

## Modélisation Micro-Mécanique des Milieux Granulaires Non Saturés

Luc Scholtès, Bruno Chareyre & Félix Darve

Laboratoire Sols-Solides-Structures-Risques  
Grenoble Universités  
Domaine Universitaire BP 53  
38 041 GRENOBLE cedex 9, France  
[Luc.scholtes@hmg.inpg.fr](mailto:Luc.scholtes@hmg.inpg.fr)

### Résumé :

*Un modèle tridimensionnel polydisperse aux éléments discrets a été développé afin d'étudier le comportement des milieux granulaires non-saturés. La présence d'eau interparticulaire est prise en compte grâce à l'introduction de forces spécifiques, décrites dans le cadre de la théorie de la capillarité. Afin de considérer les mécanismes de transfert d'eau au sein du milieu, le modèle est piloté en succion : à chaque niveau de succion, les forces capillaires et la teneur en eau sont calculées à partir d'une résolution numérique de l'équation de Laplace-Young.*

### Abstract :

*A discrete three-dimensional polydisperse model has been developed in order to study unsaturated granular media behavior. Presence of interparticle water is taken into account, introducing specific interaction forces between grains, quantified through capillary theory. In order to deal with water transfer mechanisms, the model is suction-controlled: at every suction level, capillary forces and water content are computed on the basis of a numerical resolution of the Laplace-Young equation.*

### Mots-clefs :

**Milieux Granulaires ; Non-Saturés ; Méthode des Eléments Discrets**

### 1 Introduction

Les propriétés mécaniques macroscopiques des matériaux granulaires comme les sols sont directement liées aux propriétés des contacts interparticulaires comme l'ont déjà montré de nombreuses études utilisant la Méthode aux Eléments Discrets (MED), Cundall et Strack (1979). Dans les milieux non-saturés, la présence d'eau entre les grains entraîne la formation de ponts liquides (ménisques) qui sont à l'origine de nouvelles forces interparticulaires. La théorie de la capillarité, via l'équation de Laplace-Young, permet de décrire ces forces additionnelles, en les mettant en rapport direct avec la géométrie locale du contact ainsi qu'avec le volume de liquide mis en jeu. L'approche multi-échelle, Nicot et Darve (2005), apparaît donc naturellement pertinente pour étudier la non saturation dans les milieux granulaires, et la MED semble constituer un outil tout à fait adapté à l'analyse des implications de la capillarité à l'échelle globale du matériau.

Nous présentons ici un modèle numérique micromécanique tridimensionnel, dont la particularité est d'être piloté en succion, dans le but de simuler les principaux essais de laboratoire actuellement mis en œuvre sur les sols non saturés. Ce modèle constitue une approximation acceptable pour les sols granulaires comme les sables moyens à fins et les silts, au sein desquels la succion est principalement d'origine capillaire (non osmotique comme dans le cas des argiles).

## 2 La capillarité à l'échelle des grains

La capillarité peut être expliquée par les phénomènes de tension superficielle qui se développent à l'interface entre l'eau et l'air, de Gennes *et al.* (2002). Dans un pont liquide entre deux grains, du fait de la tension superficielle, l'interface liquide-gaz se comporte comme une membrane tendue qui a tendance à maintenir les particules solides entre elles. Cette tension superficielle est également à l'origine d'une dépression au sein du pont liquide qui contribue de façon supplémentaire à l'attraction entre les grains. L'équation de Laplace (1805), donne l'expression de cette différence de pression  $\Delta p = p_{\text{gaz}} - p_{\text{liquide}}$  comme le produit de la tension superficielle  $\sigma$  par la courbure moyenne  $C$  de la surface enveloppe du ménisque :

$$\Delta p = \sigma C \quad (1)$$

Nous considérons ici le phénomène à l'échelle d'un « doublet capillaire », constitué d'une paire de grains sphériques, reliés entre eux par un pont liquide, dont la forme et le profil  $y(x)$  sont définis par l'équation de Laplace :

$$\Delta p y(x) + \sigma \frac{1 + y'^2(x) - y(x)y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} = 0 \quad (2)$$

