

## Interaction entre rugosités d'interfaces et ondes acoustiques guidées

Catherine Potel & Michel Bruneau

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (UMR-CNRS 6613)  
Avenue Olivier Messiaen, 72085 LE MANS Cedex 9  
catherine.potel@univ-lemans.fr, michel.bruneau@univ-lemans.fr

### Résumé :

*L'étude porte sur la modélisation analytique des champs acoustiques en guides d'ondes fluides limités par des parois qui présentent des irrégularités de faibles dimensions en regard des dimensions transversales des guides et des longueurs d'ondes considérées. Les conditions aux frontières sont traduites par des conditions de Neumann sur le profil de rugosité, et la solution est recherchée par projection sur les modes propres d'un guide à géométrie compatible extérieur au guide réel, en faisant usage de la formulation intégrale avec une fonction de Green appropriée. La perturbation apportée par la rugosité est calculée par approximations successives, mettant en évidence deux mécanismes d'échanges d'énergie entre modes : l'un par couplage de volume et l'autre par couplage de surface, le premier dépendant de la profondeur de rugosité, et le deuxième dépendant de surcroît de la pente locale.*

### Abstract :

*The study deals with the analytical model of acoustic fields in fluid guides, with walls presenting distributed small deviations from the regular shape, compared to transverse dimensions of the guides and to the considered wavelengths. The boundary conditions are modeled by Neumann conditions on the rough profile, and the solution is obtained by the projection on the eigenmodes of a geometrically compatible guide, exterior to the real guide, using integral formulation with suitable Green function. The perturbation provided by the roughness is calculated by successive approximations, highlighting two mechanisms energy exchanges between modes: one through a bulk coupling and the other through a surface coupling, the first one depending on the depth of the roughness, and the second depending in addition on the local slope.*

### Mots-clefs :

**acoustique ; rugosité ; guide**

### 1 Introduction

L'effet de rugosités de parois sur la propagation des ondes acoustiques le long de ces parois ou dans les guides limités par ces parois, et en pratique la caractérisation de rugosités de parois par analyse des champs acoustiques avec lesquels elles interagissent (problème inverse), font l'objet d'un regain d'intérêt depuis près d'une décennie. Ceci tient en particulier à l'importance et la diversité des applications susceptibles de bénéficier de techniques acoustiques : caractérisation d'états de surfaces en contact et d'états de collages, champs acoustiques en cristaux phononiques, effets d'irrégularités de façades sur la propagation dans les rues en basses fréquences, etc.

Autant la rugosité proprement dite a drainé l'attention des chercheurs en acoustique et mécanique, autant la modélisation des ondes acoustiques dans les guides formés par ces parois

reste encore un problème ouvert, surtout en milieu solide. C'est ainsi que l'objet de l'étude présentée ici porte sur la modélisation analytique des champs acoustiques en guide d'ondes fluides limités par des parois qui présentent des irrégularités de faibles dimensions en regard des dimensions transversales des guides et des longueurs d'ondes considérées, prélude à des travaux ultérieurs sur la propagation en guides solides.

Le problème acoustique est ainsi tout d'abord posé (§ 2) en traduisant les conditions aux frontières par des conditions de Neumann sur le profil de rugosité. La projection de l'équation de propagation sur les modes propres d'un guide à géométrie compatible qui contient le guide réel permet ensuite de mettre en évidence deux opérateurs de rugosité, l'un de surface et l'autre de volume, traduisant chacun un couplage particulier (§ 3). La solution est cherchée dans un premier temps en faisant usage d'un changement de variable adapté, dans le cas où n'intervient qu'un seul mode (modèle monomode sans couplages inter-modaux), afin de mettre en évidence les phénomènes de base en termes de diffusion d'une onde guidée sur une irrégularité de paroi, grâce à une intégration directe de l'équation de propagation (§ 4). Les couplages multimodaux sont ensuite pris en compte par utilisation de la formulation intégrale avec une fonction de Green appropriée (§ 5). Enfin, des exemples portant sur des réseaux réguliers ou non de longueurs finies mettent en évidence diverses propriétés, en particulier les effets de corrélations entre fréquences spatiales du réseau et les longueurs d'ondes acoustiques suivant l'axe du guide (§ 6).

