

## Multirésolution adaptative en bases d'ondelettes : application à la simulation d'écoulements visqueux compressibles avec discontinuités.

Christian Tenaud

LIMSI UPR CNRS 3251  
Campus Universitaire, Bât. 508, B.P. 133, F-91403 ORSAY Cedex  
Christian.Tenaud@limsi.fr

### Résumé :

*Cette étude présente la capacité d'un algorithme de multirésolution « complètement » adaptatif avec un codage de la solution volumes finis par valeurs moyennes, à reproduire les interactions fondamentales en mécanique des fluides. Les résultats portent sur des simulations numériques d'écoulements compressibles 2D : advection Euler d'un tourbillon, interaction visqueuse entre une onde de choc faible et un spot de température ou un tourbillon, tube à choc visqueux. Une étude de convergence en fonction du paramètre ( $\varepsilon$ ) de raffinement adaptatif montre que la méthode est linéaire en  $\varepsilon$  et, ainsi, conforme à la théorie. Les résultats sont analysés en terme d'efficacité vis-à-vis de la précision de la solution, du gain en place mémoire et en temps CPU. Ces résultats obtenus se comparent très favorablement à ceux répertoriés dans la littérature, pour tous les écoulements visqueux 2D instationnaires étudiés.*

### Abstract :

*The present study aims at evaluating the capability of a dynamical adaptive mesh refinement algorithm, based on the finite volume multiresolution analysis, to recover the basic interactions in fluid mechanics. This evaluation is performed on numerical simulations of basic 2D compressible flows: the Euler advection of a vortex, the shock-wave / spot of temperature viscous interaction, the shock-wave / vortex viscous interaction and the viscous shock tube. The convergence study is conform to the theory and shows a linear convergence in terms of the threshold parameter ( $\varepsilon$ ) leading the mesh refinement. The efficiency of the method is judge on the CPU and memory compressions relatively to the accuracy of the solutions obtained. The present results obtained through the dynamical adaptive mesh refinement compare very well with those of the literature on single grid computations.*

### Mots-clefs :

**Schéma d'ordre élevé à capture de choc ; AMR ; Analyse multirésolution.**

### 1 Introduction

Les écoulements aérodynamiques présentent, pour la plupart, de nombreux phénomènes instationnaires dont la maîtrise reste, à l'heure actuelle, un des enjeux majeurs des domaines de conception et d'optimisation des engins. En particulier, les interactions entre ondes de choc et couches cisailées sont difficiles à appréhender numériquement du fait de la multiplicité des échelles spatiales à représenter (épaisseur des ondes de choc, taille des décollements, épaisseur des couches cisailées, échelles de la turbulence, ...) et de la gamme en fréquence des instationnarités (turbulence, décollement, mouvement du choc, ...). Pour améliorer la prédiction de tels écoulements par simulation numérique, outre l'utilisation de schémas à capture de choc de haute précision [Daru *et al.* (2004)], il est indispensable de s'orienter vers l'utilisation de maillage adaptatif (AMR: Adaptive Mesh Refinement) afin de pouvoir prendre en compte les différents niveaux d'échelles et ce de façon dynamique. Depuis les travaux précurseurs de A. Harten (1994, 1995) sur la multirésolution appliquée aux lois de conservation hyperboliques, de nombreuses études ont été menées sur les algorithmes de multirésolution "complètement"

adaptatifs. Une des techniques qui semble prometteuse, est celle basée sur l'estimation d'erreur à partir de bases d'ondelettes [Cohen *et al.* (2003)] établie dans le contexte de l'analyse multirésolution (MRA : Multi-Resolution Analysis). C'est dans ce cadre que se positionne ce travail qui a pour objectif principal d'évaluer cette technique de raffinement de maillage adaptatif pour la simulation des écoulements en présence d'interactions ondes de choc / couches cisailées.

