

# Accélération des calculs de propagation d'ondes élastiques par la Méthode multipôle rapide (formulation par équations intégrales de frontière).

Stéphanie Chaillat<sup>1,2</sup>, Marc Bonnet<sup>1</sup> & Jean-François Semblat<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides  
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

<sup>2</sup> Laboratoire Central des Ponts et Chaussées  
58 bd Lefebvre, 75732 Paris Cedex 15  
{bonnet,chaillat}@lms.polytechnique.fr  
{semblat}@lpc.fr

## Résumé :

La résolution des équations de l'élastodynamique par la méthode des éléments de frontière (BEM) conduit à un système linéaire plein. Des travaux récents sur les équations de Helmholtz et Maxwell ont établi la capacité de la méthode multipôle rapide (FM) à réduire la complexité de la BEM à  $N \log_2 N$  par itération d'un solveur de type GMRES. Cet article présente la transposition de l'approche FM-BEM à l'élastodynamique 3D dans le domaine fréquentiel. La précision et l'efficacité de la méthode sont illustrées sur des exemples numériques mobilisant jusqu'à  $N = O(10^6)$  inconnues nodales.

## Abstract :

The solution of the elastodynamic equations using boundary element methods (BEMs) gives rise to fully-populated matrix equations. Earlier investigations on the Helmholtz and Maxwell equations have established that the Fast Multipole (FM) method reduces the complexity of a BEM solution to  $N \log_2 N$  per GMRES iteration. The present article addresses the extension of the FM-BEM strategy to 3D elastodynamics in the frequency domain. Efficiency and accuracy are demonstrated on numerical examples involving up to  $N = O(10^6)$  nodal unknowns.

## Mots-clefs :

méthode des éléments de frontière ; méthode multipôle rapide ; élastodynamique 3D

## 1 Introduction

Le principal avantage de la méthode des éléments de frontière (BEM) est de ne nécessiter une discrétisation que pour la frontière de l'objet. Toutefois, cette formulation conduit à un système linéaire dont la matrice est pleine et non symétrique. Les solveurs itératifs ont alors une complexité en  $O(N^2)$  en temps et en mémoire. La contrainte de stockage en mémoire les rend difficiles à appliquer aux systèmes BEM où  $N > O(10^4)$ .

Dans d'autres domaines d'application de la BEM tels que l'électromagnétisme ou l'acoustique, une diminution significative des coûts CPU et mémoire ( $O(N \log_2 N)$ ) a été obtenue grâce à l'utilisation de la méthode multipôle rapide (FMM, Nishimura (2002)). Actuellement, il existe très peu d'études publiées sur la FMM en élastodynamique : Fujiwara (2000) en domaine fréquentiel et Takahashi *et al.* (2003) en domaine temporel. Ce travail se propose d'améliorer la méthodologie utilisée par Fujiwara (2000) en prenant en compte les avancées récentes réalisées pour les équations de Maxwell (Darve (2000)).

## 2 Méthode des équations intégrales de frontière

**Formule de représentation intégral de frontière.** Soit  $\Omega$  un solide élastique isotrope, caractérisé par  $\mu$  (module de cisaillement),  $\nu$  (coefficient de Poisson) et  $\rho$  (masse volumique). Considérant uniquement le problème dans le domaine fréquentiel (pulsation  $\omega$ ), le déplacement  $\mathbf{u}$  est donné en un point intérieur  $\mathbf{x} \in \Omega$  par la formule de représentation (Bonnet (1999)) :

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - u_i(\mathbf{y})T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)] dS_y \quad (\mathbf{x} \in \Omega), \quad (1)$$

où  $\mathbf{t}$  est le vecteur traction sur la frontière  $\partial\Omega$ , et  $U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)$  et  $T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)$  représentent les solutions fondamentales de l'élastodynamique (Eringen et Suhubi (1975)) :

$$\begin{aligned} U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) &= \frac{1}{4\pi k_S^2 \mu} \left( (\delta_{qs}\delta_{ik} - \delta_{qk}\delta_{is}) \frac{\partial}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial y_s} G_S(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} G_P(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \right), \\ T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) &= \mu \left[ \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{jk}\delta_{i\ell} \right] \frac{\partial}{\partial y_\ell} U_h^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) n_j(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2)$$

où  $G_\alpha$  ( $\alpha = S, P$ ) est le noyau de Green de l'espace infini de l'équation de Helmholtz :

$$G_\alpha(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) = \frac{\exp(ik_\alpha|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \quad k_S^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad k_P^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k_S^2, \quad (3)$$

