

Un modèle rhéologique discret non classique en dynamique

Jérôme Bastien & Claude-Henri Lamarque

Laboratoire Mécatronique 3M, Équipe d'accueil A 3318,
Université de Technologie de Belfort-Montbéliard,
90010 Belfort cedex, France
jerome.bastien@utbm.fr

et
Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat
DGCB URA CNRS 1652 LGM
3, rue Maurice Audin 69 518 Vaulx-en-Velin Cedex France
lamarque@entpe.fr

Résumé :

Nous rappelons brièvement les résultats obtenus concernant les modèles dynamiques discrets construits à partir d'assemblages en série ou en parallèle d'éléments rhéologiques simples (ressorts linéaires ou non, amortisseurs, éléments de Saint-Venant). Nous étudions ensuite en régime dynamique le modèle géphyroïde introduit en régime quasi-statique par Persoz [1]. Sa formulation à l'aide d'inclusions différentielles permet l'étude théorique puis numérique et l'illustration du caractère géphyroïde du modèle.

Abstract :

We briefly recall obtained results for the models consisting of series or parallel assembly of elementary discrete constitutive elements (springs -linear or non linear, dashpots, Saint-Venant elements). Then we examine the dynamical behaviour of the "gephyroidal" model introduced by Persoz for studying quasi-static behaviour [1]. It is expressed as a differential inclusion that permits its theoretical and numerical study. Finally we present an example of gephyroidal character of the model

Mots-clefs :

Dynamique, St-Venant, Persoz

1 Introduction

Dans des travaux antérieurs, nous avons étudié des modèles dynamiques discrets construits à partir d'assemblages en série ou en parallèle d'éléments rhéologiques simples (ressorts linéaires ou non, amortisseurs, éléments de Saint-Venant).

Les résultats obtenus concernent le caractère bien ou mal posé du problème [2], l'existence et l'unicité d'une solution et l'identification des paramètres du modèle à partir d'un cycle de chargement [3, 4], la construction de schémas numériques [4, 5, 6], la construction d'un modèle avec un nombre infini d'éléments de Saint-Venant [4, 7], l'introduction d'un terme de retard supplémentaire [8], l'adaptation à un cadre stochastique [9, 10], la présence en sus de ressorts non linéaires réguliers [11]. Ce travail s'inscrit dans la suite de ces travaux et plus précisément de [3, 6, 4, 7, 5] concernant le comportement dynamique d'assemblages d'éléments rhéologiques simples (ressorts, amortisseurs, élément de Saint-Venant) et résume [12], où nous avons étendu à un cadre dynamique le modèle de comportement quasistatique introduit par Persoz [1], qu'il a appelé modèle géphyroïde. Ce modèle se différencie des associations parallèle ou série de tels composants élémentaires. En effet, ce modèle correspond à la topologie d'un modèle classique sur lequel vient se greffer un «pont» (d'où le terme géphyroïde) entre deux branches,

pont comportant un élément de friction sèche. Nous décrivons brièvement le modèle via une inclusion différentielle maximale monotone. Nous exposons les résultats mathématiques et d'analyse numérique correspondant. Enfin, nous illustrons le caractère géophysique par une simulation numérique.