## 2 Le problème acoustique

Le guide fluide 3D de la figure 1-a, caractérisé par sa masse volumique  $\rho_0$  et par la célérité du son  $c_0$ , est limité par deux plaques parallèles parfaitement rigides, comportant chacune une faible rugosité bi-dimensionnelle de chaque côté telle que le guide réel soit compris entre deux guides lisses fictifs d'épaisseur intérieure  $d$  et d'épaisseur extérieure  $\delta$ . Par suite, le guide fluide fictif extérieur enserrant le guide réel peut être caractérisé par deux plaques parallèles planes parfaitement rigides en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = \delta$  telles que  $\delta = d + z_0 + z_d$  (figure 1-b) où  $z_0$  et  $z_d$  sont les profondeurs maximales de rugosité, respectivement en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = \delta$ . Les profondeurs de rugosité, c'est-à-dire la distance entre le guide fictif extérieur et le guide réel sont notées respectivement  $H_0(x_1, x_2)$  et  $H_d(x_1, x_2)$  en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = \delta$ , ou encore  $H(x_1, x_2, x_3 = 0, \delta)$ . Par suite, les coordonnées des frontières réelles du guide rugueux sont données par

$$x_3 = H_0(x_1, x_2) \text{ et } x_3 = \delta - H_d(x_1, x_2). \quad (1)$$

Les conditions aux frontières en tout point de la frontière imposent que la dérivée normale du champ de pression soit nulle (conditions de Neumann), soit, en notant  $\mathbf{n}_0$  et  $\mathbf{n}_d$  les vecteurs unitaires normaux à la surface réelle en tout point respectivement  $x_3 = H_0(x_1, x_2)$  et  $x_3 = \delta - H_d(x_1, x_2)$ , et sortant du domaine fluide considéré,

$$\partial_{\mathbf{n}_0} p = 0 \text{ et } \partial_{\mathbf{n}_d} p = 0, \quad (2)$$

où  $\partial_{\mathbf{n}_0} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla$  et  $\partial_{\mathbf{n}_d} = \mathbf{n}_d \cdot \nabla$  sont les dérivées normales. Un calcul classique permet d'exprimer ces dérivées normales en fonction des dérivées par rapport à chacune des coordonnées, ce qui conduit finalement à écrire le problème bien posé pour la pression acoustique sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \left( \Delta_{//} + \partial_{x_3 x_3}^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 \right) \hat{p}(\mathbf{r}; t) = -\hat{f}(\mathbf{r}; t), H_0 \leq x_3 \leq \delta - H_d, \forall \mathbf{r}_{//} \in D_{//}, \quad (3-a) \\ \bullet \partial_{x_1} \hat{p}(x_1=0, x_2, x_3; t) = \hat{u}(\mathbf{r}; t), x_1=0, \forall x_2, H_0 \leq x_3 \leq \delta - H_d, \quad (3-b) \\ \bullet \partial_{x_3} \hat{p}(\mathbf{r}; t) = O(\mathbf{r}; t) \hat{p}(\mathbf{r}; t), x_3 = H_0(x_1, x_2) \text{ and } x_3 = \delta - H_d(x_1, x_2), \forall \mathbf{r}_{//} \in D_{//}, \quad (3-c) \\ \bullet \text{Boundary conditions for } \mathbf{r}_{//} \in S_{//} \text{ (Sommerfeld condition when } D_{//} \text{ is infinite),} \quad (3-d) \end{array} \right.$$

où  $\Delta_{//} = \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$ ,  $\partial_{tt}^2$  et  $\partial_{x_i}$  désignent respectivement  $\partial^2 / \partial t^2$  et  $\partial / \partial x_i$ ,  $\hat{p}(\mathbf{r}; t)$  est la pression complexe au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ ,  $\hat{f}$  et  $\hat{u}$  sont respectivement des fonctions source de volume et de surface,  $S_{//}$  est la surface frontière du guide (domaine  $D_{//}$ ),  $x_1$  et  $x_2$  sont les deux composantes du vecteur  $\mathbf{r}_{//}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{r}$ , et  $O(\mathbf{r}; t)$  est un opérateur complexe dépendant des coordonnées spatiales et du temps qui modélise les effets de la rugosité ( $O(\mathbf{r}; t) = 0$  pour une interface plane lisse) :

$$O(\mathbf{r}; t) = \varepsilon \left\{ (\partial_{x_1} H) \partial_{x_1} + (\partial_{x_2} H) \partial_{x_2} \right\} \quad (4)$$

avec  $\varepsilon = 1$  pour  $x_3 = H_0(x_1, x_2)$  et  $\varepsilon = -1$  pour  $x_3 = \delta - H_d(x_1, x_2)$ .

