

## Modélisation des glissements de terrains par un critère d'instabilité matérielle

Florent Prunier<sup>1</sup>, Félix Darve<sup>1</sup> & Farid Laouafa<sup>2</sup>

(1) :INPG (2) :INERIS

1 :Laboratoire Sols, Solides, Structures, Risques (2) :Unité Risques Naturels, Ouvrages et Stockages

(1) :BP 53 38041 Grenoble cedex 9 - France (2) :BP 2 60550 Verneuil en Halatte

prunier@geo.hmg.inpg.fr

### Résumé :

*Cet article présente une étude du critère d'instabilité matérielle de Hill, qui est bien approprié pour décrire tous les modes de rupture des sols. La première partie est dédiée à l'étude analytique et numérique de ce critère au travers des relations constitutives octo et incrémentalement non linéaires de Darve. Les limites des domaines de bifurcation 3D ainsi que les cônes 3D de directions instables sont données pour ces deux lois. Puis dans une seconde partie, on montre que ce critère, implémenté dans un code aux éléments finis avec couplage hydromécanique, permet de décrire et de reproduire convenablement les mécanismes de rupture et les surfaces de glissement du glissement de terrain de Pettacciato, qui s'est produit après de fortes pluies sous une pente de seulement 6° en moyenne.*

### Abstract :

*This article deal with Hill's bifurcation criterion, which is very well suited for describing all failure modes in soils. First part is dedicated to the analytical and numerical study of this criterion through the octo and incrementally non linear constitutive relations of Darve. The 3D bifurcation domain limit and 3D cones of unstable directions are given for these two relations. Then in a second part, we show that that this criterion, implemented in a finite elements code with hydro mechanical coupling, enables the accurate description and the simulation of the failure mode and the failure surface of the Petacciato landslide, which occurs after strong rainfalls under a 6° slope in average.*

### Mots-clefs :

**instabilités ; éléments finis ; glissement de terrains**

## 1 Introduction

Le comportement des sols est généralement assez bien décrit par les modèles elasto-plastiques. Ainsi les méthodes permettant de décrire la rupture d'un massif se basent souvent sur un critère limite de plasticité. Mais dans certains cas, ces critères ne permettent pas de décrire les phénomènes réels, comme par exemple pour les glissements de terrains sous très faible pente. C'est pourquoi nous utiliserons le critère de Hill. Pour ce dernier, un état de contraintes déformations est dit instable si on peut poursuivre la déformation dans une direction de chargement sans apport externe d'énergie. Ce qui se traduit sous forme locale par le critère de stabilité suivant :

$$\forall d\sigma, d\varepsilon \text{ liés par la loi de comportement } d^2W = \underline{d\sigma} \cdot \underline{d\varepsilon} > 0 \quad (1)$$

Dans une première partie nous mènerons une étude analytique et numérique sur ce critère, où le domaine de bifurcation 3D ainsi que les « cônes » 3D de directions instables pour les lois octolinéaire et non linéaire de Darve seront présentés. Puis, nous montrerons qu'une modélisation éléments finis (hydromécanique couplée) permet de décrire correctement les mécanismes de rupture du glissement de Pettacciato.

## 2 Etude analytique et numérique du travail du second ordre

### 2.1 Lois de comportement incrémentalement non linéaire et octolinéaire

En préambule à cette partie, le lecteur notera que ces lois ne font pas appel aux concepts classiques de l'élasto-plasticité. C'est-à-dire aux notions :

- de décomposition des déformations en partie élastique plus plastique
- de limite d'élasticité
- de règle d'écoulement

En revanche, il sera très souvent fait appel à la notion de zone tensorielle (cf Darve (1982)). Une zone tensorielle est un domaine de l'espace des incréments de sollicitation dans lequel la loi incrémentale est linéaire. En axes principaux, la loi incrémentalement non linéaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot [N^+ + N^-] \cdot \begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2 \cdot \|d\sigma\|} \cdot [N^+ - N^-] \cdot \begin{pmatrix} d\sigma_1^2 \\ d\sigma_2^2 \\ d\sigma_3^2 \end{pmatrix} \text{ avec } N^\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^\pm} & -\frac{\nu_{21}^\pm}{E_2^\pm} & -\frac{\nu_{31}^\pm}{E_3^\pm} \\ -\frac{\nu_{12}^\pm}{E_1^\pm} & \frac{1}{E_2^\pm} & -\frac{\nu_{32}^\pm}{E_3^\pm} \\ -\frac{\nu_{13}^\pm}{E_1^\pm} & -\frac{\nu_{23}^\pm}{E_2^\pm} & \frac{1}{E_3^\pm} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les coefficients  $E_i^+$  et  $\nu_{ij}^+$  sont définis sur des chemins triaxiaux généralisés lorsque  $d\sigma_i > 0$  et respectivement  $E_i^-$  et  $\nu_{ij}^-$  lorsque  $d\sigma_i < 0$ . Pour  $d\sigma_i = 0$ , la relation est continue, donc « + = - ». Pour en savoir un peu plus sur cette loi et notamment comment évoluent les modules et coefficients de Poisson tangents, il faut se référer à Darve *et al.* (1988). La loi octolinéaire est définie de façon similaire :