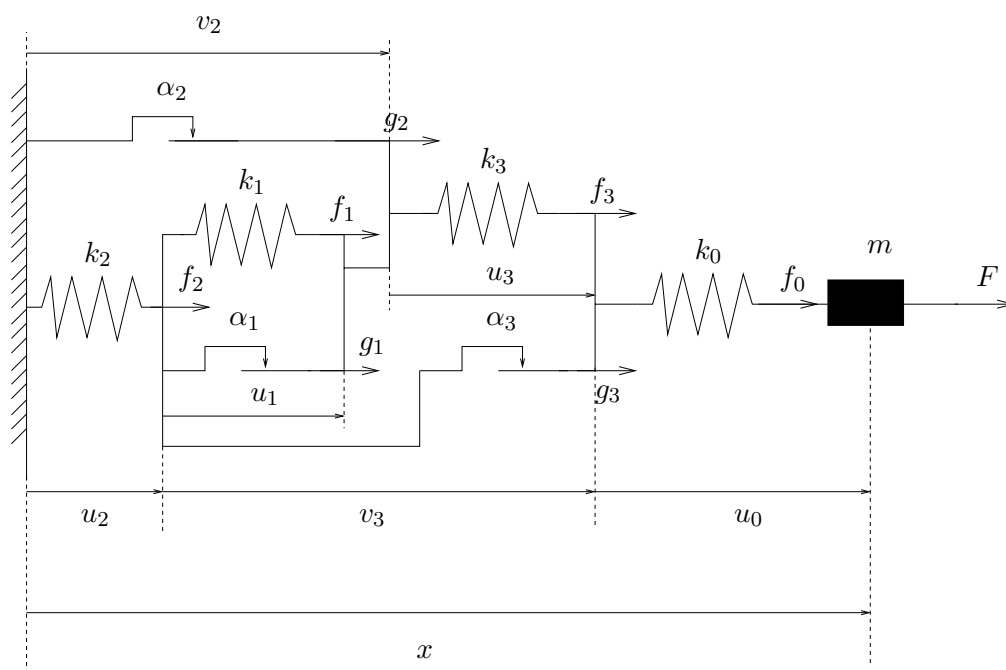


FIG. 1 – Le modèle étudié et les forces f_i et g_i et les déplacements u_i , v_i et x .

2 Description du modèle

Nous considérons le modèle représenté en figure 1 composé de 4 ressorts de raideurs k_0 , k_1 , k_2 et k_3 , 3 éléments de Saint-Venant de seuil α_1 , α_2 et α_3 , connecté à un point matériel de masse m . Comme dans [3], σ et β désignent respectivement le graphe du signe et son inverse. Ils sont respectivement définis par

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \\ \{0\} & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ \mathbb{R}_- & \text{si } x = -1, \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (1)$$

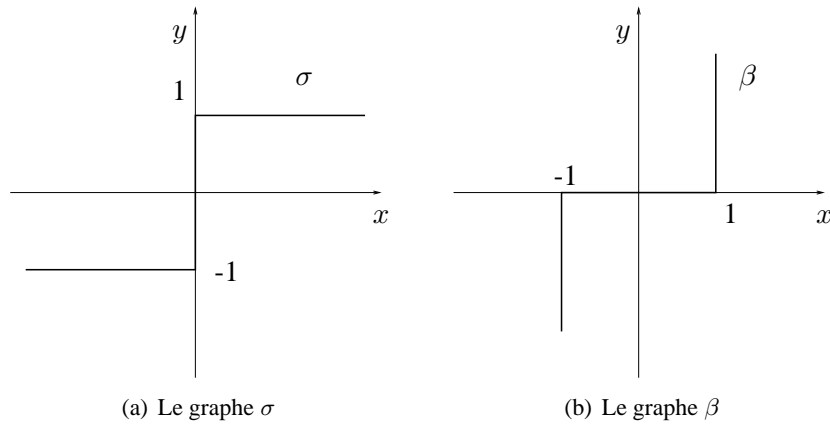
Ils sont représentés sur la figure 2.

Le modèle est gouverné par les équations constituées de liaisons géométriques,

$$u_0 + v_3 + u_2 = x, \quad (2a)$$

$$v_2 + u_3 + u_0 = x, \quad (2b)$$

$$u_1 + u_3 = v_3, \quad (2c)$$

FIG. 2 – Les deux graphes maximaux monotones utilisés σ et β .

