

Condition aux limites transparente pour la propagation acoustique dans un guide recouvert d'un matériau absorbant en présence d'un écoulement uniforme

E. Redon¹, S. Poernomo Sari¹, J.-F. Mercier², A.-S. Bonnet-Ben Dhia² et C. Chambeyron²

¹ LRMA, Université de Bourgogne, 9 Av. Alain Savary 21000 DIJON, France
courriel : Emmanuel.Redon@u-bourgogne.fr

² Laboratoire POEMS, ENSTA, 32 Bd Victor 75739 Paris, France

Abstract :

This work describes a finite element analysis of acoustic radiation in an infinite lined guide. In order to bound the domain, transparent boundary conditions are introduced by means of a Dirichlet to Neumann (DtN) operator based on a modal decomposition. This decomposition is easy to carry out in a guide with rigid walls. With a wall impedance, many difficulties occur even without mean flow. A new scalar product is then introduced, and modes remain orthogonal. For a lined guide with uniform mean flow, modes are no longer orthogonal but a new scalar product allows to define the DtN operator.

Résumé :

Ce travail concerne le calcul par éléments finis du rayonnement acoustique dans un guide d'ondes infini dont une paroi est recouverte d'un matériau absorbant. Pour tronquer le domaine de calcul, on introduit des conditions aux limites transparentes déduites d'une décomposition modale. La décomposition est aisée pour un guide à parois rigides. En présence d'un matériau absorbant, des difficultés apparaissent même en l'absence d'écoulement : l'opérateur n'est plus auto-adjoint et les modes ne sont plus orthogonaux pour le produit scalaire usuel. On introduit un nouveau produit scalaire qui permet de définir une relation d'orthogonalité. La méthode est étendue au cas d'un écoulement uniforme. L'apparition de dérivées tangentielles de la pression sur la paroi traitée entraîne des difficultés supplémentaires. Un nouveau produit scalaire est introduit, incluant les valeurs de la pression sur la paroi traitée. Les simulations sont en bon accord avec la pression rayonnée obtenue par une méthode alternative : en entourant le domaine de calcul par des couches absorbantes de type PML (Perfectly Matched Layers).

Mots-clefs :

Aéroacoustique ; Écoulement uniforme ; Impédance

1 Introduction

L'étude de la propagation des ondes acoustiques dans les écoulements reste un problème d'actualité et difficile à appréhender dont les principales applications se rencontrent dans les secteurs de l'aéronautique (turboréacteurs d'avion) ou de l'automobile (silencieux d'échappement). Pour ces problèmes dont la géométrie est souvent complexe, la méthode des éléments finis reste une des méthodes les plus utilisées. Il est également fréquent de rencontrer dans des configurations réelles des zones assimilables à des guides d'ondes, permettant l'emploi de méthodes modales. L'objet de notre travail est de coupler ces deux approches dans le cas de la propagation acoustique, en régime harmonique. Nous considérons un guide d'onde infini bidimensionnel dont une paroi est recouverte d'un matériau absorbant, en présence d'un écoulement uniforme. L'idée est de discrétiser par éléments finis une portion bornée du guide contenant les sources et d'écrire une condition aux limites transparente sur les bords du domaine tronqué, en utilisant une décomposition modale (Bonnet-Ben Dhia *et al.* (2002)).

2 Problèmes étudiés

On s'intéresse à un conduit bidimensionnel infini de hauteur h qui contient une source acoustique supposée fixe et un fluide en écoulement uniforme subsonique de vitesse v_0 suivant e_x . La paroi supérieure Γ_Z ($y = h$) est recouverte d'un matériau absorbant caractérisé par une impédance Z ($Z \in \mathbb{C}$). La frontière horizontale inférieure Γ du guide est supposée ici parfaitement rigide (Figure 1). Le problème est posé dans le plan Oxy où l'axe x est parallèle aux parois du guide. Le régime est supposé harmonique (ie. $e^{-i\omega t}$, où ω désigne la pulsation). On utilise la méthode des éléments finis pour la discrétisation du domaine. Le domaine physique noté Ω , est donc tronqué par deux frontières verticales Σ_- et Σ_+ sur lesquelles seront appliquées des conditions aux limites transparentes basées sur une décomposition modale. On présente le cas classique d'un guide à parois rigides sans écoulement, puis celui moins trivial d'un guide sans écoulement avec une paroi traitée et enfin le cas plus général d'un guide en écoulement uniforme avec une paroi traitée.