Ce travail présente donc la capacité d'un algorithme de multirésolution ``complètement'' adaptatif avec un codage de la solution volumes finis par valeurs moyennes, à reproduire les interactions fondamentales en mécanique des fluides. L'advection, par un écoulement uniforme, d'un tourbillon sera tout d'abord présentée car ce cas test élémentaire est représentatif du problème de conservation de la vorticité. Des cas tests sont ensuite considérés qui mettent en présence des ondes de choc en interaction avec des inhomogénéités de l'écoulement pour étudier la capacité de l'approche à reproduire des processus élémentaires (génération et transport de vorticité, d'ondes acoustiques, recirculations, ...).

## 2 Méthodes numériques

Les simulations sont obtenues par résolution des équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes, complétées par une loi d'état de gaz parfait. Les paramètres sans dimension qui sont considérés, sont : le nombre de Mach ( $Ma$ ), le nombre de Reynolds ( $Re$ ), le rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma$ ), considéré ici constant ( $\gamma=1.4$ , pour l'air) et le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), considéré également constant ( $Pr=0.73$ , pour l'air).

Dans le contexte des volumes finis, la discrétisation des équations de Navier-Stokes repose sur l'évaluation de moyennes par maille des quantités conservatives. Pour ce faire, nous pavons le domaine de calcul ( $\Omega$ ) d'une hiérarchie de grilles cartésiennes emboîtées (ici, dyadiques), d'un niveau le plus grossier (indic   $j=0$ ), vers un niveau le plus fin (indic   $j=J$ ). Chaque niveau ( $j$ ) est composé de volumes élémentaires disjoints (notés  $\Omega_k^j$ ) correspondant à l'union des volumes élémentaires au niveau supérieur ( $\Omega_k^{j+1}$ ). Ceci permet de connaitre assez naturellement les valeurs moyennes par maille à un niveau  $j$  à partir des valeurs moyennes au niveau supérieur ( $j+1$ ) [Cohen *et al.* (2003)]. L'opération (inverse) de prédiction, qui permet de passer d'un niveau  $j$  à un niveau plus fin ( $j+1$ ), est obtenue par reconstruction polynomiale. L'erreur de prédiction est alors définie comme la différence entre la solution au niveau  $j+1$  et sa reconstruction sur le niveau plus grossier ( $j$ ). Cette différence, appelée *détail* et noté  $d_k^{(j)}$ , constitue une erreur d'estimation *a priori* [Cohen *et al.* (2003)]. Dans la présente étude, les détails sont calculés en utilisant des polynômes centrés d'ordre 3, qui sont étendus au cas multi-D par un produit tensoriel [Roussel *et al.* (2003)]. Dans le processus de multirésolution, la solution peut alors être cod e comme la somme des valeurs moyennes sur un niveau grossier et des *détails* sur les niveaux successifs. En remplaçant la décomposition multiéchelle dans le contexte de bases d'ondelettes bi-orthogonales, Cohen *et al.* (2003) ont montré que, si la solution est régulière les détails avaient une décroissance en  $2^j$ , sinon ils pointaient les singularités. Pour opérer une compression de données, les détails sont comparés à une valeur seuil ( $\varepsilon_j$ ) par niveau et les mailles pour lesquelles le détail est inférieur à  $\varepsilon_j$  sont effacées de la mémoire. En suivant l'approche heuristique de Harten (1994), pour que les détails soient d'ordre  $\varepsilon$  (qui devient alors un paramètre de la simulation) quelque soit le niveau, il faut que :  $\varepsilon_j = 2^{D(j-J)}\varepsilon$  (où  $D$  est le nombre de dimensions d'espace). La procédure de compression des données, par élimination des cellules telles que  $d_k^{(j)} < \varepsilon_j$ , est rendue possible grâce à une programmation en arbre. Après compression, l'arbre est ajusté pour obtenir un arbre *graduel* permettant d'une part le calcul des *détails* par approximation polynomiale et d'autre part l'évaluation des flux numériques aux interfaces des cellules. Des mailles fictives sont ensuite ajoutées qui permettent d'assurer la conservation des flux à ces interfaces

