

## Champ de pression non isotrope approchant le champ des contraintes d'indentation d'un verre

Manuel Buisson\* , Jean-Christophe Sangleboeuf\*\* , Vincent Kéryvin\*\* & Tanguy Rouxel\*\*

Université de Rennes I  
IRMAR\* (UMR 6625) LARMAUR\*\* (FRE-CNRS 2717)  
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France  
manuel.buisson@univ-rennes1.fr

### Résumé :

*Selon Yoffe (1982) le champ de contraintes et déformations généré lors de l'indentation d'un verre relève d'une « plasticité non-orthodoxe » au sens où la composante irréversible de la déformation n'est pas isovolume. Pour ce phénomène de « densification », sa définition simple d'une inclusion sphérique tronquée élastique équivalente utilise un champ uniforme de pression non isotrope approchant celui des contraintes et déformations « élasto-pseudoplastiques » ou « élasto-densifiant ». Un tel champ se compose d'un écrasement vertical réparti sur une surface circulaire et d'une expansion radiale ; il approche le champ élasto-densifiant assimilé à la superposition du champ des contraintes élastiques de Boussinesq (1885) et d'un champ « d'ampoule » ( traduction de « blister field »). L'approximation de cette équivalence entre champ élastique de pression non isotrope simple et champ élasto-densifiant est obtenue par troncature d'une série de Fourier ; nos résultats semi-analytiques s'efforcent de dépendre explicitement du coefficient de Poisson et incitent à de futurs développements expérimentaux et théoriques.*

### Abstract :

*Following Yoffe (1982) stress- and strain-fields due to glass indentation are related to « unorthodox » plasticity, that is to say non isovolumic irreversible strain. For such a densification process, her basic definition of an equivalent elastic truncated spherical inclusion uses non isotropic uniform pressures similar to the elastic-pseudo-plastic field. Such a field is composed of a vertical pressure spreaded on a circular area and of a radial expansion pressure ; this field becomes an approximation of the elastic-densifying field expressed as the superposition of the Boussinesq (1885) field and a blister field. This equivalence between non isotropic but uniform elastic pressure field and elastic-densifying field is approximated via a truncated Fourier's serie ; our semi-analytical results try to be written explicitly with Poisson's coefficient and encourage to future experimental and theoretical developments.*

### Mots-clefs :

**verres ; dureté ; densification**

## 1 Introduction expérimentale

Notre propos concerne le comportement des verres à une échelle micromécanique lors d'un essai d'indentation à faible charge. La technique utilisée est le test de micro-indentation Vickers qui laisse apparaître en post mortem une empreinte obtenue lors du chargement (figure (1)) : nous souhaitons identifier les mécanismes qui sont en jeu et la part qu'ils prennent dans ce processus de déformation.

La dureté Vickers, rapport de la charge à la surface plane projetée de l'empreinte d'indentation, est bien utilisée déjà pour les métaux ; elle constitue, pour le matériau étudié, un bon indicateur quand à l'aptitude à se déformer et développer de la plasticité.

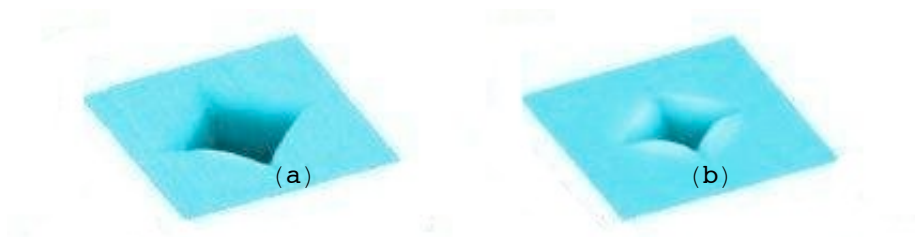


Fig.1: empreintes post-mortem vues par AFM sur un verre  
expérience: Larmaur; cf: Yoshida (2005)