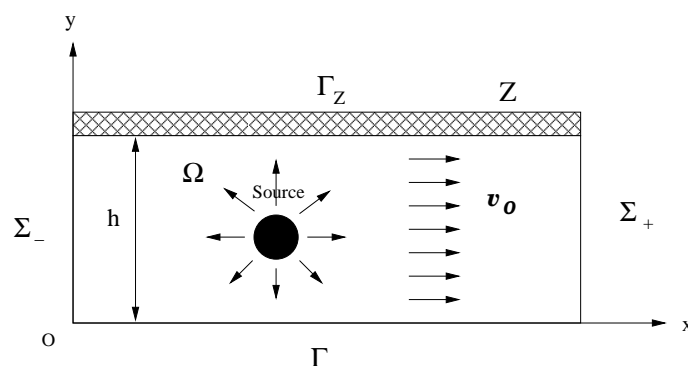


FIG. 1 – Géométrie du problème

3 Guide à parois rigides sans écoulement

En l'absence d'écoulement, la propagation des ondes acoustiques est décrite par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

où f est une source à support compact. Pour des parois parfaitement rigides, les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_Z \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \text{ et } \Gamma_Z \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T^\pm(p) \quad \text{sur } \Sigma_\pm \quad (3)$$

où n désigne la normale extérieure, $k = \omega/c$ le nombre d'onde avec c la célérité du son et $T^-(p)$ et $T^+(p)$ les opérateurs "Dirichlet to Neumann" (DtN) pour les conditions limites transparentes aux extrémités Σ_- et Σ_+ du guide. Pour expliciter les opérateurs DtN (3) sur les frontières Σ_- et Σ_+ il est nécessaire de déterminer les modes propres du guide solution de (1). Ce sont les solutions classiques obtenues par séparation des variables :

$$p(x, y) = \varphi(y)e^{i\beta x} \quad (4)$$

Dans le cas particulier d'un guide à parois parfaitement rigides sans écoulement, on rappelle (voir Bruneau (1998)) qu'il existe deux familles de modes :

$$p_n^\pm(x, y) = \varphi_n^\pm(y) e^{i\beta_n^\pm x} \quad (5)$$

où les indices \pm correspondent au sens de propagation du mode. On déduit facilement la distinction entre les modes propagatifs ($\beta_n^\pm \in \mathbb{R}$) et les modes évanescents ($\beta_n^\pm \notin \mathbb{R}$). On note également que : $\varphi_n^+(y) = \varphi_n^-(y) = \varphi_n(y)$ et que : $\beta_n^+ = -\beta_n^-$. Enfin, les modes propres du guide forment une base orthonormée de $L^2(\Sigma_S)$ vérifiant les conditions aux limites $\partial\varphi_n/\partial y = 0$ pour $y = 0$ et $y = h$:

$$\varphi_0 = 1/\sqrt{h} \quad ; \quad \varphi_n = \sqrt{2/h} \cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \quad , \quad n \geq 1 \quad (6)$$

La constante de propagation β_n est donnée par l'équation de dispersion :

$$\beta_n^2 = k^2 - (n\pi/h)^2 \quad (7)$$

Les opérateurs DtN sur Σ_- et Σ_+ s'écrivent alors :

$$T^\pm(p) = \mp \sum_{n \geq 0} i\beta_n^\pm(p, \varphi_n)_{\Sigma_\pm} \varphi_n(y) \quad (8)$$

$$(p, \varphi)_{\Sigma_\pm} = \int_{\Sigma_\pm} p \bar{\varphi} d\Sigma \quad (9)$$

où (\cdot, \cdot) représente le produit scalaire sur $L^2(\Sigma_\pm)$ et $\bar{\varphi}$ le complexe conjugué de φ .