Une description géométrique du doublet capillaire est présentée sur la figure 1. Les grains, de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , sont séparés par une distance  $D$  appelée distance intergranulaire. Les angles  $\delta_1$  et  $\delta_2$  représentent les angles de mouillage définissant la partie du grain solide contenue dans le pont liquide. La façon dont les grains sont mouillés par le liquide est donnée par l'angle de contact  $\theta$  entre la surface liquide et les grains. L'axe  $x$  du doublet est défini comme la droite passant par les centres des deux sphères, et constitue un axe de symétrie pour le doublet, le pont liquide se présentant comme un volume axisymétrique dont la forme est décrite par le profil  $y(x)$ . Au niveau de la plus petite section du pont se trouve le rayon de gorge, noté  $y_0$ , correspondant à la plus petite valeur du profil.

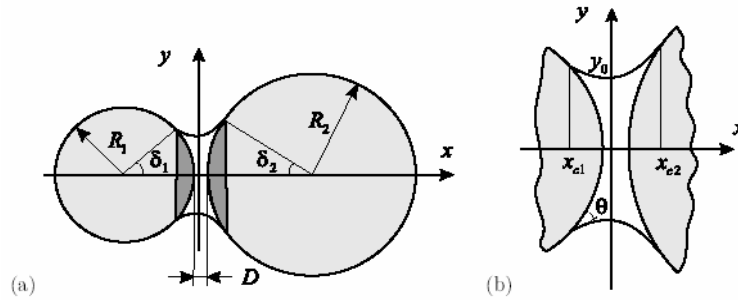


Fig. 1 : Doublet capillaire  
(a) vue d'ensemble, (b) définition du profil.

D'après ces considérations, on peut définir la géométrie d'interaction (distance intergranulaire  $D$ , volume du pont liquide  $V$ ), ainsi que la force capillaire interparticulaire  $F_{\text{cap}}$ :

$$V = \pi \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} y^2(x) \cdot dx - V_1 - V_2 \quad (3.1)$$

$$\text{où } V_i = \frac{1}{3} \pi R_i^3 (1 - \cos \delta_i)^2 (2 + \cos \delta_i) \quad , i = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$D = x_{c2} - R_2(1 - \cos \delta_2) - x_{c1} - R_1(1 - \cos \delta_1) \quad (4)$$

$$F_{cap} = 2\pi y_o \sigma + \pi y_o^2 \Delta p \quad (5)$$

Bien évidemment, dans un assemblage de grains, notamment dans le cas des fortes teneurs en eau, la géométrie structurale est telle que plusieurs particules peuvent être contenues dans un seul et même ménisque, et les interactions capillaires sont donc plus complexes que celle représentée à l'échelle d'un doublet. Il faut donc garder en tête que la validité du modèle reste limitée aux régimes hydriques pour lesquels la phase liquide reste discontinue au sein du milieu.

### 3 Modèle « Hydro-Micro-Mécanique »

Un code numérique aux éléments discrets tridimensionnels dénommé YADE (Yet Another Dynamic Engine) a été développé à partir des travaux initiés par Donzé et Magnier (1997). Chaque particule du matériau est une sphère identifiée indépendamment des autres par sa propre masse  $m$  et son rayon  $R$ . La géométrie d'interaction entre deux grains est définie sur la figure 2.

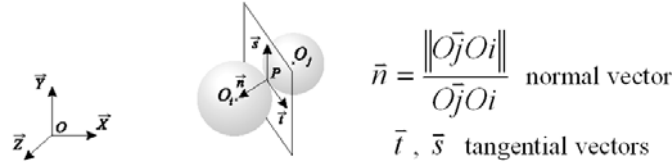


Fig. 2 : Géométrie d'interaction : définition du repère local.

Les interactions de contact sont décrites par une loi de contact normale linéaire élastique, définissant la force normale  $F_n$  comme étant proportionnelle à la distance intergranulaire d'interpénétration ( $D < 0$ ) :

$$F_n = \begin{cases} -K_n D & \text{if } D \leq 0 \\ 0 & \text{if } D > 0 \end{cases}$$

Où  $K_n$  est la rigidité normale du contact.