des lois de comportement des ressorts et des éléments de Saint-Venant

$$\forall i \in \{0, \dots, 3\}, \quad f_i = -k_i u_i, \quad (2d)$$

$$\forall i \in \{2, 3\}, \quad g_i \in -\alpha_i \sigma(\dot{v}_i), \quad (2e)$$

$$g_1 \in -\alpha_1 \sigma(\dot{u}_1), \quad (2f)$$

et des équations d'équilibre :

$$g_2 + f_1 + g_1 = f_3, \quad (2g)$$

$$g_3 + f_3 = f_0, \quad (2h)$$

$$g_3 + g_1 + f_1 = f_2, \quad (2i)$$

$$m\ddot{x} = f_0 + F. \quad (2j)$$

On suppose que F est donnée. Ainsi, on obtient un problème comportant 14 équations ou inclusions et 14 inconnues, $x, (u_i)_{0 \leq i \leq 3}, (v_i)_{2 \leq i \leq 3}, (f_i)_{0 \leq i \leq 3}$, et $(g_i)_{1 \leq i \leq 3}$. En éliminant 9 inconnues et en considérant X défini par

$$X = {}^t(x, y, g_2, g_3, g_1), \quad (3)$$

on formule le problème sous la forme d'une inclusion différentielle

$$\dot{X}(t) + M\partial\psi_C(X(t)) \ni G(t, X(t)), \quad (4)$$

où M est une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, G une fonction de $[0, T] \times \mathbb{R}^5$ dans \mathbb{R}^5 , continue en t et lipschitzienne en X et C est le convexe fermé donné par

$$C = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-\alpha_2, \alpha_2] \times [-\alpha_3, \alpha_3] \times [-\alpha_1, \alpha_1], \quad (5)$$

et $\partial\psi_C$ est la sous différentielle de l'indicatrice de C : c'est un opérateur multivoque maximal monotone [13].

3 Existence, unicité et analyse numérique

Si M est symétrique définie positive, on applique les résultats de [3] et on montre que l'opérateur multivoque de \mathbb{R}^5 défini par

$$\forall X \in \mathbb{R}^5, \quad A(X) = M\partial\psi_C(X), \quad (6)$$

est maximal monotone, en utilisant le lemme

Lemma 3.1 ([3], page 289). Si \mathbb{R}^p est muni du produit scalaire canonique et du produit scalaire :

$$\langle X, Y \rangle_M = X^T M^{-1} Y, \quad (7)$$

alors, on lie la sous différentielle $\partial\phi$ de ϕ relativement au produit scalaire canonique à la sous différentielle $\partial_M\phi$ relativement à \langle, \rangle_M par

$$\partial_M\phi(X) = M\partial\phi(X).$$

On en déduit la proposition

Proposition 3.2. Soient $X_0 \in \mathcal{C}$ et $F \in H^1(]0, T[)$ et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des nombres positifs, $(k_i)_{0 \leq i \leq 3}$ des nombres positifs vérifiant

$$k_0 = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad k_i > 0, \quad (8a)$$

ou

$$k_0 > 0 \text{ et au moins deux des nombres } k_1, k_2 \text{ et } k_3 \text{ sont positifs.} \quad (8b)$$

Alors, la matrice M est symétrique définie positive et il existe une unique solution X dans $W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}^5)$ vérifiant (4).

En se fondant sur [6, 3, 5], on montre le résultat d'analyse numérique suivant :

Proposition 3.3. Soient N un entier, $h = T/N$, $h_p = hp$, $X_0 \in \mathcal{C}$ et $(X^p)_{0 \leq p \leq N}$ défini par

$$\forall p \in \{0, \dots, N-1\}, \quad X^{p+1} = \text{proj}_{\mathcal{C}, M^{-1}}(X^p + hG(t_p, X^p)). \quad (9)$$

où $\text{proj}_{\mathcal{C}, M^{-1}}$ est la projection orthogonale sur le convexe \mathcal{C} pour la norme de \mathbb{R}^5 définie par

$$\forall X \in \mathbb{R}^5, \quad \|X\|_{M^{-1}} = \sqrt{X^T M^{-1} X}. \quad (10)$$