$k_\alpha$  est le nombre d'onde correspondant aux ondes élastiques  $P$  ou  $S$  et  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  est la normale unité de  $\partial\Omega$  dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

**Équation intégrale de frontière.** Lorsque  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , une singularité se produit en  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . L'utilisation d'un procédé de passage à la limite dans la représentation intégrale (1) conduit à l'équation intégrale :

$$c_{ik}(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) = \text{PV} \int_{\partial\Omega} [t_i(\mathbf{y})U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - u_i(\mathbf{y})T_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)] dS_y \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad (4)$$

où PV  $\int$  correspond à une intégrale au sens des valeurs principales de Cauchy (CPV) et le terme libre  $c_{ik}(\mathbf{x})$  est égal à  $0.5\delta_{ik}$  dans le cas usuel où  $\partial\Omega$  est régulière en  $\mathbf{x}$ .

## 3 Méthode multipôle rapide : principe

Le principe de la FMM est d'accélérer le calcul du produit matrice-vecteur nécessaire à chaque itération du solveur itératif. De plus, la matrice du système n'est jamais assemblée, de sorte à diminuer le coût mémoire.

D'une manière générale, la présence du terme  $G_\alpha(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$  dans les tenseurs de Green (2) permet de les reformuler en termes de développements en séries multipôles, analogues à ceux connus en électromagnétisme (Nishimura (2002); Song *et al.* (1997); Darve (2000)). Le vecteur position  $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$  peut être décomposé en  $\mathbf{r} = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) - (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{r}_0 - \tilde{\mathbf{y}}$ , où  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{y}_0$  sont deux pôles. L'application du théorème d'addition de Gegenbauer permet alors d'expliciter le développement multipôle des fonctions de Green de l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} = \frac{ik}{4\pi} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\mathbf{s}} \in S} e^{ik\tilde{\mathbf{s}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}} \mathcal{G}_L(\tilde{\mathbf{s}}; \mathbf{r}_0) e^{-ik\tilde{\mathbf{s}} \cdot \tilde{\mathbf{y}}} d\tilde{\mathbf{s}}, \quad (5)$$

où  $S$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  et la fonction de transfert  $\mathcal{G}_L(\tilde{\mathbf{s}}; \mathbf{r}_0)$  est définie par

$$\mathcal{G}_L(\tilde{\mathbf{s}}; \mathbf{r}_0) = \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k|\mathbf{r}_0|) P_l(\cos(\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{r}_0)) \quad (6)$$

en termes des polynômes de Legendre  $P_l$  et des fonctions de Hankel sphériques de première espèce  $h_l^{(1)}$ . Ainsi, les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de l'intégrale sont séparées. Il n'est plus nécessaire de recalculer les solutions élémentaires pour chaque couple de points sur la frontière de l'objet et, dans l'intégrale, il est possible de réutiliser les intégrations précédentes selon  $\mathbf{x}$ . Les solutions fondamentales de l'élastodynamique (2) peuvent aisément se mettre sous la forme (5) en remplaçant  $\mathcal{G}_L$  par les fonctions de transfert appropriées :  $\mathcal{U}_{i,L}^{k,\alpha}$  et  $\mathcal{T}_{i,L}^{k,\alpha}$  ( $\alpha = S, P$ ).

La formule (5) n'est valable que si  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/|\mathbf{r}_0| \leq 2/\sqrt{5}$  (Darve (2000)). De là provient la nécessité d'introduire une grille 3D cubique de pas  $d$  englobant le domaine  $\partial\Omega$ . La formule (5) est alors applicable dès que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  appartiennent à des cellules non adjacentes, les pôles  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{y}_0$  étant choisis aux centres des cellules. La version mono-niveau de la FMM utilise la décomposition (5) dès que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  appartiennent à des cellules non-adjacentes. Les contributions à calculer ((1) ou (4)) sont de la forme :

$$I_k(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{C}_y} t_i(\mathbf{y}) U_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) dS_y \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{C}_x)$$

où  $\mathcal{C}_x$  et  $\mathcal{C}_y$  sont les cellules de centres respectifs  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{y}_0$  (utilisées comme pôles de la décomposition). L'utilisation de la décomposition (5) du noyau de Green dans (2), à  $L$  fixé conduit à une procédure en trois étapes ( $\alpha = S, P$ ) :