- (a) charge-décharge  
(b) même charge-décharge puis recuit

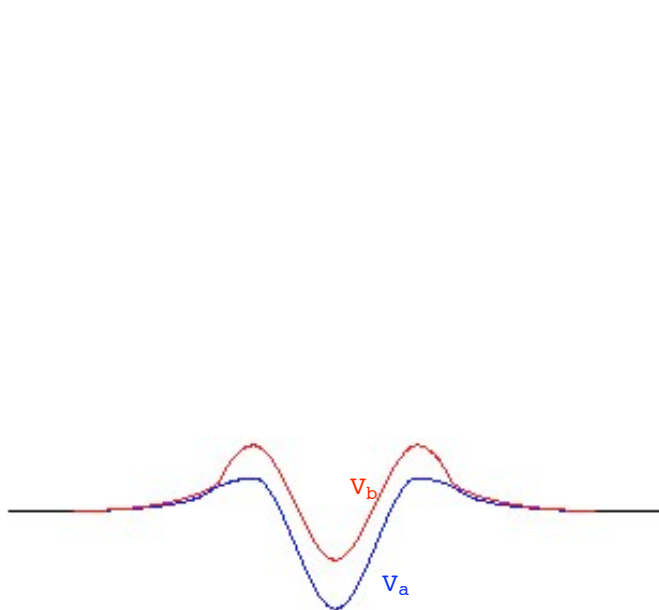


Fig.2: schéma des profils; cf. Yoshida (2005)

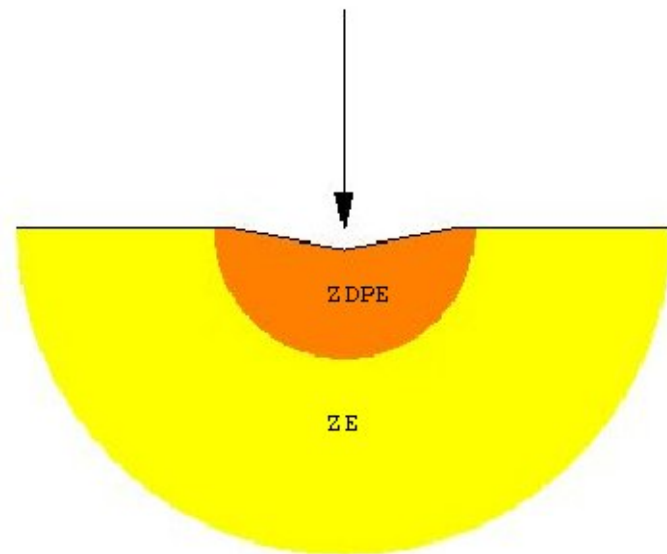


Fig.3: zone élastique ZE  
zone densifiée élastoplastique ZDPE

Pour les verres, lors d'indentations, on a observé Rouxel (2001) des systèmes de fissuration dont la différence d'aspects ( cônes de Hertz pour la silice pure ( $\text{SiO}_2$ ), médians et radiaux pour du verre à vitre (WG)) semble provenir des écarts entre coefficients de Poisson ( $\text{SiO}_2$  : 0.15, WG : 0.21) et des sensibilités à la densification ( au sens d'une déformation ou transformation irréversible due à la pression).

Plus récemment, Ji (2006) a noté aussi que pour de faibles charges (10 g) , on pouvait éviter de générer des fissures tout en obtenant une empreinte permanente et trace du développement des déformations résiduelles que nous cherchons à analyser. Cependant, l'échelle de pertinence du test d'indentation à faible charge reste encore assez macroscopique car si nous poussons plus loin dans la finesse d'observation, on constate en fait que les mécanismes qui gouvernent cette déformation irréversible sont principalement :

- d'une part, les composantes du cisaillement plastique local isovolume, cisaillement qui s'observerait aussi pour l'indentation d'un métal.
- et d'autre part, le phénomène de densification déjà plus spécifique aux verres et lié à une contraction irréversible locale. Un verre, en effet, de par sa nature vitreuse, est moins dense que son homologue chimique cristallin et tend à diminuer son énergie de configu-

ration via ce phénomène de densification.

Il se pose alors la question de savoir quel est, de ces mécanismes, celui qui est éventuellement dominant lors du test d'indentation. Sur ce point, la méthode expérimentale envisagée est ainsi mise en question parce qu'en lui-même ce test ne peut nous permettre de développer séparément l'un ou l'autre. Pourtant, on dispose encore d'un atout très simple car nous pouvons déduire la part due à la densification par un processus de recuit après l'indentation (ici, au sens de charge puis décharge). Nous avons en effet constaté (figure (1)) que ce processus thermique permet de recouvrir la densification du matériau; une comparaison entre les deux profils d'empreintes, l'un avant recuit, figure(2,  $V_a$ ), l'autre après recuit, figure (2,  $V_b$ ) nous permet alors de déduire quantitativement la part de densification: c'est le volume délimité entre les deux profils (figure(2,  $V_a$ ) et figure(2,  $V_b$ ) respectivement).