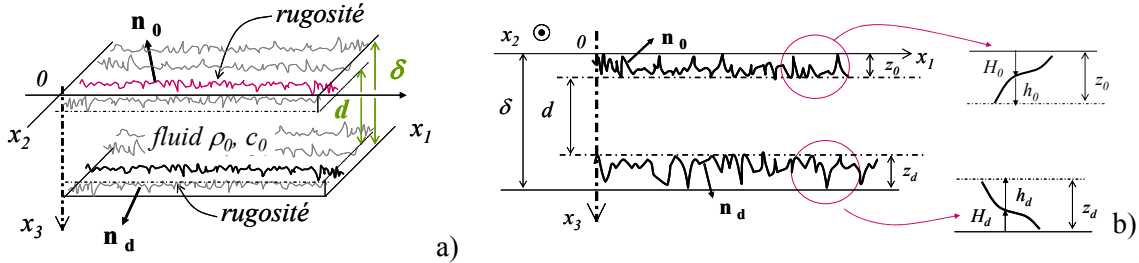


FIG. 1 – Géométrie du problème

### 3 Projection sur les modes propres d'un guide à géométrie compatible : mise en évidence de deux opérateurs de rugosité

La solution du problème (3) peut être projetée sur la base des fonctions propres  $\psi_\mu(x_3)$  associées aux modes transversaux du guide fictif extérieur, défini par les surfaces parallèles planes  $x_3 = 0$  et  $x_3 = \delta$ ,

$$\text{soit} \quad \hat{p}(x_1, x_2, x_3; t) = \sum_{\mu} \hat{a}_{\mu}(x_1, x_2; t) \psi_{\mu}(x_3), \quad (5)$$

où les fonctions propres (orthogonales et normalisées)  $\psi_{\mu}(x_3)$  sont solutions du problème aux valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \partial_{x_3 x_3}^2 + k_m^2 \right) \psi_m(x_3) = 0, 0 \leq x_3 \leq \delta, \quad (6-a) \\ \partial_{x_3} \psi_m(x_3) = 0, x_3 = 0 \text{ and } x_3 = \delta, \quad (6-b) \end{array} \right.$$

$$\text{et sont telles que } \psi_m(x_3) = \sqrt{(2 - \delta_{m0}) / \delta} \cos(k_m x_3) \text{ et } k_m = m\pi / \delta, m \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

La multiplication de l'équation de propagation (3-a) par la fonction propre  $\psi_m(x_3)$ , l'intégration sur le domaine  $H_0 \leq x_3 \leq \delta - H_d$ , puis l'usage du théorème de Green conduisent finalement, pour de petites valeurs des paramètres  $\eta_0(x_1, x_2) = H_0(x_1, x_2) / \delta$ ,  $\eta_d(x_1, x_2) = H_d(x_1, x_2) / \delta$  et  $\eta(x_1, x_2) = \eta_0(x_1, x_2) + \eta_d(x_1, x_2)$ , et pour une source monochromatique de pulsation  $\omega$ , à l'équation

$$\boxed{\left(\Delta_{//} + k_{x_1 m}^2\right) \hat{A}_m(x_1, x_2) = -\hat{S}_m(x_1, x_2) + \beta_{mm} \eta(x_1, x_2) \left(\Delta_{//} + k_{x_1 m}^2\right) \hat{A}_m(x_1, x_2) - \sum_{\mu \neq m} N_{\mu m}(x_1, x_2) \left(\Delta_{//} + k_{x_1 m}^2\right) \hat{A}_\mu(x_1, x_2) - \sum_{\mu} \hat{\gamma}_{\mu m}(x_1, x_2) \hat{A}_\mu(x_1, x_2),} \quad (8)$$

$$\text{où} \quad \hat{a}_m(x_1, x_2; t) = \hat{A}_m(x_1, x_2) \exp(+i\omega t), \quad (9-a)$$