$$\mathcal{R}_i^\alpha(\tilde{\mathbf{s}}_q; \mathbf{y}_0) = \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{C}_y} t_i(\mathbf{y}_0 + \tilde{\mathbf{y}}) e^{-ik_\alpha \tilde{\mathbf{s}}_q \cdot \tilde{\mathbf{y}}} dS_{\tilde{\mathbf{y}}} \quad (\text{initialisation}) \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_k^\alpha(\tilde{\mathbf{s}}_q; \mathbf{x}_0) = \mathcal{U}_{i,L}^{k,\alpha}(\tilde{\mathbf{s}}_q; \mathbf{r}_0) \mathcal{R}_i^\alpha(\tilde{\mathbf{s}}_q; \mathbf{y}_0) \quad (\text{transfert}) \quad (8)$$

$$I_k^\alpha(\mathbf{x}) \approx \sum_q w_q \frac{ik_\alpha}{4\pi} e^{ik_\alpha \tilde{\mathbf{s}}_q \cdot \tilde{\mathbf{x}}} \mathcal{L}_k^\alpha(\tilde{\mathbf{s}}_q; \mathbf{x}_0) \quad (\text{intégration}) \quad (9)$$

où  $\tilde{\mathbf{s}}_q$  et  $w_q$  sont les points et poids de quadrature de la sphère unité. Quand les cellules  $\mathcal{C}_x$  et  $\mathcal{C}_y$  sont adjacentes, la méthode traditionnelle ((1) ou (4)) est appliquée.

La méthode multipôle mono-niveau dans le cas de l'élastodynamique a une complexité optimale en  $O(N^{3/2})$ . Cette dernière est obtenue en utilisant  $O(N^{3/4})$  cellules. Il s'agit déjà d'un gain appréciable par rapport à la BEM classique mais l'algorithme multi-niveaux permet d'obtenir de meilleurs résultats.

Pour pouvoir utiliser le plus souvent le calcul FMM, les calculs effectués au moyen des méthodes de la BEM classique doivent être confinés aux régions de l'espace les plus petites. Par ailleurs, plus les cellules sont grandes, plus les calculs FMM sont rapides. L'introduction de différents niveaux de grilles est la clé de la FMM multi-niveaux, reposant sur une division de chaque cellule en 8 cellules plus petites. De nouvelles paires de cellules non-adjacentes sont ainsi créées sur lesquelles la FMM, non applicable au niveau précédent, peut être utilisée. Ainsi, les calculs non-FMM sont limités aux cellules adjacentes au plus profond niveau de subdivision.

Pour une précision donnée, le paramètre de troncature  $L$  de la fonction de transfert (6) et le nombre de points de quadrature  $\tilde{\mathbf{s}}_q$  dans (7), (8) et (9) dépendent du niveau de subdivision,

et augmentent avec le rapport entre taille de la cellule et longueur d'onde. De ce fait, la complexité théorique de la méthode multipôle rapide multi-niveaux est de l'ordre de  $O(N \log_2 N)$  par itération en temps CPU et en mémoire (quelque peu supérieure à la complexité  $O(N)$  de la méthode en statique où le paramètre de troncature ne dépend pas du nombre de niveaux).

#### 4 Méthode multipôle rapide : précision et efficacité numérique

Dans cette partie, deux exemples sont traités pour mettre en évidence la précision et l'efficacité numérique de la méthode.

**Cavité sphérique sous pression uniforme.** Une cavité sphérique de rayon  $R$  placée dans un espace infini élastique isotrope ( $\nu = 0.25$ ) est soumise à une pression interne uniforme  $P$ . La solution analytique de ce problème est connue (Eringen et Suhubi (1975)). La qualité de la solution numérique FMM est évaluée au moyen de l'erreur relative en moyenne quadratique. La Table 1 montre la précision de la FMM pour différentes valeurs de fréquences normalisées ( $\eta_P = k_P R / \pi$ ). Ces résultats montrent également que la précision se détériore si le nombre de points du maillage par longueur d'onde  $S$  est inférieur à 8. Ainsi, les autres résultats présentés utilisent des maillages choisis de façon à comporter au moins 10 noeuds par longueur d'onde  $S$ . Pour terminer, on retrouve numériquement les complexités théoriques en temps CPU et en coût de stockage pour la BEM classique, la FMM mono-niveau et la FMM multi-niveaux, sur la figure 1.