Différents verres ont été étudiés; les résultats obtenus (Yoshida(2005)) montrent explicitement que la proportion de volume densifié au volume total de l'empreinte irréversible est une fonction décroissante de la valeur du coefficient de Poisson  $\nu$ .

Dans la partie suivante, nous introduisons un modèle analytique très simple qui s'attache dans un premier temps à estimer l'étendue de cette zone à déformation permanente en s'efforçant de faire intervenir explicitement le coefficient de Poisson.

## 2 Modèle analytique simple

Nous nous basons sur le travail de Yoffe (1982) qui a construit très pragmatiquement l'étude d'un champ élastique pseudo-plastique en faisant appel au modèle de Boussinesq (1885) et en introduisant la notion de champ «d'ampoule» (nom donné pour évoquer la forme de ces régions de déformation).

### 2.1 Etude de Yoffe(1982)

Yoffe distingue deux zones caractérisées par leurs modes respectifs de déformation (voir schéma simplifié de la figure (3)) :

- l'une (ZDPE) correspond à la zone affectée par l'élasto-plasto-densification; elle est localisée au contact immédiat de l'indenteur et est approximée de forme hémisphérique tronquée en son dessus par la pyramide Vickers. L'extérieur de cette zone correspond à
- l'autre zone (ZE) où la déformation est purement élastique.

Au vu de cette géométrie, Yoffe adopte une symétrie axiale et utilise les coordonnées sphériques ( $r, \theta, \phi$ ) pour décrire le champ des contraintes :

- pour (ZE), la partie élastique principale des contraintes est représentée par le champ de Boussinesq associé à la charge ponctuelle  $P$  appliquée à l'origine  $O$  (la droite d'action de cette force est l'axe de symétrie de révolution). On remarque dans les formules analytiques utilisées par Yoffe (1982)

$$\sigma_{rr} = \frac{P(1 - 2\nu + 2(-2 + \nu)\cos[\theta])}{2\pi r^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{P(1 - 2\nu)\cos[\theta]\sin[\theta]}{2\pi r^2(1 + \cos[\theta])} \quad (2)$$

qu'il s'agit de termes en  $1/r^2$  ; c'est cette décroissance qui permet de justifier, en première approche, que l'action de l'indenteur peut être remplacée par l'action de la force ponctuelle  $P$  lorsqu'on veut observer l'effet des contraintes dans la zone (ZE) assez loin de l'origine  $O$ .

- par contre, si on quitte ZE pour aller observer dans ZDPE, il faut corriger le champ précédent pour tenir compte de l'influence immédiate de l'indenteur. C'est un terme en  $1/r^3$  qui modélise cette perturbation pseudo-plasto-densifiante confinée près de l'indenteur ; Yoffe (1982) donne ainsi le champ d'ampoule :

$$\sigma_{rr}^B = -\frac{2B(-1 - \nu + (-5 + \nu)\text{Cos}[2\theta])}{r^3} \quad (3)$$

$$\sigma_{r\theta}^B = \frac{2B(1 + \nu)\text{Sin}[2\theta]}{r^3} \quad (4)$$

en justifiant sa construction comme la combinaison d'un centre de pression et d'un dipôle élastique ( Love (1920), Króner (1958)). Le coefficient  $B$  est une constante quantifiant l'intensité de la contrainte locale induite par la plasticité et la densification ; il est affecté au terme principal décrivant l'influence du champ d'ampoule.