4 Guide sans écoulement avec une paroi absorbante

En présence d'un matériau absorbant sur une paroi du guide (la généralisation à deux parois traitées ne pose pas de difficulté) la propagation des ondes acoustiques est encore régie par l'équation de Helmholtz (1), seules les conditions aux limites changent :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{p}{Z} \quad \text{sur} \quad \Gamma_Z \quad (11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_Z^\pm(p) \quad \text{sur} \quad \Sigma_\pm \quad (12)$$

La recherche des solutions à variables séparées conduit à nouveau à des fonctions propres de la forme :

$$\varphi_n(y) = A_n \cos(\alpha_n y) \quad (13)$$

où α_n désigne le nombre d'onde transversal lié à la constante de propagation par la relation de dispersion :

$$\beta_n^2 = k^2 - \alpha_n^2 \quad (14)$$

où α_n est solution de l'équation transcendante dont le second membre $1/Z$ peut être complexe :

$$-\alpha_n \tan(\alpha_n h) = \frac{1}{Z} \quad (15)$$

Pour une impédance purement réelle (ie. résistance pure), comme dans le cas d'un guide parfaitement rigide, les modes propres φ_n forment une base orthonormée de $L^2(\Sigma_{\pm})$, la détermination de l'opérateur DtN ne pose pas de difficultés supplémentaires. En revanche, pour une impédance de paroi complexe, le problème aux valeurs propres n'est plus auto-adjoint (car l'adjoint dépend de \bar{Z}), les modes ne sont plus orthogonaux au sens du produit scalaire usuel sur L^2 (9). Toutefois, si on définit un nouveau produit scalaire $(p, \varphi_n)_{\Sigma}^*$, il est possible d'établir une relation d'orthogonalité, l'opérateur DtN s'exprime alors par :

$$T_Z^{\pm}(p) = \mp \sum_{n \geq 0} i\beta_n^{\pm}(p, \varphi_n)_{\Sigma_{\pm}}^* \varphi_n(y) \quad (16)$$

où $(., .)^*$ représente le nouveau produit scalaire défini par :

$$(p, \varphi)_{\Sigma_{\pm}}^* = \int_{\Sigma_{\pm}} p \varphi d\Sigma \quad (17)$$

On note que ce produit scalaire ne permet plus toujours de normer la base de manière simple. Ainsi, il existe des valeurs exceptionnelles de l'impédance Z pour lesquelles la normalisation des modes propres (13) n'est plus possible, l'opérateur DtN ne peut donc plus être explicité. Ces valeurs exceptionnelles Z_c se déduisent de l'équation (15) pour les valeurs de α_n racines complexes de l'équation :

$$\sin(2\alpha_n h) + 2\alpha_n h = 0 \quad (18)$$

En dehors des valeurs exceptionnelles Z_c de l'impédance, les nombres d'ondes transversaux

n	α_n^+	β_n^+
1	0.7897-1.1705i	7.0543+0.1310i
2	2.8012-0.3759i	6.4282+0.1638i
3	6.1213-0.1609i	3.4142+0.2958i
4	9.3179-0.1077i	0.1631+6.1513i
5	12.4865-0.0803i	0.0970+10.340i

TAB. 1 – Racines de $-\alpha_n \tan(\alpha_n) = 1/Z$ pour $Z = 0.5(1 - i)$ et β_n correspondants, $k=7$.

α_n solutions de (15) sont cherchés par la méthode de Newton-Raphson (voir Tableau 1). L'impédance à valeur complexe du matériau conduit à des constantes de propagation β_n^{\pm} toujours complexes (14) responsables de l'atténuation dans le guide, ceci étant dû à $\pm \text{Im}(\beta_n^{\pm}) > 0$. Néanmoins, comme dans le cas sans absorbant, on a encore $\varphi_n^+(y) = \varphi_n^-(y)$ et $\beta_n^+ = -\beta_n^-$.