$\eta_P$	0.50	1.00	2.00
nb noeuds / $\lambda_S$	16	8	4
cavité $r = R$	0.006	0.006	0.021
domaine $R < r \leq 3R$	0.006	0.008	0.031

TAB. 1 – Erreur relative en moyenne quadratique sur la cavité et dans le domaine

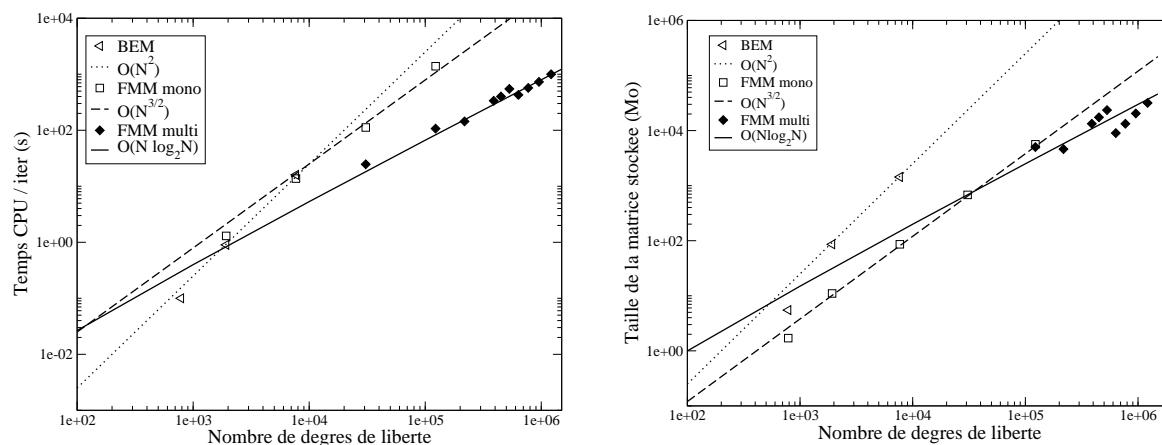


FIG. 1 – Complexités des différentes méthodes (gauche : temps CPU, droite : mémoire)

**Diffraction d'une onde plane P incidente par un canyon hémisphérique.** La diffraction d'une onde P plane verticale incidente par un canyon hémisphérique de rayon  $R$  dans un demi-espace élastique ( $\nu = 0.25$ ) est maintenant considérée. Il s'agit d'une configuration simplifiée d'effet de site topographique en sismologie. La surface hémisphérique du canyon et la portion de

surface libre attenante sont incluses dans un disque de rayon  $D > R$  et sont discrétisées par éléments de frontière. Ce problème a déjà été étudié par Sánchez-Sesma (1983) de manière semi-analytique pour des fréquences normalisées  $\eta_P$  inférieures à 1.5 ( $D = 3R$ ). Sur la Figure 2, les deux méthodes sont comparées. On remarque le bon accord entre les résultats mis à part près de la troncature de la surface libre. Cette différence est probablement due à la différence de traitement de cette troncature.

Grâce à la FMM multi-niveaux, un calcul pour une fréquence normalisée de 5 a pu être effectué (Figure 3) ( $N = 287\,946$ , 5mn par itération et 86 itérations sur un PC mono-processeur avec une fréquence CPU de 3.40 Hz et 3Go de RAM). Ce calcul met en avant le fait que, pour la configuration classique ( $D = 3R$ ) donnée dans la littérature, la partie discrétisée de la surface libre semble être trop petite, des oscillations apparaissant pour  $r/R \geq 2$ .

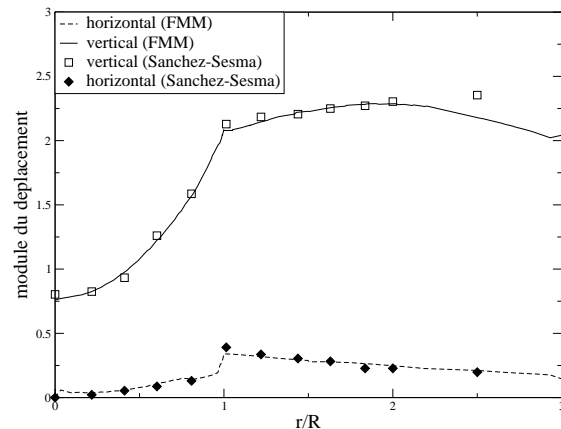


FIG. 2 – Comparaison entre la solution numérique par la FMM et les résultats de Sánchez-Sesma (1983) pour  $\eta_P = 0.25$

