  Hz puis  $f_{c1} = 0.73$  Hz) se développant dans le câble H3Q22. Le hauban H3Q18 est susceptible de jouer un second rôle dans ce scénario car des dommages structurel ont été constatés in situ sur l'ancrage sur la pile du dit câble certainement causés par des concentrations élevées de contraintes dans cette zone. La section suivante concerne la mise en équation d'un modèle nonlinéaire condensé de câble pour le hauban H3Q22.

### 3 Modèle nonlinéaire condensé de câble

Reprenant le modèle d'Irvine pour un câble tendu, un modèle de câble est développé dans le but de valider le mécanisme de résonance paramétrique nonlinéaire entre le mode localisé de pile H3 et des combinaisons linéaires des trois modes de câble H3Q22. Le déplacement du câble prenant les déformées quasi-statiques est donné dans un repère global attaché au pont. Au final, un modèle à 6 degrés de liberté est écrit avec :

- Les trois premiers modes plans du câble H3Q22 ( $q_k$ ) $_{k=1..3}$ ,
- Les deux modes de flexion verticale du pont d'Iroise ( $f_1 = 0.305$  Hz,  $f_2 = 0.44$  Hz) montrés en Fig. 4,
- Le mode localisé de pile  $f_{H3} = 2.947$  Hz considéré comme un mode global.

Les notations utilisées dans le modèle sont :

Propriétés du câble H3Q22:

$m$  : masse linéique,  $L$ : longueur

$\theta$  : angle,  $H$  : tension statique,

$\lambda^2$  : parameter d'Irvine  $\mu = \frac{mgL \cos(\theta)}{H}$ ,

$q_k$  : coordonnées généralisées des modes ( $k=1, 2, 3$ ),

$\omega_k$  : fréquence propres du câble,

$$\alpha_k = 1 + (-1)^{k+1},$$

$$\beta_k = 1 + \frac{2\lambda^2 \alpha_k^2}{(k\pi)^4}.$$

Propriétés du pont et de la pile H3 :

$M_k$  : masse modale généralisée  $k = 1, 2$

pour les modes de flexion du tablier et

$k=3$  (pile),  $K_k$  : raideur généralisée,

$s_k$  : coordonnée généralisée pour les

modes du pont  $k = 1, 2, 3$ ,

$\Omega_k$  : fréquence du mode  $k$ ,

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{matrice}$$

de passage entre le repère local au câble et le repère global.

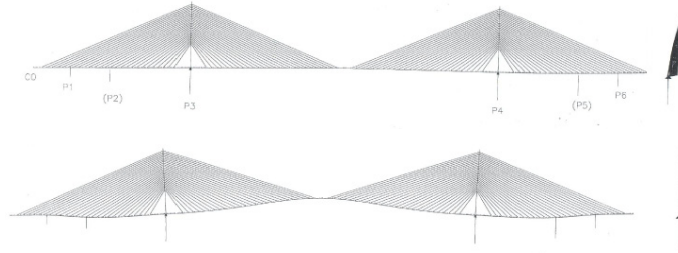


Fig. 4 Modes de flexion du pont  $f_1 = 0.305$  Hz,  $f_2 = 0.44$  Hz (modèle élément finis).

En écrivant le principe d'Hamilton, on obtient finalement le système d'équations pour le câble :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 \left[ q_1 + \left( \sum_{i=1}^3 B_{1i} \cdot s_i + C_{13} \cdot q_3 \right) \cdot q_1 + (C_{11} + D_{11}) \cdot q_1^2 + E_{11} \cdot q_1^3 + (E_{12} \cdot q_2^2 + E_{13} \cdot q_3^2) \cdot q_1 \right] \\
 & = -\omega_1^2 \left[ A_{13} \cdot q_3 + D_{12} \cdot q_2^2 + D_{13} \cdot q_3^2 \right] + \sum_{i=1}^3 F_{1i} \cdot s_i + \sum_{i=1}^3 G_{1i} \cdot \dot{s}_i \\
 & \ddot{q}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 \left[ q_2 + \left( \sum_{i=1}^3 B_{2i} \cdot s_i + C_{21} \cdot q_1 + C_{23} \cdot q_3 \right) \cdot q_2 + E_{22} \cdot q_2^3 + (E_{21} \cdot q_1^2 + E_{23} \cdot q_3^2) \cdot q_2 \right] = \sum_{i=1}^3 G_{2i} \cdot \dot{s}_i \\
 & \ddot{q}_3 + 2\zeta_3\omega_3\dot{q}_3 + \omega_3^2 \left[ q_3 + \left( \sum_{i=1}^3 B_{3i} \cdot s_i + C_{31} \cdot q_1 \right) \cdot q_3 + (C_{33} + D_{33}) \cdot q_3^2 + E_{33} \cdot q_3^3 + (E_{31} \cdot q_1^2 + E_{32} \cdot q_2^2) \cdot q_3 \right] \\
 & = -\omega_3^2 \left[ A_{31} \cdot q_1 + D_{31} \cdot q_1^2 + D_{32} \cdot q_2^2 \right] + \sum_{i=1}^3 F_{3i} \cdot s_i + \sum_{i=1}^3 G_{3i} \cdot \dot{s}_i
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_{kl} &= \frac{2\lambda^2 \alpha_k \alpha_l}{k^3 l \pi^4 \beta_k}, & E_{kl} &= \frac{\lambda^2 \pi^2 l^2}{4\mu^2 L^2 \beta_k}, \\
 B_{ki} &= \frac{\lambda^2 U_i}{\mu^2 L \beta_k \left( 1 + \frac{\lambda^2}{12} \right)}, \quad i = 1, 2, 3, & F_{ki} &= \frac{-2\alpha_k \lambda^2 U_i}{(k\pi)^3 \mu \left( 1 + \frac{\lambda^2}{12} \right)} \cdot \frac{\omega_k^2}{\beta_k}, \\
 C_{kl} &= \frac{\lambda^2 \alpha_l}{\mu \pi L \beta_k}, & G_{ki} &= \frac{2\alpha_k \lambda^2 U_i}{(k\pi)^3 \mu \left( 1 + \frac{\lambda^2}{12} \right)} - \frac{2V_i}{k\pi}. \\
 D_{kl} &= \frac{\lambda^2 l^2 \alpha_k}{2\mu \pi L k^3 \beta_k},
 \end{aligned}$$

