

Stratégie de résolution en dynamique combinant des champs discrets et continus

Gavoille Sylvain^{*†}, Rey Christian[†], Mariotti Christian^{*} & Delaplace Arnaud[†]

**Laboratoire de Détection et Géophysique
CEA DAM Ile de France
BP 12, 91680 Bruyères-les-Châtel, FRANCE
e-mail : christian.mariotti@cea.fr*

*†Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan, 61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan, FRANCE
e-mail : {gavoille,rey,delaplace}@lmt.ens-cachan.fr*

Résumé :

Ce papier décrit une stratégie pour coupler une méthode éléments discrets avec une méthode éléments finis. Notre objectif est le développement d'une formulation basée sur une partition de l'unité en énergie des champs discrets et continus sur un sous-domaine de raccord. Sur le bord de ce sous-domaine de raccord, la continuité du champ cinématique est assurée au moyen de multiplicateurs de Lagrange.

La stratégie développée est appliquée au Benchmark de Lamb. Le résultat numérique obtenu est comparé à la solution analytique afin d'évaluer l'efficacité de la méthode.

Abstract :

This paper describes a strategy for coupling finite and discrete element methods. Our objective was the development of a partition of unity in energy of discrete and continuum fields over a bridging subdomain. On the boundary of this bridging subdomain, the continuity of the kinematic fields is ensured by means of Lagrange multipliers.

First numerical results were provided by Lamb's benchmark. Numerical errors were estimated using the analytical solution of this benchmark to evaluate this method.

Mots-clefs :

Approche multi-échelle, méthode éléments discrets, méthode éléments spectraux

1 Introduction

L'enjeu de cette étude est la modélisation d'un séisme à l'échelle régionale. Une des difficultés majeure dans ce type de problème est la prise en compte de la fragmentation au niveau de la faille. Parmi l'ensemble des méthodes présentes dans la littérature pour traiter la fragmentation, nous avons choisi d'utiliser la méthode des éléments discrets (DEM) car elle permet de traiter de façon naturelle la rupture pour les matériaux fragiles. Mais le coût numérique important engendré par ce type d'approche réduit considérablement son utilisation pour l'ensemble du problème.

En considérant que le milieu se rompt seulement au niveau de la faille, une solution naturelle consiste à coupler la DEM avec la méthode des éléments spectraux (SEM) pour la partie linéaire du problème. La méthode des éléments spectraux est effectivement bien adaptée pour traiter les problèmes d'élastodynamique, en raison de ses bonnes propriétés de convergence et de son faible coût numérique.

L'enjeu consiste ainsi en le développement d'une stratégie de couplage DEM-SEM, avec notamment le traitement de l'incompatibilité des maillages. Cette problématique est aussi rencontrée dans les méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement (Schwarz 1870) et les méthodes de partition de modèle (Ben Dhia 1998; Belytschko 2004). S'inspirant de ces travaux, nous proposons une démarche de couplage basée sur une partition de l'unité en énergie des champs discrets et continus sur un sous-domaine de raccord. Sur le bord de ce sous-domaine de raccord, la continuité du champ cinématique est assurée au moyen de multiplicateurs de Lagrange.

Dans une première partie, on décrira brièvement les méthodes des éléments discrets et des éléments spectraux. Dans une seconde partie, nous expliquerons au moyen d'une formulation faible notre stratégie de couplage. Enfin, un exemple numérique avec couplage DEM-SEM illustrera la méthode.

2 Description des méthodes

2.1 La méthode des éléments discrets

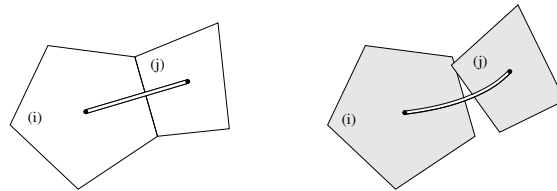


FIG. 1 – Représentation du modèle discret

Les méthodes éléments discrets sont un ensemble de techniques numériques développées au cours des trente dernières années pour modéliser les matériaux granulaires, les roches, et autres discontinuités à l'échelle du grain. Dans notre méthode éléments discrets (Delaplace 2003), le matériau est représenté à l'aide de particules de Voronoi interagissant entre elles au moyen de lois non linéaires (Figure 1). La modélisation de la fracture est assez simple, puisqu'elle est générée par la perte de cohésion entre les particules.