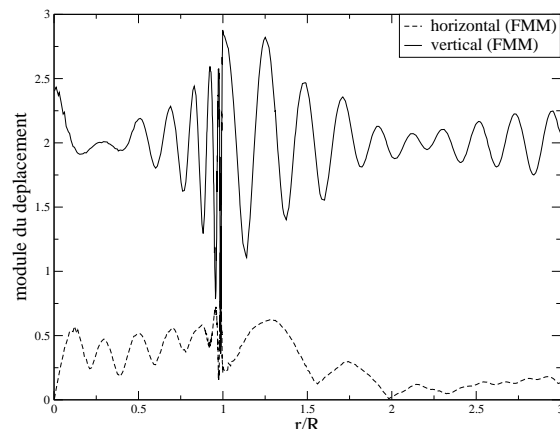


FIG. 3 – Solution numérique par la FMM pour une fréquence normalisée  $\eta_P = 5$

Un problème naturel est alors d'étudier la valeur optimale de la partie de surface libre discrétisée, c'est à dire la plus petite valeur de  $D$  telle que la solution soit insensible à la troncature de la surface libre. Grâce à la FMM, qui permet d'accroître la taille des problèmes traités, cette étude paramétrique est rendue possible. Bien entendu, la valeur optimale de  $D$  dépend du domaine d'étude de la solution et de la fréquence. On se limite ici à un domaine borné par  $r/R \leq 3$  et une fréquence  $\eta_P = 0.25$ .

Sur la Figure 4, le module du déplacement vertical est représenté pour différentes valeurs du rayon de troncature  $D$  ( $\eta_P = 0.25$ ). La sensibilité de la solution semble faible pour  $D \geq 5R$ . Dans la table 2, l'erreur entre une solution de référence pour  $D = 20R$  et la solution pour différentes valeurs de  $D$  a été calculée. À nouveau, ces résultats montrent que la valeur optimale dans ce cas est  $D = 5R$ .

$D$	$2R$	$3R$	$4R$	$5R$	$6R$	$7R$
erreur pour $r/R \leq 3$ (%)	3.4	2.2	3.3	1.3	1.5	1.2
erreur en $r/R = 0$ (%)	13.1	9.7	13.1	0.8	1.9	0.7

TAB. 2 – Erreur entre la solution numérique de référence ( $D = 20R$ ) et les solutions numériques obtenues pour différentes valeurs du rayon de troncature  $D$

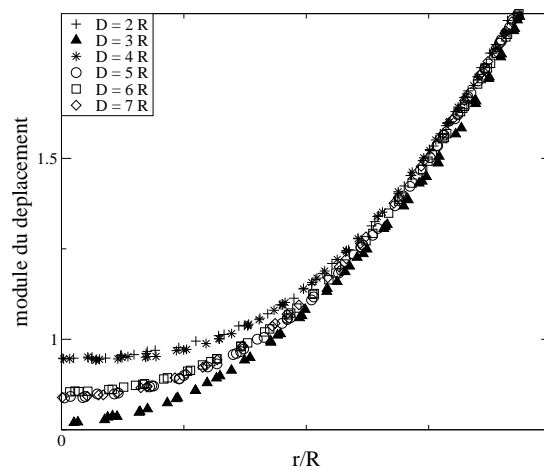


FIG. 4 – Comparaison des déplacements pour différentes valeurs de rayon de troncature  $D$

## 5 Conclusions

Dans ce papier, la FMM a été étendue à l'élastodynamique 3D en domaine fréquentiel. Combinée à la formulation BEM, elle permet de réduire les coûts en termes de temps CPU et mémoire pour l'étude de la propagation des ondes élastiques, et permet de traiter des problèmes de taille au moins  $N = O(10^6)$ . Des comparaisons avec des solutions analytiques montrent la précision de la méthode. De plus, les temps CPU relevés sont cohérents avec les estimations théoriques de la complexité.

## Références

- Bonnet M. 1999 Boundary Integral Equation Method for Solids and Fluids. *Wiley*.
- Darve E. 2000 The fast multipole method : Numerical implementation. *In Journal of Computational Physics*. **160** 195-240.
- Eringen A. C. and Suhubi E. S. 1975 Elastodynamics , II-linear theory. *Academic Press*.
- Fujiwara H. 2000 The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems. *In Geophysical Journal International*. **140** 198-210.
- Nishimura N. 2002 Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *In Applied Mechanics Reviews*. **55** 299-324.
- Sánchez-Sesma F. J. 1983 Diffraction of elastic waves by 3D surface irregularities. *In Bulletin of the Seismological Society of America.*, **73** 1621-1636.
- Song, J.M., Lu, C. C., Chew, W. C. 1997 Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering. *In IEEE Antennas and Propagation*. **45** 1488-1493.
- Takahashi, T., Nishimura, N., Kobayashi, S. 2003 A fast BIEM for three-dimensional elastodynamics in time domain. *In Engineering Analysis with Boundary Elements*. **27** 491-506.