Yoffe définit enfin un troisième champ de contrainte très utilisé également pour les problèmes d'indentation. Il présente aussi l'avantage d'être uniforme et, non isotrope, il décrit plus finement l'action de l'indenteur :

- la charge d'indentation  $P$  est remplacée par une pression verticale  $p$  répartie uniformément sur un disque horizontal de rayon  $a$  centré en  $O$  ( avec  $P = p\pi a^2$  )
- elle tend à engendrer une expansion latérale du matériau qui, en réaction, exerce une pression  $q$  de contention radiale centripète. La non isotropie est assurée par la combinaison de  $p$  et  $q$ . Le système des contraintes de pressions ainsi générées est uniforme et s'écrit (Yoffe (1982))

$$\sigma_{rr}^U = -p * (\text{Cos}[\theta])^2 - q * (\text{Sin}[\theta])^2 \quad (5)$$

$$\sigma_{r\theta}^U = (p - q) * \text{Sin}[\theta] * \text{Cos}[\theta] \quad (6)$$

Les descriptions du champ de Boussinesq, du champ d'ampoule et du champ de pressions uniforme simple faites par Yoffe nous ont incité à proposer, via une série de Fourier tronquée et en fonction du coefficient de Poisson, une estimation analytique du rayon de la zone affectée par l'élasto-plasto-densification ainsi qu'une expression de la constante d'influence  $B$  correspondante.

## 2.2 Estimation du rayon de la zone affectée par l'élasto-plasto-densification

La superposition du champ de Boussinesq et du champ d'ampoule correcteur via (1)+(3) et (2)+(4) se veut représentative du champ élasto-plasto-densifié ; comme le suggère également Yoffe, affiner cette proposition reviendrait à introduire des compositions de dipôles qui complèteraient le développement via l'ajout de termes en  $1/r^4, 1/r^5, \dots$ . En première approche, on se propose de remplacer la partie ZDPE de ce champ confinée au voisinage immédiat de l'indenteur par le champ de pressions élastique uniforme non isotrope (5),(6) ; on définit ainsi une inclusion homogène se voulant équivalente à la ZDPE. Pour ce faire, la dimension de cette «

ampoule de substitution» considérée de contour hémisphérique ( l'origine n'est pas nécessairement en  $O$  mais située sur l'axe de symétrie) est conditionnée en s'assurant simplement de la continuité au raccord entre son enveloppe extérieure et la ZDPE pour laquelle elle se substitue. On traduit la continuité de la composante normale ( en  $rr$  ) et de la composante de cisaillement ( en  $r\theta$  ; selon Yoffe, la continuité des autres composantes n'est pas nécessaire) comme suit :

- l'intérieur de l'ampoule correspond au champ de substitution uniforme  $\sigma_{rr}^U, \sigma_{r\theta}^U$
- l'extérieur de l'ampoule doit se raccorder au champ  $\sigma_{rr} + \sigma_{rr}^B$  et  $\sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta}^B$  de la ZDPE
- donc, à l'interface :

$$\text{côté intérieur} \rightarrow \sigma_{rr}^U = \sigma_{rr} + \sigma_{rr}^B \leftarrow \text{côté extérieur} \quad (7)$$

$$\rightarrow \sigma_{r\theta}^U = \sigma_{r\theta} + \sigma_{r\theta}^B \leftarrow \quad (8)$$

- au-delà de ce raccord on suppose en première étude que le terme en  $1/r^2$  devient assez vite dominant et correspond ainsi majoritairement à la zone (ZE).

On remarque respectivement en (7) une fonction paire de  $\theta$  et en (8) une fonction impaire ; chacune est développée en série de Fourier jusqu' à l'approximation de l'ordre  $\theta$ . En associant  $P = p\pi a^2$ , l'identification (calcul formel, Wolfram (2003)) des 3 premiers coefficients ( respectivement :  $(8)_{\sin[\theta]}, (7)_1, (8)_{\cos[\theta]}$ ) nous permet d'obtenir les estimations suivantes en fonction de la charge  $P$  imposée et du rayon  $a$  lié à la géométrie de la pyramide d'indentation :

- le rayon de raccordement  $R$  de l'ampoule de substitution :

$$R = \frac{a\sqrt{8 + \pi(3 - 6\nu) + 20\nu}}{\sqrt{6\pi}}$$

- connaissant  $R$ , on calibre le coefficient d'influence  $B$  correspondant :

$$B = \frac{aP\sqrt{8 + \pi(3 - 6\nu) + 20\nu}(16 - 20\nu + \pi(-3 + 6\nu))}{36\sqrt{6}\pi^{5/2}}$$

- la pression  $q$  de contention :

$$q = \frac{P(-88 + 124\nu - 40\nu^2 + 3\pi(7 - 16\nu + 4\nu^2))}{3a^2\pi(-8 - 3\pi - 20\nu + 6\pi\nu)}$$