2.2 La méthode des éléments spectraux

La méthode des éléments spectraux est une méthode éléments finis d'ordre élevé qui combine à la fois la flexibilité géométrique des éléments finis avec un taux de convergence important (Komatitsch 1999). Celle-ci comporte plusieurs propriétés numériques intéressantes, telles que des matrices de masse diagonale et une aptitude particulière pour la résolution dans une architecture parallèle.

3 La stratégie de couplage

3.1 Position du problème

Le modèle utilisé pour le couplage est montré Figure 2. Le domaine est divisé en deux sous-domaines : le sous-domaine SEM est noté par Ω_1 et le sous-domaine DEM est noté par Ω_2 . Le recouvrement de ces deux sous-domaines est noté Ω_c . L'intersection du bord de Ω_1 avec Ω_2 est notée Γ_1 , l'intersection du bord de Ω_2 avec Ω_1 est notée Γ_2 , la réunion de Γ_1 et Γ_2 est notée Γ .

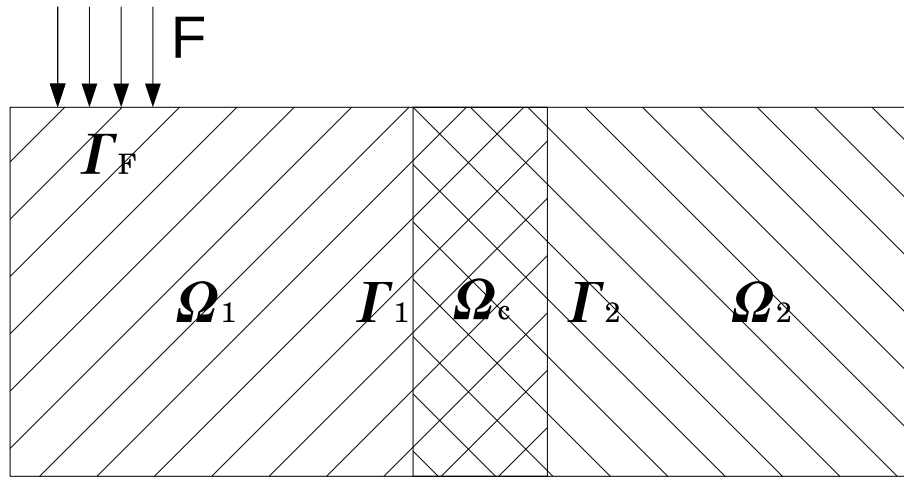


FIG. 2 – Domaine d'étude

Par la suite, on notera \ddot{u}_i le champ d'accélération dans Ω_i , u_i le champ de déplacement dans Ω_i , ρ la densité, C la loi de comportement et F le chargement extérieur sur Γ_F .

Dans un premier temps, posons notre problème :

– Equation cinématique :

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 \text{ sur } \Gamma \quad (1)$$

– Equations d'équilibre :

$$\text{div} \sigma_1 = \rho \ddot{u}_1 \text{ dans } \Omega_1 \setminus \Omega_c \quad (2)$$

$$\text{div} \sigma_2 = \rho \ddot{u}_2 \text{ dans } \Omega_2 \setminus \Omega_c \quad (3)$$

$$\alpha_1(\text{div} \sigma_1 = \rho \ddot{u}_1) \text{ dans } \Omega_c \quad (4)$$

$$\alpha_2(\text{div} \sigma_2 = \rho \ddot{u}_2) \text{ dans } \Omega_c \quad (5)$$

$$\sigma_1 n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \{\Gamma_F \cup \Gamma_2\} \quad (6)$$

$$\sigma_2 n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_1 \quad (7)$$

– Chargement extérieur :

$$\sigma_1 n = F \text{ sur } \Gamma_F \quad (8)$$

– Compatibilité du champ de contrainte :

$$\sigma_1 n = \sigma_2 n \text{ sur } \Gamma \quad (9)$$

– Relations de comportement :

$$\sigma_1 = A_1 : \nabla u_1 \text{ dans } \Omega_1 \quad (10)$$

$$\sigma_2 = A_2 : \nabla u_2 \text{ dans } \Omega_2 \quad (11)$$

$$A_1 = A_2 = A \text{ dans } \Omega_c$$

– Conditions initiales :