5 Guide avec écoulement uniforme et une paroi absorbante

En présence d'un écoulement uniforme ($M = v_0/c$) et d'une paroi traitée d'impédance Z , le problème est décrit par l'équation de Helmholtz convectée :

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\Gamma) \quad (20)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{k^2 Z} (M \frac{\partial}{\partial x} - ik)^2 p \quad (\Gamma_Z) \quad (21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -T_{ZM}^{\pm}(p) \quad (\Sigma_{\pm}) \quad (22)$$

On note l'apparition de dérivées tangentielles de la pression dans la condition aux limites sur la paroi traitée (21). Ces termes sont à l'origine de difficultés supplémentaires explicitées plus loin. On recherche les modes solutions de (19) sous la forme :

$$p_n(x, y) = A_n \cos(\alpha_n y) e^{i\beta_n x} \quad (23)$$

La relation de dispersion s'exprime maintenant par :

$$\alpha_n^2 = k^2 - (1 - M^2)\beta_n^2 - 2kM\beta_n \quad (24)$$

où α_n est maintenant solution d'une équation qui dépend de β_n :

$$-\alpha_n \tan(\alpha_n h) = \frac{\beta_n^2 + \alpha_n^2}{k^2 Z} \quad (25)$$

On peut diviser les solutions en deux familles suivant le signe de la partie imaginaire de β_n . Dans les situations pour lesquelles il n'existe pas de modes instables (ie. M petit et $|Z|$ grand), les couples α_n, β_n solutions de (24) et (25) sont des modes qui se propagent vers l'aval (respectivement vers l'amont) quand $\text{Im}(\beta_n) > 0$ (resp. $\text{Im}(\beta_n) < 0$), ils sont alors notés : α_n^+, β_n^+ (resp. α_n^-, β_n^-).

L'écriture de l'opérateur DtN nécessite la définition d'un nouveau produit scalaire noté $((\cdot, \cdot))$ qui apparaît naturellement dans la formulation variationnelle, il s'exprime par :

$$((p, \varphi))_{\Sigma_{\pm}} = \int_{\Sigma_{\pm}} p \varphi d\Sigma - \frac{M^2}{k^2 Z (1 - M^2)} p(h) \varphi(h) \quad (26)$$

Les modes ne sont plus orthogonaux (ie. $((\varphi_n, \varphi_m))_{\Sigma_{\pm}} \neq \delta_{nm}$) on pose donc :

$$((\varphi_n, \varphi_m))_{\Sigma_{\pm}} = O_{nm} \quad (27)$$

où O est une matrice spectrale qui permet de définir le nouvel opérateur DtN tel que :

$$T_{ZM}^{\pm}(p) = \mp \sum_{n,m \geq 0} i\beta_n^{\pm} (O^{-1})_{nm} ((p, \varphi_m))_{\Sigma_{\pm}} \varphi_n(y) \quad (28)$$

Les conditions transparentes décrite par l'opérateur DtN (28) nécessitent donc le calcul des modes, ici encore réalisé par la méthode de Newton Raphson dans le plan complexe à partir des équations (24) et (25) (voir Tableau 2). La dérivée tangentielle de la pression de (21) conduit à l'apparition d'un terme supplémentaire sur la frontière en $(y = h)$ dans (26). La matrice spectrale O n'est pas diagonale, son évaluation est donc plus coûteuse que dans les cas précédents où la matrice O est l'identité puisqu'une relation d'orthogonalité existe. Toutefois, on a vérifié que la matrice spectrale O tend à devenir diagonale quand n et m sont grands.

