Approche multi-échelles de la rupture dans les milieux naturels

François Nicot [1] & Félix Darve [2]

(1) Cemagref, Unité de Recherche Erosion Torrentielle Neige et Avalanches, Grenoble (France)

(2) Laboratoire Sols Solides Structures, UJF-INPG-CNRS, Grenoble (France)

(1, 2) Structure Fédérative VOR ("Vulnérabilité des Ouvrages et Risques")

Corresponding author: francois.nicot@cemagref.fr

Résumé :

Dans de nombreuses applications du génie civil, la détection précoce d'un état de rupture constitue un enjeu fondamental. Dans le contexte de la géomécanique, une classe fondamentale de rupture pour un système, contrôlé par des paramètres bien définis, correspond à la création d'énergie cinétique sans évolution des paramètres de contrôle. Il est alors montré que de telles bifurcations peuvent être détectées par l'annulation du travail du second ordre, à l'échelle macroscopique, défini à partir du champ de variables contraintes-déformations tensorielles. En outre, tenant compte de la nature souvent discrète des géomatériaux, on établit que le travail du second ordre macroscopique, évalué à l'échelle d'un assemblage granulaire, correspond à la somme de tous les travaux du second-ordre microscopiques, évalués au droit de chaque contact de l'assemblage à partir des grandeurs discrètes. Cette équivalence micro-macro fondamentale donne lieu à une interprétation micro-structurelle de l'annulation du travail du second ordre au sein d'un assemblage granulaire.

Mots-clefs :

Bifurcation ; travail du second ordre ; micromécanique

1 Introduction

Une question souvent débattue concerne l'existence d'états instables (Rudnicki et Rice, 1975; Vardoulakis et Sulem, 1995; Lade *et al*., 1988; Hill, 1958; Darve *et al*., 1995; Bigoni et Hueckel, 1991; Nova, 1994). La notion de stabilité s'applique à un phénomène, en lien avec son évolution au cours du temps. Une définition possible et souvent admise est celle proposée par Lyapunov (1907) : un système est réputé instable si et seulement si une perturbation infinitésimale induit des changements finis dans l'état du système. En science des matériaux, la notion de stabilité s'applique à un état de contrainte-déformation d'un matériau, par rapport à son évolution temporelle sous des conditions de chargement données. Dans ce contexte, la définition usuellement adoptée est (Darve, *et al*., 1995) : un état de contrainte et déformation pour un matériau donné après une histoire de chargement donnée est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour tout chargement borné par $\eta(\varepsilon)$ la réponse associée reste bornée par ε. Cependant, la difficulté principale consiste à exhiber de cette définition un critère exploitable. Cet article s'appuie sur la notion générale de bifurcation (Petrik, 1993) : *Une bifurcation correspond à un changement discontinu dans l'état du système sous évolution continue des variables d'état*. Dans ce contexte, nous établissons qu'un système mécanique en équilibre sous des conditions de chargement données peut acquérir spontanément de l'énergie cinétique sans changement dans les paramètres contrôlant les conditions aux limites. C'est ce que nous appelons la perte de maintenabilité de l'état d'équilibre. De telles bifurcations peuvent être détectées par l'annulation du travail du second-ordre (critère de Hill). Appliqué au cas des matériaux granulaires, ce critère révèle que deux origines coexistent pour l'apparition d'une perte de maintenabilité : une origine matérielle, et une origine géométrique. Cet article résume les étapes principales de cette approche. On se reportera aux articles (Nicot et Darve, 2006 et 2007; Nicot *et al.*, 2006a et 2006b.) pour plus de détails.

2 La notion de maintenabilité

2.1 Vision macroscopique

Soit un système constitué d'un volume V_o d'un matériau donné non visqueux, initialement dans une configuration C_o. Après une histoire de chargement donnée, le système est dans une configuration déformée C et occupe un volume V, en équilibre sous un chargement extérieur donné contrôlé par des paramètres statiques ou cinématiques. La frontière actuelle du matériau est la réunion d'une partie (Γ_σ) contrôlée par des paramètres statiques, et une partie complémentaire (Γ_ε) contrôlée par des paramètres cinématiques. $\vec{f}^{\Gamma_\sigma}$ représente la densité surfacique de forces appliquée à (Γ_σ), et $\vec{u}^{\Gamma_\varepsilon}$ représente le champ de déplacement imposé en chaque point de (Γ_ε).