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = u_1 = u_2 = 0 \text{ à } t = 0 \quad (12)$$

3.2 Mise en place de la stratégie

A partir d'un affaiblissement des équations (1, 2, 3, 4, 5 et 12), on arrive à la formulation faible suivante. On cherche les champs cinématiques $(\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, u_1, u_2, \lambda_3) \in \mathcal{H}$ tels que $\forall (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{H}^*$:

$$\sum_{i=1,2} \left[\int_{\Omega_i \setminus \Omega_c} \rho \ddot{u}_i v_i d\Omega + \int_{\Omega_i \setminus \Omega_c} \nabla u_i : A_i : \nabla v_i d\Omega + \int_{\Omega_c} \alpha_i \rho \ddot{u}_i v_i d\Omega + \right. \quad (13)$$

$$\left. \int_{\Omega_c} \alpha_i \nabla u_i : A : \nabla v_i d\Omega \right] + \int_{\Gamma} [(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1)v_3 + \lambda_3(v_1 - v_2)] d\Gamma = \int_{\Gamma_F} F v_1 d\Gamma$$

où : $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

λ_3 est le multiplicateur de Lagrange au niveau de l'interface Γ .

La discrétisation des champs 1 et 2 s'obtient de façon standard. Pour ce faire, on pourra se référer à (Komatitsch 1999) et (Delaplace 2003). Précisons tout de même que dans le cas du champ discret, la formulation faible est un moyen générique. En ce qui concerne le champ d'interface 3 (Γ), on utilisera une distribution de Dirac centrée sur les particules discrètes. Une fois la discrétisation effectuée, on arrive au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{U}_1 + K_1 U_1 + C_1^T \Lambda_3 = F \\ M_2 \ddot{U}_2 + K_2 U_2 + C_2^T \Lambda_3 = 0 \\ C_1 \ddot{U}_1 + C_2 \ddot{U}_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

où M_i désigne la matrice de masse, K_i la matrice de raideur, C_i la matrice de projection et F l'effort extérieur qui peuvent être identifiés facilement dans la formulation variationnelle (13).

La condensation du problème se fait uniquement sur l'interface 3 (Γ), ce qui permet de réduire le coût numérique. Le problème condensé s'écrit :

$$H \Lambda_3 = S \quad (15)$$

$$\text{avec : } \begin{aligned} H &= C_1 M_1^{-1} C_1^T + C_2 M_2^{-1} C_2^T \\ S &= C_1 M_1^{-1} (F - K_1 U_1) + C_2 M_2^{-1} (-K_2 U_2) \end{aligned}$$

Après avoir résolu ce système, on peut injecter Λ_3 dans le système précédent (14) et finir la résolution de façon purement explicite puisque l'on utilise un schéma aux différences centrées pour la résolution temporelle. On notera que ce type d'approche est adapté pour la résolution dans une architecture parallèle.

4 Exemple numérique

Le benchmark de Lamb est un test approprié pour évaluer la performance numérique d'une méthode en dynamique du fait de l'existence d'une solution analytique (Lamb 1903). Celui-ci représente la propagation d'ondes mécaniques dans un milieu semi-infini élastique et homogène, sous l'hypothèse de déformation plane. La source utilisée ici est un effort ponctuel appliqué sur la surface libre du milieu. Une fonction de Rickers (16) est choisie pour ce chargement afin d'obtenir un spectre borné, ce qui nous permet par la suite d'observer les phénomènes de couplage plutôt que les phénomènes de dispersion.

$$F(t) = -A[(\pi f_c(t - t_0))^2 - 0.5]e^{-(\pi f_c(t-t_0))^2} \quad (16)$$

avec $A = 2.0 * 10^5$ N, $f_c = 14.5$ Hz et $t_0 = 0.1$ s.