Le frottement entre les grains produit une force de cisaillement  $F_t$  dans le plan tangent au contact, opposée au déplacement tangentiel incrémental  $dU_t$ , et obéissant à la loi de frottement de Coulomb :

$$\begin{cases} dF_t = -K_t dU_t \\ F_t \max = -\mu F_n \end{cases}$$

Où  $K_t$  est la rigidité tangentielle du contact, et  $\mu$  le coefficient de frottement de Coulomb.

La prise en compte de la capillarité se fait à travers une résolution numérique de l'équation de Laplace (équations (3) à (5)) qui permet d'obtenir, pour une configuration géométrique donnée de la microstructure, la force d'attraction capillaire et le volume d'eau correspondant à la succion imposée à l'échantillon. Un diagramme schématisé de la loi capillaire implémentée dans le code est donné à la figure 3.

Le choix a été fait de définir l'apparition d'un ménisque lorsque deux grains entrent strictement en contact ( $D_{\text{création}} = 0$ ), faisant l'hypothèse que ceux-ci sont parfaitement lisses, incapables de capturer un film d'eau sur leur pourtour par attraction moléculaire ou

électrostatique, comme ce peut être le cas pour les sols fins argileux (pas d'eau liée ou adsorbée).

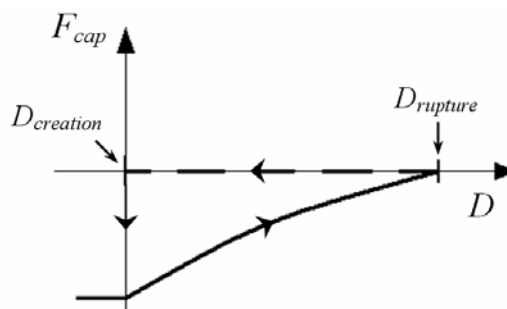


Fig. 3 : Evolution de la force capillaire  $F_{cap}$  en fonction de la distance intergranulaire  $D$ , à une succion donnée.

On peut également noter que la distance de rupture  $D_{rupture}$  à partir de laquelle le pont liquide rompt est intrinsèquement définie par la formulation, suivant la géométrie d'interaction et la succion imposée.

#### 4 Résultats à l'échelle d'un assemblage de grains

Le modèle a été développé dans l'optique de réaliser des simulations d'essais de laboratoire propres aux sols non saturés comme les essais de variation de succion ou les triaxiaux à succion contrôlée. Nous présentons ici les résultats de ces essais sur un échantillon numérique compacté à une pression de confinement de 50 kPa, dont les propriétés mécaniques s'approchent de celles d'un assemblage de billes de verres.

L'échantillon, constitué de 10 000 sphères, possède une granulométrie s'étalant continûment entre 0,1 et 0,6 mm, qui peut être comparée à celle d'un sable fin comme le sable d'Hostun. La procédure de génération est telle que le matériau ainsi modélisé est isotrope. Dans un premier temps, les grains sont positionnés aléatoirement dans un volume donné (volume final de l'échantillon) de façon à ce qu'aucun d'entre eux ne se superpose. La deuxième phase consiste à faire grossir les grains jusqu'à ce que la pression de confinement désirée soit atteinte. L'ajustement de l'angle de frottement intergranulaire durant cette phase permet de contrôler la porosité finale de l'échantillon (densité maximale obtenue pour un frottement nul). La sollicitation ne débute ensuite que lorsque la stabilité numérique de l'échantillon est assurée. Celui-ci est considéré stable lorsque le rapport entre la moyenne des résultantes des forces agissant sur chaque grain et la moyenne des forces normales agissant sur le milieu est inférieur à 1%, Mahboubi et al. (1996).

L'assemblage ainsi généré a d'abord été soumis à un cycle de séchage et de remouillage, afin de quantifier sa capacité à attirer et à retenir l'eau. La teneur en eau du milieu est obtenue par simple sommation des volumes d'eau des ponts liquides locaux. Les courbes de rétention d'eau correspondantes sont présentées sur la figure 4. On peut observer que le phénomène d'hystérésis typique des milieux poreux constitués de pores de taille variable est retrouvé, avec un taux de saturation plus élevé lors du séchage que lors du remouillage. Ce phénomène est une conséquence directe de l'hystérésis de formation introduite à l'échelle des grains. Il est à noter que les résultats sont quantitativement comparables aux résultats obtenus avec des matériaux réels, Mualem (1974), même si, comme il a été précisé en amont, la validité du modèle pour les hauts degrés de saturation reste approximative.