L'équilibre du système, dans la configuration actuelle, peut être défini par les champs de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ et de déplacements $\vec{u}$. *Cet état d'équilibre est réputé non maintenable si et seulement s'il existe deux champs incrémentaux* $\delta\vec{u}$ *et* $\delta\overline{\overline{\sigma}}$*, reliés par les équations constitutives, tels que l'état défini par les champs* $\overline{\overline{\sigma}}+\delta\overline{\overline{\sigma}}$ *et* $\vec{u}+\delta\vec{u}$ *puisse être atteint par le système sans changement dans les paramètres de contrôle*. Ce nouvel état peut ne pas être un état d'équilibre. La notion de perte de maintenabilité est donc rattachée à la création spontanée d'énergie cinétique par le système considéré. Dans la suite, nous examinons dans quelles conditions un tel phénomène peut se produire, en prenant en compte les termes inertiels dans les équations d'équilibre.

2.2 Critère de perte de maintenabilité

L'évolution instantanée du système, à partir de la configuration d'équilibre à l'instant t, est gouvernée par l'équation

$$\delta E_c(t)=\int_\Gamma \sigma_{ij}\, n_j\, \delta u_i\, dS-\int_V \sigma_{ij}\,\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}\,dV \qquad (1)$$

où δE_c représente l'évolution incrémentale de l'énergie cinétique à l'instant t, et $\vec{f}\,dS$ le champ de forces actuelles agissant sur la frontière actuelle du système ($f_i=\sigma_{ij}\,n_j$). En revenant à la configuration initiale, Eq. (1) donne :

$$\delta E_c(t)=\int_{\Gamma_o} f_i\,\delta u_i\,dS_o-\int_{V_o}\Pi_{ij}\,\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j}\,dV_o \qquad (2)$$

où $\overline{\overline{\Pi}}$ est le tenseur de Piola-Kirchoff de première espèce, et $\vec{f}\,dS_o$ est le champ de forces actuelles agissant sur la frontière du système Γ_o dans la configuration initiale. Alors par différentiation,

$$\delta^2 E_c(t) = \int_{\Gamma_o} \delta f_i \ \delta u_i \ dS_o - \int_{V_o} \delta \Pi_{ij} \ \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j} \ dV_o \tag{3}$$

Le système est contrôlé soit par la densité de force extérieure $\vec{f}$, soit par le déplacement à la frontière $\vec{u}$. Si l'on impose aux paramètres de contrôle de rester constants, alors $\int_{\Gamma_o} \delta f_i \ \delta u_i \ dS_o = 0$. Ainsi, en négligeant les termes du second ordre, $\delta^2 E_c(t) = 2E_c(t + \delta t)$ et :

$$2E_c(t+\delta t) = -\int_{V_o} \delta \Pi_{ij} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j} \right) dV_o \tag{4}$$

L'équation 4 représente la formulation incrémentale de la conservation de l'énergie du système à partir d'un état d'équilibre. Par conséquent, comme $E_c(t+\delta t) > 0$, le système évolue si et seulement si :

$$\int_{V_o} \delta \Pi_{ij} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j} \right) dV_o < 0 \tag{5}$$

Reprenant la définition du travail du second ordre donnée par Hill :

$$W_2 = \int_{V_o} \delta \Pi_{ij} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_j} \right) dV_o \tag{6}$$

exprimée dans un formalisme semi lagrangien, alors le système évolue depuis la configuration d'équilibre C vers un autre état si et seulement si $W_2 < 0$.
Une expression eulérienne du travail du second ordre peut être donnée en utilisant la transformation de Piola du tenseur de contrainte de Cauchy. On montre alors que :

$$W_2 = \int_V \left(\delta \overline{\overline{\sigma}} + div(\delta \vec{u}) \overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma}} \left(\overline{\overline{L}} \right)^t \delta t \right) : \overline{\overline{L}} \ \delta t \ dV \tag{7}$$

Pour un point matériel ou un système possédant des champs de contraintes et de déformations homogènes, il vient :

$$W_2 = V \left(\delta \overline{\overline{\sigma}} + div(\delta \vec{u}) \overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma}} \left(\overline{\overline{L}} \right)^t \delta t \right) : \overline{\overline{L}} \ \delta t \tag{8}$$

Le travail du second ordre est donc une combinaison de trois termes : $V \ \delta \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{L}} \ \delta t$ est un terme matériel, $\delta V \ \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{L}} \ \delta t$ modélise la variation de volume du milieu, et $V \ \overline{\overline{\sigma}} \left(\overline{\overline{L}} \right)^t : \overline{\overline{L}} \ \delta t^2$ est rattaché à l'évolution de la texture (Nicot et Darve, 2007).