Les propriétés du matériau sont les suivantes :

- densité : $\rho = 2200$ kg/m³
- module d'Young : $E = 18.8$ GPa
- coefficient de Poisson : $\nu = 0.25$

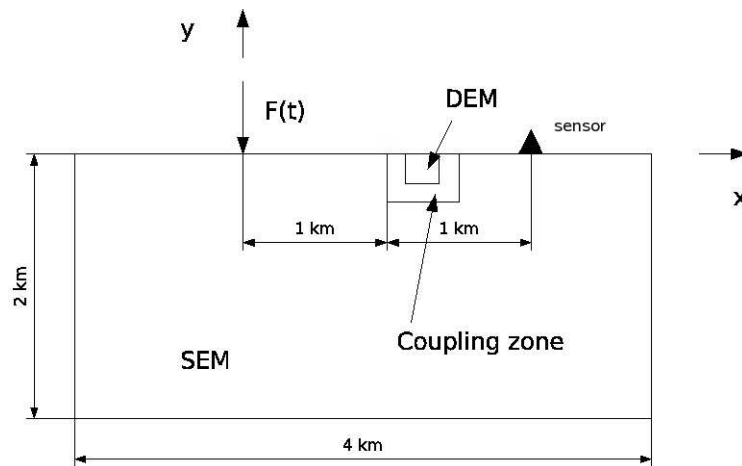


FIG. 3 – Problème de Lamb

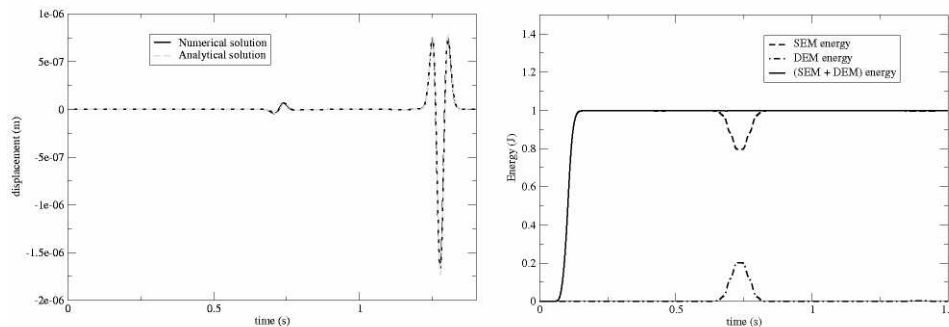


FIG. 4 – a/ Déplacement au capteur

b/ Transfert énergétique

La figure 4a montre les ondes au capteur après leurs passages dans la zone de couplage. Après comparaison avec la solution analytique, la solution numérique semble corrélée. La fi-

gure 4b montre qu'il n'y a pas de perte énergétique durant le transfert.

5 Conclusions

Dans ce papier, nous présentons une stratégie adaptée pour le couplage entre une méthode élément fini et une méthode élément discret. Cette stratégie est basée sur une partition de l'unité en énergie sur la zone de recouvrement. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour raccorder le champ au niveau du bord de ce sous-domaine. En procédant ainsi, cela nous permet de coupler des maillages incompatibles tout en ayant un coût numérique moindre pour le raccord. Précisons tout de même que cette stratégie permet de garder le caractère explicite des méthodes et est adaptée à la résolution dans une architecture parallèle.

Références

- [Schwarz 1870] Schwarz H.A., *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft*, **15**, pp. 272-286, 1870.
- [Ben Dhia 1998] Ben Dhia H., Multiscale mechanical problems : the arlequin method, *Computational Solid Mechanics*, **326**, pp. 899-904, 1998.
- [Delaplace 2003] Ibrahimbegovic A., Delaplace A. , Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle material, *Computers and Structures*, **81**, pp. 1255-1265, 2003.
- [Komatitsch 1999] Komatitsch D., Vilotte J.P., Vai R. Castillo-Covarrubias J.M., Sanchez-Sesma F.J., The spectral element method for elastic wave equations - application to 2-D and 3-D seismic problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **25**, pp. 1139-1164, 1999.
- [Belytschko 2004] Xiao S.P., Belytschko T., A bridging domain decomposition for coupling continua with molecular dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech Engrg.*, **193**, pp. 1645-1669, 2004.
- [Lamb 1903] Lamb H., On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Proceedings of the Royal Society of London*, **72**, pp. 128-130, 1903.