Les flux convectifs sont discrétisés par le schéma de haute précision OSMP7, construit en suivant une approche de type Lax-Wendroff et utilisant un support minimum pour l'approximation des dérivées [Daru *et al.* (2004)]. Cette approche, basée sur une intégration couplée temps-espace, précise au 7<sup>ème</sup> ordre (pour le cas scalaire), permet un bon contrôle de l'erreur de troncature du schéma, ce qui la rend particulièrement attractive dans le cadre d'une approche *LES*. Pour le traitement des oscillations parasites proches des régions de fort gradient, des conditions de préservation de la monotonie (MP : Monotonicity Preserving) améliorent le comportement des contraintes TVD proches des extrema, tout en assurant une haute précision dans les régions régulières [Daru *et al.* (2004), Suresh *et al.* (1997)]. Les flux visqueux sont discrétisés par des formules centrées d'ordre 2. L'extension multidimensionnelle est assurée par un splitting directionnel de Strang. Plus de détails sont donnés dans [Daru *et al.* (2004)].

### 3 Résultats

Cette étude est limitée à la simulation d'écoulements compressibles 2D. Les cas tests traités se rapportent à l'advection d'un tourbillon, l'interaction d'une onde de choc faible avec un spot de température ou un tourbillon et l'interaction onde de choc / couche limite se développant dans un tube à choc. Les résultats sont analysés en terme d'efficacité vis-à-vis de la précision de la solution, du gain en place mémoire et en temps CPU.

#### 3.1 Étude de convergence de la méthode sur un cas 2D non-visqueux.

L'advection d'un tourbillon par un écoulement non-visqueux à  $Ma=1$  est tout d'abord simulée pour démontrer la convergence de la méthode et sa capacité à conserver la vorticité sur des distances relativement longues. Nous considérons le cas-test de la propagation à 45   par rapport aux lignes de maillage d'un tourbillon intense [Balsara *et al.* (2000)]. Initialement, le tourbillon est centré sur le domaine  $[-5,5] \times [-5,5]$  et est défini comme une perturbation superposée à un écoulement uniforme  $(\rho, u, v, P)^T = (1, 1, 1, 1)^T$ , donnée par :

$$(\delta u, \delta v) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \mathbf{e}^{\frac{(1-r^2)}{2}} (-y, x) ; \quad \delta T = \frac{(\gamma-1)\varepsilon^2}{8\gamma\pi^2} \mathbf{e}^{(1-r^2)} ; \quad \delta S = 0.$$

où  $r$  est le rayon,  $S$  est l'entropie et  $\varepsilon=5$  est l'intensité du tourbillon. Des conditions de périodicité sont imposées sur toutes les faces du domaine. La solution exacte de ce problème non-visqueux est juste la convection « passive » du tourbillon et les erreurs sont calculées à partir de cette solution exacte à un temps sans dimension  $t=10$ , correspondant au retour du tourbillon à sa position initiale après un tour de boite dans sa diagonale. Plusieurs maillages fins ont été utilisés, de 32x32 à 512x512. Les erreurs en norme  $L_1$  et les ordres de convergence sont reportés sur la figure 1, pour la grille complète (notée GC, *i.e.*  $\varepsilon=0$ ) et pour les différentes valeurs du paramètre  $\varepsilon$  ( $10^{-5} < \varepsilon < 10^{-1}$ ), gérant le processus de raffinement. On constate, tout d'abord, que le schéma est d'ordre 5 sur le maillage complet. Néanmoins, il faut souligner que les niveaux d'erreur obtenus avec le schéma OSMP7 sont bien inférieurs (d'environ 2 ordres de grandeur)    ceux obtenus par Balsara *et al.* (2000) avec un schéma MP-WENO ( $r=5$ ) pour le même ordre de convergence.