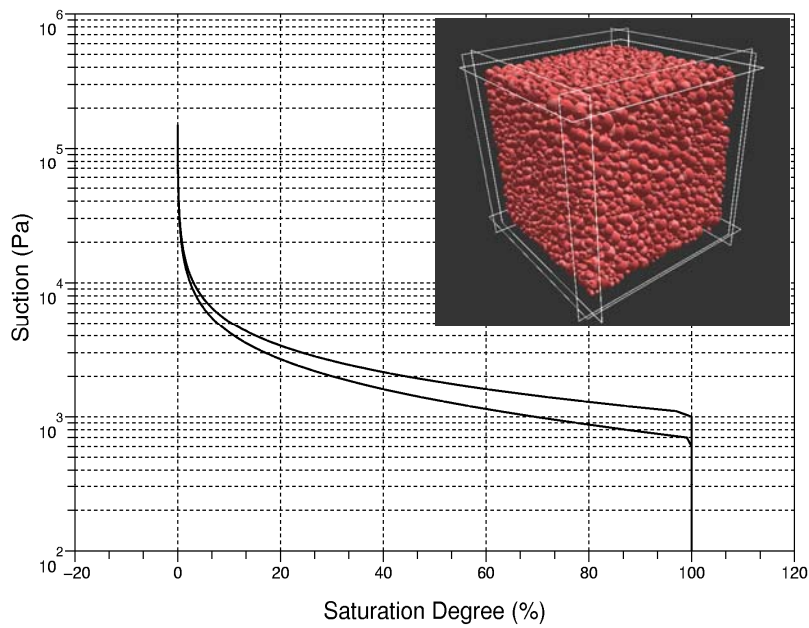


Fig. 4 : Courbes de rétention d'eau correspondant à l'échantillon numérique (10 000 sphères).

Le même échantillon a ensuite été soumis à deux chemins de chargement triaxiaux, le premier en configuration sèche (suction nulle), et le deuxième en configuration non saturée, pour une suction contrôlée constante fixée à 10 kPa (degré de saturation inférieur à 5%). Les courbes représentant l'évolution de la contrainte déviatoire et les déformations volumiques en fonction de la déformation axiale sont présentées sur la figure 5. Pratiquement, le tenseur des contraintes  $\sigma(\epsilon)$  est calculé grâce à la formule d'homogénéisation des forces initialement proposée par Love (1927) telle que :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V_{\text{échantillon}}} \sum_{\text{contacts}} F_i^c l_j^c$$

avec  $F_i^c$  la  $i^{\text{ème}}$  composante de la force de contact, et  $l_j^c$  la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur branche joignant les centres des grains en contact.