2.3 Relation micro-macro fondamentale

Soit un assemblage granulaire de *N* grains '*p*', avec $1 \leq p \leq N$. Chaque grain '*p*' est en contact avec n_p autres grains '*q*'. On admettra que les particules périphériques ($p \in \partial V$) sont soumises à une force extérieure $\vec{F}^{ext,p}$ autre que les actions internes de contact, dirigée par le milieu extérieur à l'assemblage. Considérons deux particules '*p*' et '*q*' en contact. On appellera $\Re$ le repère général Galiléen, et $\hat{\Re}\left\{\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2\right\}$ le repère local attaché au droit du contact considéré ($\vec{n}$ est normal au plan de contact). On notera $\hat{\delta}\psi$ la différentiation d'une variable ψ par rapport à ce repère.

Si l'on appelle $\vec{u}_c^{\,p,q}$ le déplacement relatif de la particule 'p' par rapport à celui de la particule 'q', et $\vec{F}^{\,p,q}$ la force de contact appliquée par la particule 'p' sur la particule 'q', le travail du second ordre local, lié au contact entre 'p' et 'q', s'écrit :

$$W_2^{p,q} = \hat{\delta}\vec{F}^{\,p,q} \cdot \hat{\delta}\vec{u}_c^{\,p,q} \tag{9}$$

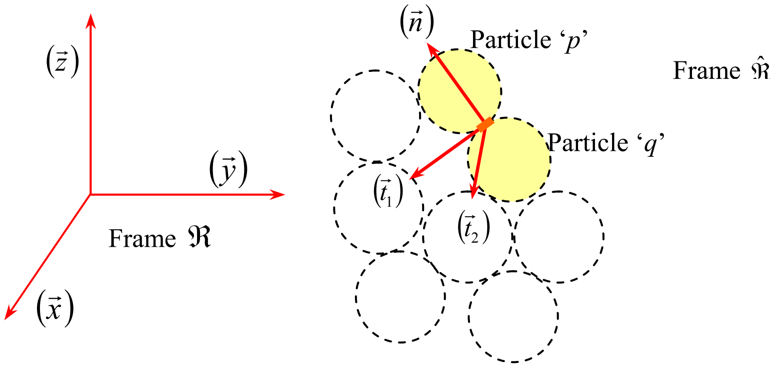

FIG. 1 – Repère Galiléen et repère local.

Par ailleurs, considérant un état d'équilibre, la formulation incrémentale de la conservation d'énergie s'écrit :

$$W_2 = \sum_{p\in\partial V} \delta\vec{F}^{\,ext,p} \cdot \delta\vec{u}^{\,p} - \delta^2 E_c(t) \tag{10}$$

Or, pour l'assemblage granulaire considéré, il vient :

$$\delta^2 E_c(t) = \sum_{p=1}^{N} \left(\vec{F}^{\,p} \cdot \delta^2\vec{u}^{\,p} + \vec{M}^{\,p} \cdot \delta^2\vec{\omega}^{\,p} + \delta\vec{F}^{\,p} \cdot \delta\vec{u}^{\,p} + \delta\vec{M}^{\,p} \cdot \delta\vec{\omega}^{\,p} \right) \tag{11}$$

où $\vec{F}^{\,p}$ et $\vec{M}^{\,p}$ sont les forces et moments externes appliquées à chaque particule 'p'.

Exprimant alors $\vec{F}^{\,p}$ et $\vec{M}^{\,p}$ en fonction des forces de contacts inter particulaires, on montre que (Nicot et Darve, 2007) :

$$\begin{aligned} W_2 = &\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{p-1} \left(\delta\vec{F}^{\,p,q} \cdot \delta\vec{u}_c^{\,p,q} + \vec{F}^{\,p,q} \cdot \left(\delta^2\vec{u}^{\,p} - \delta^2\vec{u}^{\,q} - \vec{r}^{\,p,q} \wedge \delta^2\vec{\omega}^{\,p} + \vec{r}^{\,q,p} \wedge \delta^2\vec{\omega}^{\,q} \right) \right) + \cdots \\ &\cdots + \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{p-1} \left(\vec{F}^{\,p,q} \cdot \left(\delta\vec{r}^{\,q,p} \wedge \delta\vec{\omega}^{\,q} - \delta\vec{r}^{\,p,q} \wedge \delta\vec{\omega}^{\,p} \right) \right) - \sum_{p\in\partial V} \left(\vec{F}^{\,ext,p} \cdot \delta^2\vec{u}^{\,p} \right) \end{aligned} \tag{12}$$