Soit $X_h \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^5)$ l'interpolation linéaire à l'instant $t_p = hp$ de la solution X . Le schéma numérique (9) est d'ordre un : il existe c tel que pour tout h :

$$\forall t \in [0, T], \quad |u(t) - u_h(t)| \leq ch. \quad (11)$$

4 Simulations numériques

Choisissons les conditions initiales $X_0 = 0$ et

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \alpha_i = i, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad k_i = 1, \\ T = 80, \quad h = 10^{-3}, \quad F(t) = 200 \sin(6t), \quad m = 1.$$

Nous représentons le graphe $(t, F(t) - m\ddot{x}(t))$ en figure 3 et le graphe $(t, g_j(t))$ en figure 4. Les variations opposées de g_1 et g_2, g_3 traduisent le caractère géphyroïde du modèle.

5 Conclusions

Nous avons étendu à un modèle dit général ou géphyroïde simple les résultats des modèles classiques.

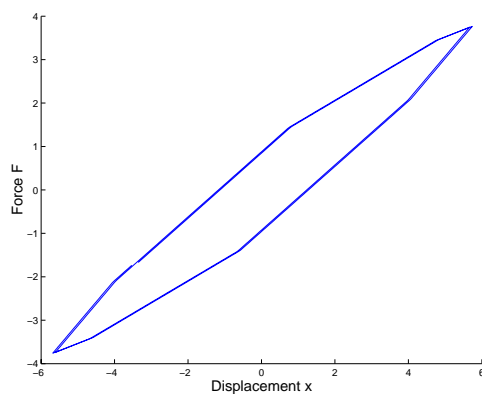


FIG. 3 – Tracé du graphe $(x(t), F(t) - m\ddot{x}(t))$ pour $t \in [T - 2/3\pi, T]$: mise en évidence du cycle d'hystérésis.