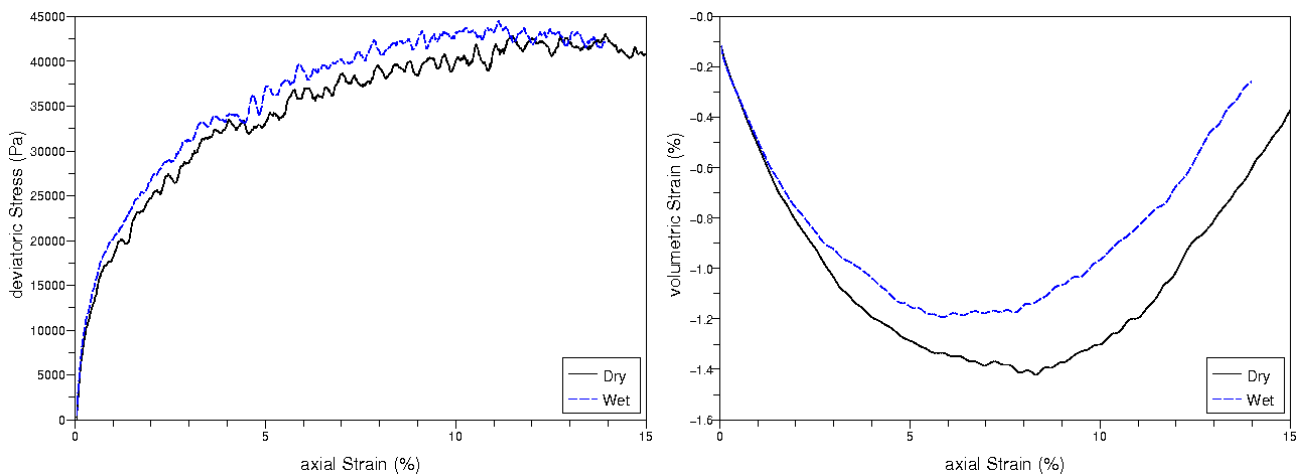


Fig. 5 : Simulations d'essais triaxiaux sec et non saturé à 50 kPa de confinement (contrainte déviatoire et déformations volumiques)

On retrouve ici les effets de la succion sur le comportement macroscopique déjà observés expérimentalement, à savoir, une augmentation de la résistance, ainsi qu'une diminution de la contractance du matériau. Si l'on observe les courbes donnant le nombre de coordination de l'assemblage (nombre de contacts par grains) le long du même chemin de chargement, il apparaît clairement que la principale conséquence de l'application d'une succion au sein du matériau est une agglomération quasi instantanée des grains entre eux (figure 6).

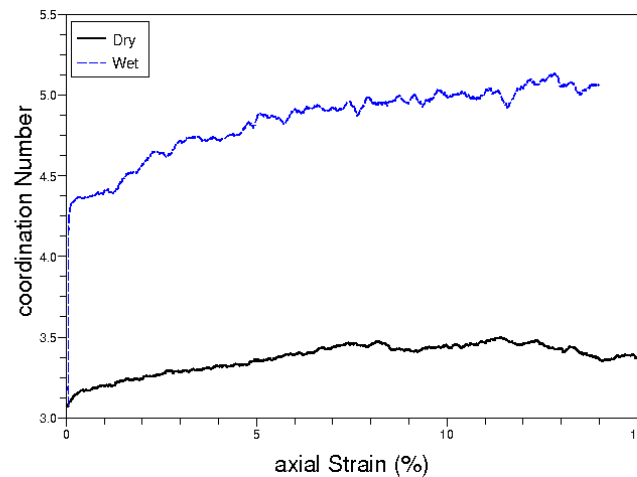


Fig. 6 : Evolution du nombre de coordination durant le chargement triaxial (sec et non saturé).

## 5 Conclusion

Les principales propriétés macroscopiques des milieux granulaires non saturés ont pu être mises en évidence par une approche (locale) micromécanique du problème de la capillarité. Ces premiers résultats montrent que l'approche multi-échelle est donc, ici, plutôt bien adaptée. Notre travail s'oriente désormais vers un approfondissement de ces résultats, à travers notamment une étude plus précise de l'influence de la succion sur les caractéristiques de compressibilité du matériau, mais également vers une confrontation avec la théorie et la notion controversée de contrainte effective en milieu non saturé.

## Références

- Cambou, B., Jean, M. 2001 *Micromécanique des milieux granulaire*. Hermes Sciences.
- Cundall, P. A., Strack, O. D. L. 1979 A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, **29**(1), 47-65.
- Donze, F., V., Magnier, S.,A. 1997 Spherical Discrete Element Code. In *Discrete Element Project Report 2*, GEOTOP Laboratory, Université du Québec, Montréal.
- De Gennes, P., G., Brochard-Wyatt, F., Quéré, D. 2002 *Gouttes, Bulles, Perles et Ondes*. Collection Echelles, Belin.
- Mahboubi, A., Ghaouti, A., Cambou, B. 1996 La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Revue Française de Géotechnique*, **76** : 45-61.
- Mualem, Y. 1974 A catalogue of the hydraulic properties of Unsaturated soils. *Technion*, Israel Institute of Technology, Haïfa, 55 p.
- Nicot, F., Darve, F. 2005 A multiscale approach to granular materials. *Mechanics of Materials*, **37**, 980-1006.