n	α_n^+	β_n^+	α_n^-	β_n^-
1	0.4820-0.8857i	5.4242+0.0607i	2.1452-1.8204i	-9.9283-0.5631i
2	2.9328-0.2236i	4.7482+0.1021i	2.0977-0.6508i	-9.7133-0.2026i
3	6.1445-0.1357i	1.9054+0.2175i	6.0127-0.2840i	-6.7474-0.4227i
4	9.2440-0.0621i	-2.2007+5.8940i	9.3638-0.1898i	-2.6277-6.1027i
5	12.4071-0.0014i	-2.3059+10.4875i	12.5684-0.1632i	-2.5184-10.6973i

TAB. 2 – Racines de (24) et (25) pour $Z = 0.5(1 - i)$, $M=0.3$ et $k = 7$

6 Résultats numériques

On considère la propagation acoustique dans un guide infini avec une source monopolaire circulaire placée au centre du domaine de calcul pour $k = 7$. En l'absence de solution analytique, on compare la solution numérique obtenue avec l'opérateur DtN à celle obtenue grâce à l'utilisation de couches PML [Becache *et al.* (2004)] en amont de Σ_- et en aval de Σ_+ . La figure 2 présente les résultats obtenus par le code MELINA [Martin] en l'absence d'écoulement et sans absorbant tandis que la figure 3 montrent l'influence d'une impédance $Z = 0.5(1 - i)$, dans les deux cas l'erreur est inférieure à 1 %.

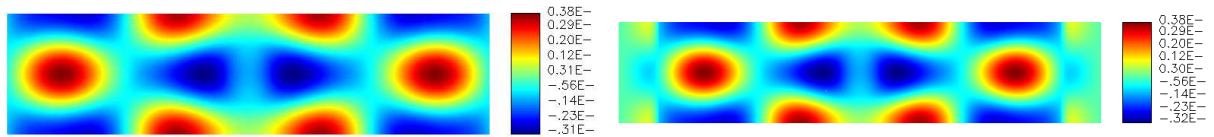


FIG. 2 – Partie réelle de la pression acoustique, DtN (à gauche) PML (à droite), $M=0$, sans absorbant, $k=7$

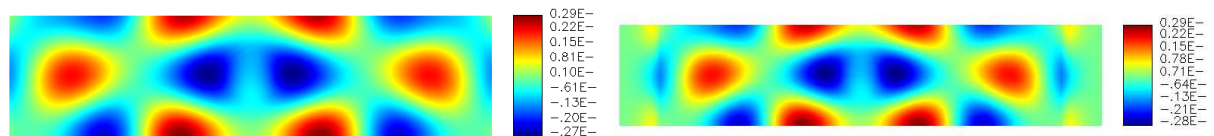


FIG. 3 – Partie réelle de la pression, DtN (à gauche) PML (à droite), $M=0$, $Z = 0.5(1 - i)$, $k=7$

6.1 Conclusions

La détermination numérique des modes dans un guide avec une paroi absorbante en présence ou non d'un écoulement uniforme nous a permis d'écrire de nouvelles conditions limites transparentes. On a montré que les modes forment une base orthonormée au sens d'un nouveau produit scalaire que nous avons défini en l'absence d'écoulement. En présence d'un écoulement uniforme, les modes ne sont plus orthogonaux mais il est encore possible d'introduire un nouveau produit scalaire incluant les valeurs de la pression sur la paroi traitée. L'opérateur DtN peut alors être calculé moyennant le calcul d'une matrice spectrale qui devient diagonale quand l'ordre des modes augmente.

Références

Bonnet-Ben Dhia A. S., Dahi L., Lunéville E., Pagneux V., 2002, Acoustic diffraction by a plate in uniform flow, *Math. Models Appli. Sci.*, **12**(5) (2002), 625-647

Bruneau M., 1998, Manuel d'Acoustique Fondamentale, Hermes

Martin M. Librairie Mélima : <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/>

Bécache E., Bonnet-Ben Dhia A.S. and Legendre G., 2004, Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation, *SIAM J. on Numerical Analysis*, **Volume 42** (1), 409-433