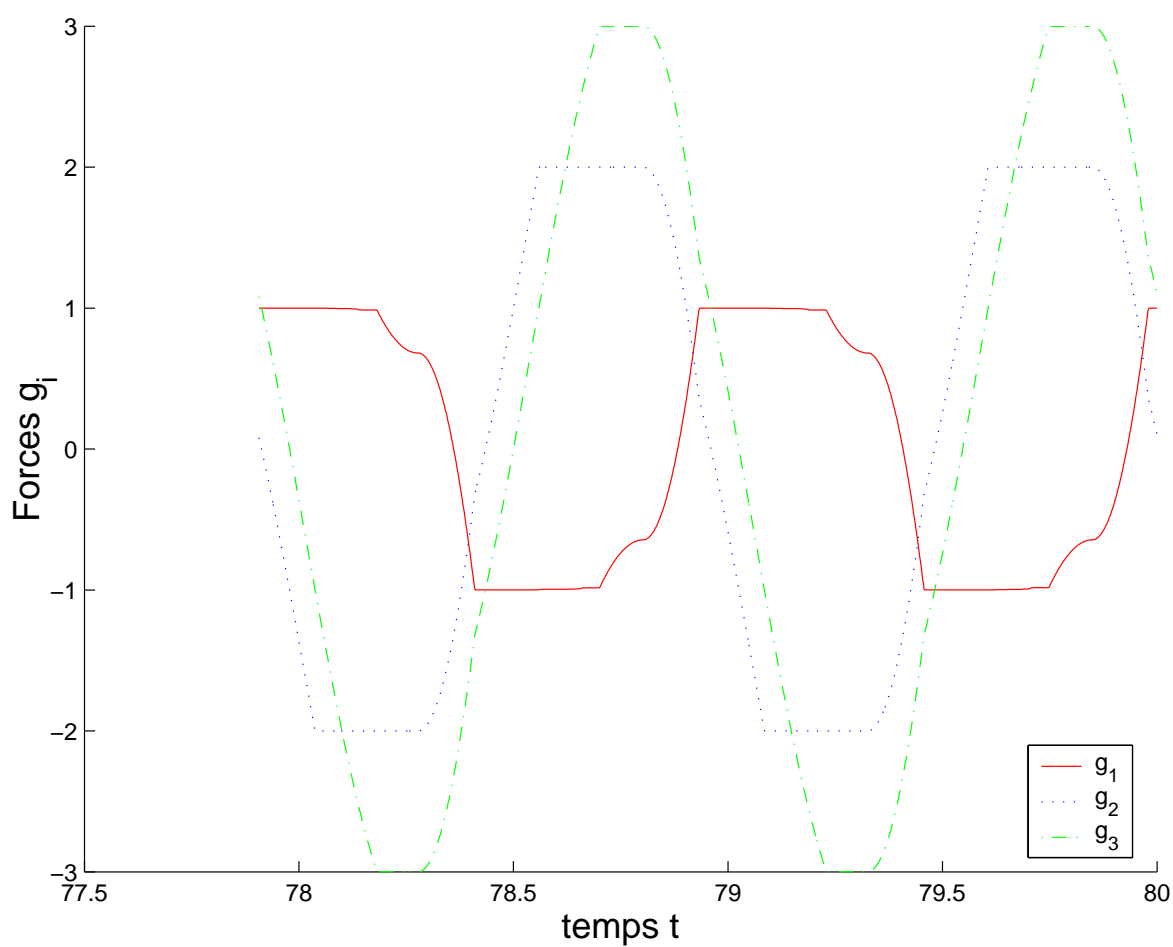


FIG. 4 – Tracé du graphe $(t, g_j(t))$ pour $t \in [t_i, t_f]$ et $j \in \{1, 2, 3\}$: caractérisation du changement de signe propre au modèle géphyroïde.

Références

- [1] B. Persoz, editor. *La Rhéologie : recueil de travaux des sessions de perfectionnement, Institut national des sciences appliquées, Lyon*. Monographies du Centre d'actualisation scientifique et technique ; 3. Masson, Paris, 1969.
- [2] Michelle Schatzman, Claude-Henri Lamarque, and Jérôme Bastien. An ill-posed mechanical problem with friction. *Eur. J. Mech. A Solids*, 18(3) :415–420, 1999.
- [3] Jérôme Bastien, Michelle Schatzman, and Claude-Henri Lamarque. Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom. *Eur. J. Mech. A Solids*, 19(2) :277–307, 2000.
- [4] Jérôme Bastien. *Étude théorique et numérique d'inclusions différentielles maximales monotones. Applications à des modèles élastoplastiques*. PhD thesis, Université Lyon I, 2000. Numéro d'ordre : 96-2000.
- [5] Jérôme Bastien and Michelle Schatzman. Numerical precision for differential inclusions with uniqueness. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 36(3) :427–460, 2002.
- [6] Jérôme Bastien and Michelle Schatzman. Schéma numérique pour des inclusions différentielles avec terme maximal monotone. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7) :611–615, 2000.
- [7] Jérôme Bastien, Michelle Schatzman, and Claude-Henri Lamarque. Study of an elastoplastic model with an infinite number of internal degrees of freedom. *Eur. J. Mech. A Solids*, 21(2) :199–222, 2002.
- [8] Claude-Henri Lamarque, Jérôme Bastien, and Matthieu Holland. Study of a maximal monotone model with a delay term. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(4) :1286–1300 (électronique), 2003.
- [9] Frédéric Bernardin, Michelle Schatzman, and Claude-Henri Lamarque. Second-order multivalued stochastic differential equations on Riemannian manifolds. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460(2051) :3095–3121, 2004.
- [10] Frédéric Bernardin, Michelle Schatzman, and Claude-Henri Lamarque. A Stochastic differential equation from friction mechanics. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(11) :837–842, 2004.
- [11] Claude-Henri Lamarque, Frédéric Bernardin, and Jérôme Bastien. Study of a rheological model with a friction term and a cubic term : deterministic and stochastic cases. *Eur. J. Mech. A Solids*, 24(4) :572–592, 2005.
- [12] Jérôme Bastien and Claude Henri Lamarque. The persoz's gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion. Soumis au *Archive of Applied Mechanics*, 2006.
- [13] Haïm Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).