$$\hat{s}_m(x_1, x_2; t) = \int_{H_0}^{\delta-H_d} \psi_m(x_3) \hat{f}(x_1, x_2, x_3; t) dx_3 = \hat{S}_m(x_1, x_2) \exp(+i\omega t), \quad (9-b)$$

$$k_{x_1 m}^2 = k_0^2 - k_m^2 \quad \text{avec} \quad k_0 = \omega/c_0, \quad (9-c)$$

$$\hat{\gamma}_{\mu m}(x_1, x_2) = -\left\{ \alpha_{\mu m}^{(1)} \partial_{x_1} + \alpha_{\mu m}^{(2)} \partial_{x_2} + B_{\mu m} \right\}, \quad (9-d)$$

$$\alpha_{\mu m}^{(j)}(x_1, x_2) = |\beta_{\mu m}| \partial_{x_j} [\eta_0(x_1, x_2)] + \beta_{\mu m} \partial_{x_j} [\eta_d(x_1, x_2)] \quad (9-e)$$

$$B_{\mu m}(x_1, x_2) = k_m^2 \left\{ |\beta_{\mu m}| \eta_0(x_1, x_2) + \beta_{\mu m} \eta_d(x_1, x_2) \right\} \quad (9-f)$$

$$\beta_{\mu m} = (-1)^{m+\mu} \sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{\mu 0})}, \quad (9-g)$$

$$\text{et} \quad N_{\mu m}(x_1, x_2) = \int_{H_0}^{\delta-H_d} \psi_m(x_3) \psi_\mu(x_3) dx_3 = \delta_{\mu m} - \left\{ |\beta_{\mu m}| \eta_0(x_1, x_2) + \beta_{\mu m} \eta_d(x_1, x_2) \right\}. \quad (9-h)$$

L'équation (8) met en évidence deux mécanismes de couplage, l'un au travers de l'opérateur de volume  $N_{\mu m}$  et l'autre de l'opérateur de surface  $\hat{\gamma}_{\mu m}(x_1, x_2)$ , qui représentent respectivement le couplage (de volume) de modes sur la section du guide et le couplage de surface du guide dû à la pente et à la profondeur de rugosité. Le comportement du champ de pression acoustique est donc déterminé par ces deux mécanismes de couplage (couplage de volume et de surface) pendant la propagation le long de l'axe du guide.

#### 4 Modèle monomode : mise en évidence des phénomènes de base

Dans le cas d'un guide bi-dimensionnel où le mode  $m$  est le seul mode créé par la source, et où le couplage entre les modes  $\mu$  et  $m$  est négligé ( $\mu \neq m$ ), l'équation (8) devient

$$\left[1 - \beta_{mm} \eta(x_1)\right] \left(\Delta_{//} + k_{x_1 m}^2\right) \hat{A}_m(x_1) = -\hat{S}_m(x_1) - \hat{\gamma}_{mm}(x_1) \hat{A}_m(x_1), \quad (10)$$

écrite à l'ordre 1 de la petite quantité sans dimension  $\eta(x_1)$  et après changement de variable (revenant à une simple translation à l'ordre 1 en  $\eta$ )

$$\xi_1 = \int_0^{x_1} \exp \left[ \int_0^{x'_1} \beta_{mm} \partial_{x'_1} [\eta(x''_1)] dx''_1 \right] dx'_1 = \int_0^{x_1} xp [\beta_{mm} \eta(x'_1)] dx'_1 \approx x_1 + \beta_{mm} Z(x_1) \quad (11)$$

$$\text{avec} \quad \eta(0) = 0 \quad \text{et} \quad Z(x_1) = \int_0^{x_1} \eta(x'_1) dx'_1. \quad (12)$$

L'intégration de l'équation (10) conduit directement à l'expression approchée de l'amplitude du mode  $m$  à l'ordre 1 en  $\tilde{\eta}$  :

$$\frac{\tilde{A}_m^{[1]}(\xi_1)}{C_m^0} = \left[ 1 - \frac{i}{2} k_{\xi_1 m} \varpi_m \int_{-\infty}^{\xi_1} \tilde{\eta}(\xi) d\xi \right] \exp(-i k_{\xi_1 m} \xi_1) - \left[ \frac{i}{2} k_{\xi_1 m} \varpi_m \int_{\xi_1}^{+\infty} \tilde{\eta}(\xi) \exp(-2i k_{\xi_1 m} \xi) d\xi \right] \exp(+i k_{\xi_1 m} \xi_1), \quad (13)$$

où  $C_m^0$  est une constante arbitraire provenant en pratique d'un terme source et où la notation  $\sim$  fait référence à la nouvelle variable  $\xi_1$ .