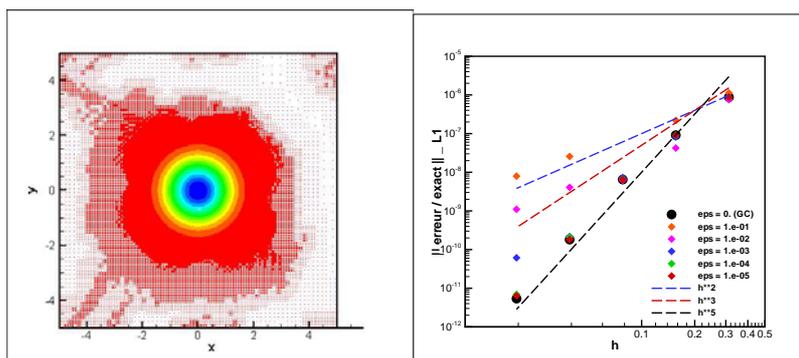


Figure 1– Convection d'un tourbillon : solution à  $t=10$ , valeur de la masse volumique sur le maillage adapté pour  $\varepsilon=10^{-2}$  à partir d'un maillage 512x512 (à gauche) et taux de convergence et influence du processus de multirésolution (à droite).

Le processus de multirésolution n'a pas d'influence sur l'ordre de la méthode tant que le seuil ( $\varepsilon$ ) est inférieur à  $10^{-3}$  (Fig.1). Pour  $\varepsilon \geq 10^{-2}$ , la précision est affectée par l'erreur d'approximation de multirésolution pour des maillages fins, mais le niveau d'erreur reste néanmoins proche de celui obtenu sur un maillage (128x128). Pour juger de l'efficacité, les variations du temps de calcul et de la place mémoire sont tracées en fonction du seuil (Fig.2).

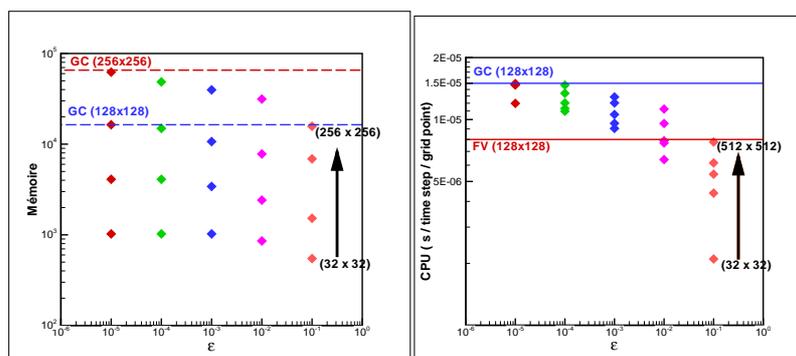


Figure 2– Convection d'un tourbillon : Efficacité de la méthode de multirésolution sur la mémoire (à gauche) et le CPU (à droite) en fonction du seuil ( $\varepsilon$ ).

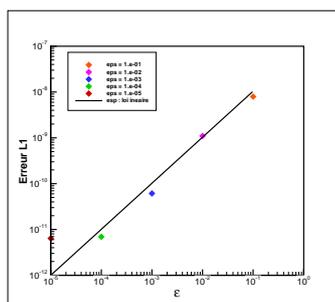


Figure 3– Evaluation de l'erreur d'approximation en fonction du paramètre de raffinement  $\varepsilon$ .