Avec ces résultats, en coordonnées sphériques, on peut reprendre la formule de Yoffe proposant une estimation de l'accroissement de volume via ( $u_r$  désigne le déplacement radial d'expansion de l'ampoule de substitution)

$$\Delta V = \int_0^{\pi/2} r^2 u_r \sin[\theta] d\theta = 2 * \pi * B * (1 - 2 * \nu) / (3 * G)$$

avec  $G = E/(2 * (1 + \nu))$  et ainsi obtenir une dépendance explicite de cette expansion de la zone (ZDPE) en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$ . A titre de première estimation la figure (4) montre une décroissance de  $\Delta V$  ; elle est construite en supposant ici un module d'Young  $E$  sensiblement constant, nous avons placé en abscisse  $\nu$  et en ordonnée le coefficient  $\Delta V/(P * a/E)$ . Dans Yoshida (2005), une décroissance est aussi observée pour le volume affecté par l'élasto-plasto-densification et annihilé par traitement thermique de recuit.

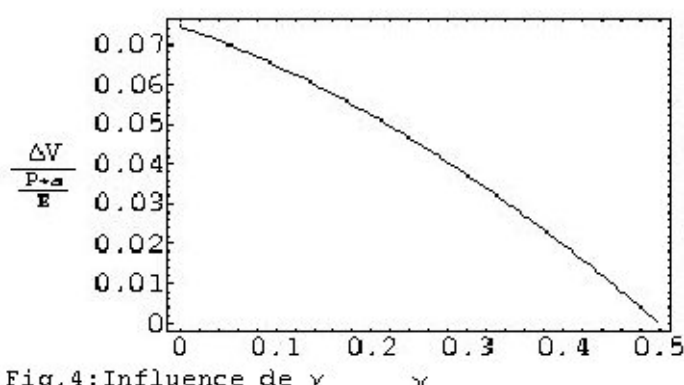


Fig.4: Influence de  $\nu$  sur l'expansion  $\Delta V$  de la zone ZDPE

### 3 Conclusion

Le formalisme de « champ d'ampoule » et de champ de pressions uniforme non isotrope introduit par Yoffe nous a permis une proposition d'une définition simple d'une « ampoule » de substitution basée sur le concept d'inclusion homogène élastique équivalente dont le champ se substitue localement à un champ plus complexe. On a choisit une forme de calotte hémisphérique tronquée et l'argument de substitution est simplement une condition de continuité à l'endroit du raccordement.

L'étude est à poursuivre ; il reste par exemple à définir plus précisément le rayon  $a$  de la zone d'action de la pression  $p$  en fonction notamment de la géométrie de l'indenteur et à progresser dans les conditions de raccords.... . Actuellement, les résultats semi-analytiques proposés ont le mérite de dépendre explicitement du coefficient de Poisson  $\nu$  afin de donner une estimation du volume affecté par l'élasto-plasto-densification. Nous retrouvons une influence de  $\nu$  analogue à celle obtenue dans l'introduction expérimentale ce qui nous incite à de futurs développements expérimentaux et théoriques.

### Références

- Boussinesq, M.J., 1885. Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Gauthiers-Villars.
- Ji, H. ; V. Kéryvin, Rouxel, T. ; Hammouda T. ; 2006 Densification of window glass under very high pressure and its relevance to Vickers indentation. *Scripta Mater.* 55, 1159-1162.
- Kröner 1958 Kontinuums Theorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin - Springer Verlag.
- Love, A.E.H 1920 The Mathematical Theory Of Elasticity. third edition (Cambridge University Press).
- Rouxel, T. ; Sangleboeuf, J-C. ; Guin, J-P. ; Kéryvin, V. ; Sorarù, G-D. 2001 Surface damage resistance of gel-derived oxycarbide glasses : hardness, toughness and scratchability . *J. Am. Ceram. Soc.* 84 10 2220-2224
- Yoffe, E.H 1982 Elastic stress fields caused by indenting brittle materials . *Phil. Mag. A* Vol 46, N°4, 617-628
- Yoshida, S. ; Sangleboeuf, J-C. ; Rouxel, T. 2005 Quantitative evaluation of indentation-induced densification in glass. *J. Mater. Res.* Vol 20, N°12, Dec 2005, 3404-3412
- Wolfram, S. 2003 The Mathematica Book. 5th ed., Wolfram Media