Ce résultat montre que le couplage dû à la diffusion sur la surface rugueuse de l'onde primaire  $\exp(-i k_{\xi_1 m} \xi_1)$  créée par la source acoustique, distribue l'énergie acoustique au même mode  $m$  (approche mono-mode), via des ondes secondaires se propageant respectivement dans la même direction que celle de l'onde primaire et dans sa direction opposée (figure 2). Ce modèle monomode très simple permet ainsi une compréhension physique des phénomènes de base, mais est insuffisant dans la plupart des cas, où le couplage intermodal doit être pris en compte, comme développé aux § 3 et 5.

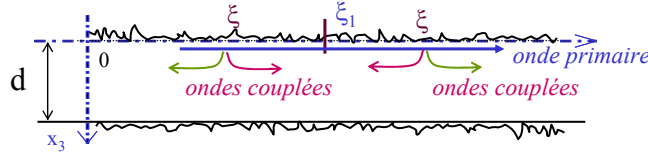


FIG. 2 – Phénomènes de diffusion d'un seul mode sur la rugosité.

## 5 Modèle multimodal faisant usage de la formulation intégrale

La solution de l'équation (8) peut être obtenue par approximations successives, en faisant usage à chaque étape de la formulation intégrale avec un choix approprié de fonction de Green, notée  $G_m(x_1, x_2; x'_1, x'_2)$  :

$$\hat{A}_m^{[n]} = \hat{A}_m^{(0)} + \hat{A}_m^{(1)} + \dots + \hat{A}_m^{(n-1)} + \hat{A}_m^{(n)} \quad (14)$$

où  $\hat{A}_m^{[n]}$  représente la perturbation d'ordre  $n$  pour  $\hat{A}_m$ ,  $\hat{A}_m^{(0)}$  l'approximation d'ordre zéro,  $\hat{A}_m^{(1)}$  la correction d'ordre 1, etc. Dans le cas d'une source ponctuelle monochromatique au point  $(0, 0, x_3)$  d'amplitude  $\hat{Q}_m$ , l'approximation à l'ordre zéro donne

$$\hat{A}_m^{(0)}(x_1, x_2) = \hat{Q}_m G_m(x_1, x_2; 0, 0), \quad (15)$$

qui est la contribution du mode  $m$  au champ direct, au point de réception  $(x_1, x_2)$ , lorsque les interfaces sont des parois lisses parfaitement rigides. Par suite, l'usage de la formulation intégrale et de l'expression (15) pour  $\hat{A}_m^{(0)}(x_1, x_2)$  conduit au résultat  $\hat{A}_m^{(1)}(x_1, x_2)$  à l'ordre 1, et par itération au résultat à l'ordre  $[n+1]$  :

$$\hat{A}_m^{[n+1]}(x_1, x_2) = \hat{A}_m^{(0)} + \sum_{\mu_1=-\infty}^{+\infty} \iint G_m(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \hat{\gamma}_{\mu_1 m}(x'_1, x'_2) \hat{A}_{\mu_1}^{[n]}(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 - \beta_{mm} \iint_{-\infty}^{+\infty} G_m(x_1, x_2; x'_1, x'_2) \eta(x'_1, x'_2) (\Delta_{//} + k_{x_1 m}^2) \hat{A}_m^{[n]}(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 + \sum_{\mu_1 \neq m} \iint_{-\infty}^{+\infty} G_m(x_1, x_2; x'_1, x'_2) N_{\mu_1 m}(x'_1, x'_2) (\Delta_{//} + k_{x_1 m}^2) \hat{A}_{\mu_1}^{[n]}(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2. \quad (24)$$