Comme par ailleurs le travail du second ordre microscopique s'exprime par :

$$\begin{aligned} W_2^{p,q} = \hat{\delta}\vec{F}^{\,p,q} \cdot \hat{\delta}\vec{u}_c^{\,p,q} = \delta\vec{F}^{\,p,q} \cdot \delta\vec{u}_c^{\,p,q} + \left(\delta\vec{r}^{\,q,p} \wedge \delta\vec{\omega}^{\,q} - \delta\vec{r}^{\,p,q} \wedge \delta\vec{\omega}^{\,p} \right) \cdot \vec{F}^{\,p,q} + \cdots \\ \cdots + \left(\delta^2\vec{u}^{\,p} - \delta^2\vec{u}^{\,q} + \vec{r}^{\,q,p} \wedge \delta^2\vec{\omega}^{\,q} - \vec{r}^{\,p,q} \wedge \delta^2\vec{\omega}^{\,p} \right) \cdot \vec{F}^{\,p,q} \end{aligned} \tag{13}$$

il vient finalement, par combinaison des Eqs. (12) et (13) :

$$W_2 = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{p-1} \left(\hat{\delta}\vec{F}^{\,p,q} \cdot \hat{\delta}\vec{u}_c^{\,p,q} \right) - \sum_{p\in\partial V} \left(\vec{F}^{\,ext,p} \cdot \delta^2\vec{u}^{\,p} \right) \tag{14}$$

Cette relation fondamentale montre que le travail du second ordre est égal à la somme des travaux de second ordre microscopiques $\overline{W_2} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{p-1} \left(\hat{\delta}\vec{F}^{\,p,q} \cdot \hat{\delta}\vec{u}_c^{\,p,q} \right)$ moins un terme complémentaire de frontière $\sum_{p\in\partial V}\left(\vec{F}^{ext,p}\cdot\delta^2\vec{u}^p\right)$. Cette relation relie donc les échelles microscopiques et macroscopiques et fournit un moyen pour examiner l'origine micro structurelle de la perte de maintenabilité d'un état d'équilibre.

3 Analyse micromécanique de l'annulation du travail du second ordre

L'annulation du terme $\overline{W_2}=\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{p-1}\left(\hat{\delta\vec{F}}^{p,q}\cdot\delta\vec{u}_c^{p,q}\right)$ a deux origines. La première est liée à la perte de contacts ; il s'agit donc d'une origine géométrique sous le contrôle de l'évolution de la texture du milieu. La nature discrète des matériaux granulaires permet le réarrangement soudain de la micro-structure par glissement et ouverture des contacts existant et création de nouveaux contacts. La seconde est liée à l'annulation du terme microscopique $W_2^{p,q}=W_2^c=\hat{\delta\vec{F}}^{p,q}\cdot\delta\vec{u}_c^{p,q}$ au droit des contacts demeurant. Il s'agit donc d'une origine matérielle. Dans ce qui suit, nous examinons dans quelles circonstances le terme $W_2^{p,q}=W_2^c=\hat{\delta\vec{F}}^{p,q}\cdot\delta\vec{u}_c^{p,q}$ peut s'annuler. Pour cela, un modèle constitutif local (au droit des contacts) est introduit. Il s'agit d'un modèle élasto-plastique, avec un critère de frottement solide, permettant de relier les forces de contact normales F_c^n et tangentielles F_c^t aux déplacements relatifs normaux u_c^n et tangentiels u_c^t sous forme incrémentale :

$$\hat{\delta F}_c^n=k_n\ \delta u_c^n \tag{15}$$

$$\hat{\delta\vec{F}}_c^t=\min\left\{\left\|\vec{F}_c^t+k_t\ \delta\vec{u}_c^t\right\|,\tan\varphi_g\ \left(F_c^n+k_n\ \delta u_c^n\right)\right\}\frac{\vec{F}_c^t+k_t\ \delta\vec{u}_c^t}{\left\|\vec{F}_c^t+k_t\ \delta\vec{u}_c^t\right\|}-\vec{F}_c^t \tag{16}$$

En prenant avantage du repère local $\hat{\Re}\left\{\vec{n},\vec{t}_1,\vec{t}_2\right\}$, avec $\vec{t}_1=\frac{\vec{F}_c^t}{\left\|\vec{F}_c^t\right\|}$ et $\vec{t}_2=\vec{n}\wedge\vec{t}_1$, le travail du second ordre microscopique s'exprime par :

$$W_2^c=\hat{\delta\vec{F}}_c\cdot\delta\vec{u}_c=\hat{\delta F}_c^n\ \delta u_c^n+\hat{\delta F}_c^{t_1}\ \delta u_c^{t_1}+\hat{\delta F}_c^{t_2}\ \delta u_c^{t_2} \tag{17}$$