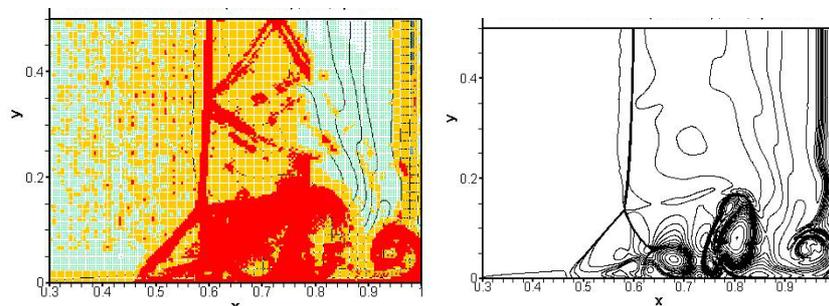
Pour effectuer une comparaison, la mémoire est mesurée comme le nombre de mailles utiles et le temps CPU (sur pentium IV, 3 GHz) est rapporté au nombre de pas de temps et au nombre de points. Sur la figure 2 sont également reportés la mémoire et le temps CPU pour le calcul grille complète (GC,  $\varepsilon=0$ ) et le cas volume fini (FV, sur une grille unique). Dans tous les cas la technique de multirésolution présente un gain en place mémoire par rapport au cas grille complète. Néanmoins, un gain CPU ne peut être réalisé par rapport au cas volume fini qu'à partir du moment où le gain en mémoire est supérieur à 50%, ce qui est réalisé quand la solution est très bien résolue (maillage raffiné). Quand le maillage est suffisamment raffiné, l'erreur

d'approximation issue la multirésolution domine l'erreur globale. Nous confirmons alors (Fig.3) que cette erreur converge à l'ordre  $\varepsilon$ , en accord avec la théorie développée dans le contexte de bases d'ondelettes bi-orthogonales [Cohen *et al.* (2003)].

### 3.2 Interaction onde de choc inhomogénéités d'écoulements 2D visqueux.

Pour des raisons de concision, nous n'aborderons ici que le cas test du tube à choc 2D visqueux. Néanmoins, pour les interactions choc/spot de température et choc/tourbillon, les résultats montrent que  $\varepsilon = 10^{-2}$  est la valeur du paramètre la plus intéressante. En effet, les solutions sont obtenues avec des erreurs très faibles par rapport à la solution en grille complète, accompagnées d'une efficacité indéniable : un gain en mémoire de l'ordre de 30 % et des temps CPU inférieurs à  $10^{-5}$  secondes/pas de temps/point qui rend cette approche totalement compétitive par rapport à une intégration en volume fini sur une grille unique (coefficient 2 sur le temps CPU, par exemple).

Pour montrer la capacité de la méthode, nous considérons un tube à choc de section carrée de longueur unité dont les parois sont isolantes. Un diaphragme, initialement positionné au centre du tube ( $x = 0,5$ ), sépare la partie gauche du tube, où la solution est initialisée à :  $\rho_L = 120$  ;  $P_L = \rho_L$  ;  $u_L = v_L = 0$ , de la partie droite, initialisée à :  $\rho_R = 1,2$  ;  $P_R = \rho_R$  ;  $u_R = v_R = 0$ . La viscosité dynamique est considérée constante. Le nombre de Reynolds est fixé ici à  $Re=200$ . A l'instant initial, le diaphragme est rompu et une onde de choc faible (Mach=2,37), suivie par une discontinuité de contact, se propagent vers la région de basse pression (vers la droite) en créant une couche limite sur la paroi basse du tube. Lorsque l'onde de choc se réfléchit sur la paroi droite, le faible niveau de pression d'arrêt dans la couche limite provoque un large décollement, entraînant la formation d'une structure de chocs multiples « en lambda ». La dynamique de cet écoulement a déjà fait l'objet d'une étude détaillée avec des solutions de référence [Daru *et al.* (2001, 2003)].



**Figure 4– Tube à choc ( $Re=200$ ) : maillage adaptatif (à gauche) et iso-contours de masse volumique (à droite), pour la valeur du paramètre de raffinement  $\varepsilon=10^{-2}$  et à  $t=1$ .**