## 6 Résultats numériques

La configuration choisie ici à titre d'illustration est celle d'un guide bi-dimensionnel comportant une rugosité (profil périodique en dents de scie de période  $A$ ) uniquement à l'interface supérieure  $x_3 = 0$  (l'interface  $x_3 = d$  est lisse). La longueur  $\ell$  de rugosité en  $x_3 = 0$  est telle que  $k_0 \ell = 742$  ce qui correspond à  $N = 200$  dents et à  $\ell \approx 118 \lambda$ . La hauteur des dents est telle que  $\eta = 0.005$ . La source acoustique est supposée ne créer que le mode  $m = 2$ , et les quatre premiers modes ( $\mu = 0,1,2,3$ ) sont propagatifs à la fréquence choisie ( $f d/c_0 = 1.78$  avec  $d/A = 3$ ), les autres étant évanescents. A la fréquence choisie, une relation de phonon (Leduc *et al.* (2005)) est vérifiée, ce qui conduit à un fort couplage du mode créé par la source  $m = 2$  avec lui-même (figure 3-a) et à un couplage moins important avec les autres modes. L'amplitude de ce mode présente une décroissance approximativement exponentielle, correspondant à une redistribution d'énergie aux autres modes au cours de la propagation. La pression acoustique totale (figure 3-b) présente la forme du mode  $m = 2$  créé par la source, modulée par les autres modes  $\mu = 0,1,3,4,5$  créés par le couplage dû à la rugosité.

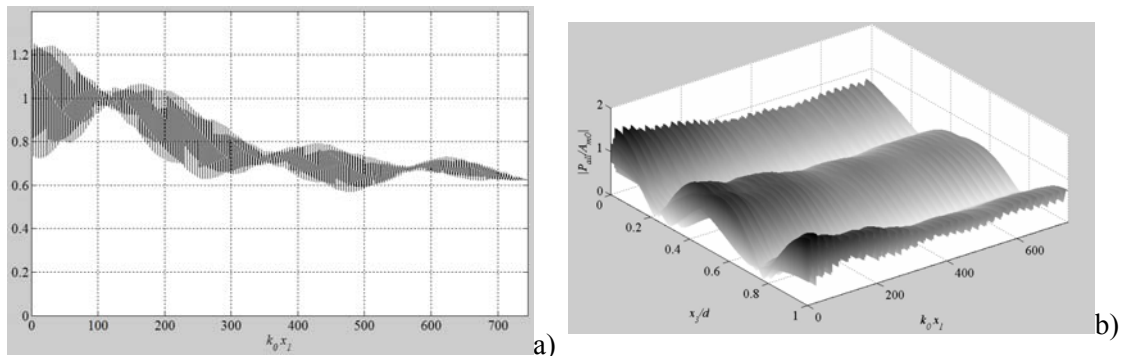


FIG. 3 – Module de l'amplitude normalisée de la variation de pression (ordre 3). -a)  $\hat{A}_{m=2}^{[3]}(x_1)/A_m^0$  pour le mode  $m = 2$ , -b)  $|\hat{P}^{[3]}(x_1)/A_m^0|$  de la variation de pression totale.

## 7 Conclusions

Le modèle présenté permet de prendre en compte le couplage intermodal avec tout type de profil de rugosité de faible hauteur par rapport aux dimensions transversales du guide.

## Références

- Banerjee, S., Kundu, T. 2006 Elastic wave propagation in sinusoidally corrugated waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.* **119** 2006-2017.
- Bruneau, M., Scelo T. (translator and contributor) 2006 Fundamentals of Acoustics, *ISTE, UK and USA*.
- Chimenti, D.E., Lobkis, O.I. 1998 The effect of rough surfaces on guided waves in plates, *Ultrasonics* **36**, 155-162.
- Lobkis, O.I., Chimenti, D.E. 1997 Elastic guided waves in plates with surface roughness. I. Model calculation, *J. Acoust. Soc. Am.* **102**, 143-149.
- Leduc, D., Hladky-Hennion, A.C., Morvan, B., Izbicki, J.L., Pareige, P. 2005 Propagation of Lamb waves in a plate with a periodic grating: interpretation by phonon, *J. Acoust. Soc. Am.* **118**, 2234-2239.
- Pagneux V., Morel, A. 2006 Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness, *Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys. Eng. Sc.* **462**, 1315-1339.