Dans le cas où le contact considéré est en régime plastique, W_2^c est une forme quadratique qui peut être positive ou négative :

$$W_2^c=k_n\ \left(\delta u_c^n\right)^2+\tan\varphi_g\ \cos\alpha\ k_n\ \delta u_c^t\ \delta u_c^n+k_t\ \sin^2\alpha\ \left(\delta u_c^t\right)^2 \tag{18}$$

où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{t}_1=\frac{\vec{F}_c^t}{\left\|\vec{F}_c^t\right\|}$ et $\delta\vec{u}_c^t$. En analysant le signe du discriminant de la forme quadratique, on montre que W_2^c s'annule si l'on a simultanément :

(a_1) $\delta u_c^n\leq 0$

(b_1) $\tan\alpha\leq\frac{\tan\varphi_g}{2}\sqrt{\frac{k_n}{k_t}}$ with $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

(c_1) $\delta u_c^t\in\left[U_1\ ;U_2\right]$ with $U_i=\dfrac{-\tan\varphi_g\ k_n\ \delta u_c^n\ \cos\alpha\left(1+\xi_i\sqrt{1-\dfrac{4k_t\ \tan^2\alpha}{k_n\ \tan^2\varphi_g}}\right)}{2\ k_t\ \sin^2\alpha}$

avec $\xi_1 = -1$ et $\xi_2 = 1$.

On retiendra que l'annulation du travail du second ordre microscopique exige que le contact considéré subisse une décharge dans la direction normale. En conditions axisymétriques, $\alpha = 0$, et les conditions précédentes se résument à $\delta u_c^n \leq 0$ (décharge dans la direction normale) et $\delta u_c^t \geq -\dfrac{\delta u_c^n}{\tan \varphi_g}$ (déplacement tangentiel d'amplitude suffisante, de manière à assurer au contact d'être en régime plastique).

4 Conclusions

Ce papier s'est intéressé à la perte de maintenabilité d'un état d'équilibre, vue comme une certaine classe de bifurcation. Le traitement des équations d'équilibre a permis de faire émerger de manière très naturelle un critère basé sur l'annulation du travail du second ordre. Appliquée au cas d'un matériau granulaire, cette approche a conduit à mettre en évidence que la perte de maintenabilité d'un état d'équilibre avait deux origines : une origine matérielle, liée au fait qu'une partie des contacts se comportent en régime plastique avec décharge dans la direction normale ; et une origine géométrique liée à la disparition ou à la création de contacts.

Références

Bigoni, D, and Hueckel, T. 1991. Uniqueness and localization, I. Associative and non-associative elastoplasticity. Int. J. Solids Structures, Vol. 28, n° 2, pp. 197-213.

Darve, F., Flavigny, E., and Meghachou, M. 1995. Constitutive modeling and instabilities of soil behaviour. Computers and Geotechnics, Vol. 17, pp. 203-224.

Hill, R. 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 6, pp. 236-249.

Lade, P.V., Nelson, R.B., and Ito, Y.M. 1988 Instability of granular materials with nonassociated flow. ASCE J. Engr. Mech., Vol. 114, pp. 2173-2191.

Lyapunov, A.M. 1907. Problème général de la stabilité des mouvements. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (France), pp. 203-274.

Nicot, F., and Darve, F. 2006. Micro-mechanical investigation of material instability in granular assemblies. Int. J. of Solids and Structures, Vol. 43, pp. 3569-3595.

Nicot, F., Darve, F., and Khoa, H.D.V. 2006a. Bifurcation and second-order work in geomaterials. Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics, in press.

Nicot, F., Sibille, L., Donzé, F., and Darve, F. 2006b. From microscopic to macroscopic second-order works in granular assemblies. Mechanics of Materials, in press.

Nicot, F., and Darve, F. 2007. A micro-mechanical investigation of bifurcation in granular materials. Int. J. of Solids and Structures, submitted.

Nova, R. 1994. Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programs. Journal of Mechanical behavior of Materials, Vol. 5, n° 2, pp. 193-201.

Petryk, H. 1993. Theory of bifurcation and instability in time-independent plasticity. In Q.S. Nguyen (Ed.), Bifurcation and stability of dissipative systems, CISM Courses and Lecturers, Vol. 327, Springer, pp. 95-152.

Rudnicki, J.W., and Rice, J. 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. Int. J. Solids and Structures, Vol. 23, pp. 371-394.

Vardoulakis, I., and Sulem, J. 1995. Bifurcation analysis in geomechanics. Chapman & Hall Publisher.