La simulation a été effectuée pour une résolution la plus fine de  $1024 \times 512$  qui avait permis d'obtenir une solution convergée en volume fini sur une grille unique. On constate (Fig.4) que le raffinement s'opère efficacement dans les zones de fort gradient et la zone d'interaction requière le maillage le plus fin. Pour la valeur du paramètre  $\varepsilon=10^{-2}$ , la couche limite en amont de l'onde de choc réfléchi et la discontinuité de contact bloquée au voisinage de la paroi droite, sont suffisamment résolues avec un maillage deux fois plus grossier que la référence [Daru *et al.* (2003)]. La solution obtenue (Fig.4) avec la présente méthode est tout à fait comparable à celle de référence [Daru *et al.* (2003)]. Pour  $\varepsilon=10^{-2}$ , la compression mémoire est très efficace puisque seulement 26 % des cellules du maillage le plus fin sont retenus. Tout en calculant des solutions précises, cette compression mémoire permet aisément de compenser le coût de l'algorithme de multirésolution en atteignant des temps CPU inférieurs à  $10^{-5}$  secondes/pas de temps/point, correspondant à moins de la moitié du temps sur un maillage unique en volume fini. Les erreurs d'approximation introduites par la multirésolution restent relativement faibles.

Pour illustrer ces petites erreurs, l'évolution de la masse volumique est tracée le long de la paroi basse du tube pour  $t=1$  (Fig.5) et pour  $\varepsilon=10^{-2}$  et  $10^{-3}$ . La convergence est relativement bonne entre ces deux résultats qui sont tout à fait en accord avec les résultats de références [Daru *et al.* (2003)].

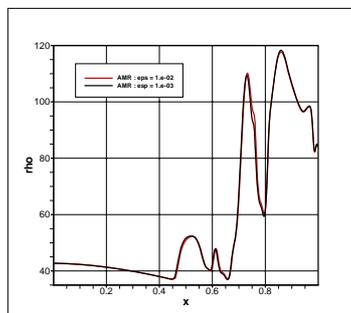


Figure 5– Tube à choc : Variation le long de la paroi basse de la masse volumique à un temps  $t=1$ , pour deux valeurs du paramètre de raffinement  $\varepsilon=10^{-2}$  et  $10^{-3}$ .

#### 4 Conclusions

Nous avons évalué les capacités prédictives d'une approche complètement adaptative de raffinement de maillage à partir d'une analyse multirésolution, sur plusieurs cas-test significatifs. L'étude de convergence montre que la méthode est linéaire en fonction du paramètre ( $\varepsilon$ ) de raffinement et, ainsi, conforme à la théorie. L'efficacité de la méthode en gain CPU et compression mémoire est indéniable et rend cette approche totalement compétitive par rapport à une intégration en volume fini sur une grille unique.

#### Références

- Balsara D.S., Shu C.W. 2000 Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes with Increasingly High order of Accuracy, *J. Comput. Phys.* **160**, 405—452.
- Cohen, A., Kaber, S. M., Müller, S., Postel, M. 2003 Adaptive Multiresolution for Finite Volume Solutions of Gas Dynamics. *Computers & Fluids* **32**, 31—38.
- Daru V., Tenaud C. 2001 Evaluation of TVD high resolution schemes for unsteady viscous shocked flows, *Computers & Fluids*, **30**, 89—113.
- Daru V., Tenaud C. 2003 Simulation numérique de l'interaction choc réfléchi-couche limite en fond de tube à choc, *Recueil des articles du Congrès Français de Mécanique*, Septembre 2003, Nice, France.
- Daru, V., Tenaud, C. 2004 High Order One-step Monotonicity-Preserving Schemes for Unsteady Compressible flow Calculations. *J. Comput. Phys.* **193**, 563—594.
- Harten, A. 1994 Adaptive Multiresolution Schemes for Shock Computations. *J. Comput. Phys.* **115**, 319—338.
- Harten, A. 1995 Multiresolution Algorithms for the Numerical Solution of Hyperbolic Conservation Laws. *Comm. Pure Appl. Math.* **48**, 1305—1342.
- Roussel, O., Schneider, K., Tsigulin, A., Bockhorn, H. 2003 A conservative fully adaptive multiresolution algorithm for parabolic PDE's *J. Comput. Phys.* **188**, 493—523.
- Suresh, A., Huynh, H.T. 1997 Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Time Stepping *J. Comput. Phys.* **136**, 83—99.