De même, on pose  $\psi_{i,j}(P)$   $i=1, 2, 3$  et  $j = U, V, W$ , la  $i^{\text{ème}}$  déformée modale du pont dans la direction  $j$  et localisée au point  $P$ . Les coefficients de participation modaux  $U_i$  et  $V_i$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 U_i &= \psi_{i,V}(X_{\text{Tablier}}) \cdot \sin(\theta) - \psi_{i,U}(X_{\text{Pylône}}) \cdot \cos(\theta) \\
 V_i &= -\psi_{i,U}(X_{\text{Pylône}}) \cdot \sin(\theta) + (-1)^{i+1} \cdot \psi_{i,V}(X_{\text{Tablier}}) \cdot \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

où  $X_{\text{Tablier}}$  et  $X_{\text{Pylône}}$  désignent respectivement les lieux d'ancrage bas et haut du câble considéré.

En appliquant de nouveau le principe d'Hamilton au système constitué du haubans H3Q22, de la pile H3 et du tablier, on obtient au final les équations suivantes pour la k<sup>ème</sup> coordonnée modale du pont, k = 1, 2, 3 :

$$\ddot{s}_k + 2\zeta_k \Omega_k^* \dot{s}_k + (\Omega_k^*)^2 s_k = \frac{1}{M_k} \left[ Z_k - \left( P_{k1} \cdot q_1 + P_{k3} \cdot q_3 + \sum_{i=1}^3 Q_{ki} \cdot q_i^2 + \sum_{i=1}^3 R_{ki} \cdot \ddot{q}_i \right) \right]$$

faisant apparaître des constantes qui ne sont pas détaillées ici.

#### 4 Analyse du modèle condensé

La méthode des échelles multiples est utilisée pour retrouver des solutions stationnaires ayant une amplitude semblable à celle mesurée expérimentalement. Parmi les différents cas de résonance étudiés, quatre scénarios potentiels doivent être vérifiés analytiquement :

$$\text{Résonance } f_{c1} = 0.73 \text{ Hz} \quad : \quad f_1 + f_2 = 0.305 + 0.44,$$

$$\text{Résonance } f_{c2} = 1.46 \text{ Hz} \quad : \quad 2 f_{c1},$$

$$\text{Résonance } f_{H3} = 2.94 \text{ Hz} \quad : \quad 2 f_{c2},$$

$$\text{Résonance } f_{c3} = 2.20 \text{ Hz} \quad : \quad f_{H3} - (f_{c1} + f_{c2}).$$

Tous ces mécanismes sont susceptibles de provoquer des résonances en combinaisons. Dans le programme de calcul formel utilisé, quatre équations supplémentaires sont requises pour éliminer les termes séculiers et ces liaisons coïncident justement avec les équations de résonance précédentes. Une étude paramétrique vis-à-vis de l'amortissement, de l'amplitude de forcing devra être menée afin d'évaluer le poids de chacune de ces résonances.

#### 5 Conclusions

Une étude expérimentale de la dynamique du pont d'Iroise a exhibé des résonances paramétriques nonlinéaires entre un mode de pile (flexible) et un câble lors de sollicitations dues au vent et au trafic routier. Durant ces événements, le câble étudié rentre en vibrations selon son premier ou son troisième mode de façon intermittente. Le diagnostic a révélé quatre scénarios de résonances potentielles. A première vue, l'analyse semble montrer l'existence d'un état de transition mettant en scène une résonance  $f_{H3} : 2 f_{c2}$ . Un modèle condensé d'Irvine à 6 degrés de liberté est en cours d'étude pour valider ce scénario et améliorer la compréhension du comportement dynamique du câble. A notre connaissance, cette étude est la première se rapportant à la dynamique d'un câble tendu et dont les deux extrémités sont en mouvement.

#### Références

- Irvine, H.M. 1981 Cable Structures. *The M.I.T. Press*, Cambridge, MA.
- Fujino, Y., Warnitchai, P., Pacheco, B.M. 1993 An Experimental and Analytical Study of Autoparametric Resonance in a 3DOF Model of Cable-Stayed-Beam. *Nonlinear Dynamics* **4**, 111–138.
- Berlioz, A., Lamarque C.-H. 2005 A non linear model for the dynamics of an inclined cable. *Journal of Sound and Vibration* **279**, 619–639.
- Georgakis, C.T., Taylor, C.A. 2005 Nonlinear dynamics of cable stays. Part 1 : sinusoidal cable support excitation. *Journal of Sound and Vibration* **281** (3-5), 537–564. Part 2 : stochastic cable support excitation. *Journal of Sound and Vibration* **281** (3-5), 565–591.
- Boujard, O., Pernot, S., Berlioz, A., Lamarque, C.-H. 2006 Autoparametric resonance in a cable-stayed bridge : reduced order modelling with NNM's', *2nd International conference on nonlinear normal modes*, Samos, Greece, June 19-23 2006.