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot [N^+ + N^-] \cdot \begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot [N^+ - N^-] \cdot \begin{pmatrix} |d\sigma_1| \\ |d\sigma_2| \\ |d\sigma_3| \end{pmatrix} \quad (3)$$

Sur cette expression, les huit zones tensorielles sont explicites, et la relation (3) est identique aux 8 relations linéaires :

$$d\varepsilon = \left( \underline{N}_i \right)_{i=1,8} \cdot d\sigma \quad (4)$$

avec  $\left( \underline{N}_i \right)_{i=1,8}$  la matrice  $\underline{N}$  où l'on affecte les coefficients (+) dans la colonne  $(j)_{j=1,3}$  si  $d\sigma_j > 0$ , et (-) si  $d\sigma_j < 0$ . Par la suite, c'est cette relation (4) qui sera utilisée pour les calculs analytiques.

### 2.2 instabilités matérielles

Une formulation explicite de la limite du domaine de bifurcation au sens de Hill, ainsi que l'expression analytique de l'équation des « cônes » de direction instables peuvent être obtenues pour la loi octolinéaire. Afin d'étudier le signe du travail du second ordre pour un état de contraintes déformations donné, il est nécessaire de considérer toutes les directions de chargement possible de l'espace. Pour ce faire, nous avons défini des chemins proportionnels en contraintes de la façon suivante :

$$\begin{cases} d\sigma_1 = cte & cte \in \mathbb{R}_+^* \\ d\sigma_1 + R \cdot d\sigma_3 = 0 & R \in \mathbb{R}^* \\ d\sigma_2 - R' \cdot d\sigma_3 = 0 & R' \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5)$$

Un jeu de variables conjuguées admissibles permettant l'étude du signe du travail du second ordre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_3}{R} - \frac{R'}{R}.d\varepsilon_2 \\ d\sigma_1 + R.d\sigma_3 \\ d\sigma_2 - R'.d\sigma_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \cdot \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ \frac{d\varepsilon_3}{R} + \frac{R'}{R}.d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

sachant que :

$$\begin{aligned} d^2W &= d\sigma_1.d\varepsilon_1 + d\sigma_2.d\varepsilon_2 + d\sigma_3.d\varepsilon_3 \\ &= \left(d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_3}{R} - \frac{R'}{R}.d\varepsilon_2\right).d\sigma_1 + (d\sigma_1 + R.d\sigma_3) \cdot \left(\frac{d\varepsilon_3}{R} + \frac{R'}{R}.d\varepsilon_2\right) + (d\sigma_2 - R'.d\sigma_3) \cdot d\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Le critère de bifurcation (correspondant à l'annulation de  $d^2W$ ) est atteint pour la première annulation de  $\det(\underline{\underline{S}})$ , dont l'expression analytique est la suivante :

$$\det(\underline{\underline{S}}) = \frac{1}{E_1 \cdot (1 - \nu_{32} \cdot \nu_{23})} \cdot \left( \begin{aligned} &E_2 \cdot E_3 \cdot R^2 + E_1 \cdot E_3 \cdot R'^2 + E_3 \cdot (E_2 \cdot \nu_{12} + E_1 \cdot \nu_{21}) \cdot R \cdot R' \\ &+ E_2 \cdot (E_1 \cdot \nu_{31} + E_3 \cdot \nu_{13}) \cdot R - E_1 \cdot (E_3 \cdot \nu_{23} + E_2 \cdot \nu_{32}) \cdot R' + E_1 \cdot E_2 \end{aligned} \right) \quad (8)$$

que j'écrirai :

$$\det(\underline{\underline{S}}) = A \cdot R^2 + B \cdot R'^2 + C \cdot R \cdot R' + D \cdot R + E \cdot R' + F \quad (9)$$

L'équation,  $\det(\underline{\underline{S}}) = 0$  est l'équation d'une conique en  $R$  et  $R'$ . En remplaçant  $R$  et  $R'$  par  $-\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3}$  et  $\frac{d\sigma_2}{d\sigma_3}$  grâce à la relation (5), nous obtenons, s'il existe, l'équation d'un cône elliptique dans l'espace des incréments de contraintes :

$$A \cdot d\sigma_1^2 + B \cdot d\sigma_2^2 + F \cdot d\sigma_3^2 - C \cdot d\sigma_1 \cdot d\sigma_2 + E \cdot d\sigma_2 \cdot d\sigma_3 - D \cdot d\sigma_1 \cdot d\sigma_3 = 0 \quad (10)$$

En nommant  $\underline{\underline{M}}^*$  la matrice de la forme quadratique de cette équation, nous avons :

$$(10) \text{ identique à : } \underline{d\sigma}^t \cdot \underline{\underline{M}}^* \cdot \underline{d\sigma} = 0 \quad (11)$$

De là on remarque que :

$$\underline{\underline{M}}^* = E_2 \cdot E_3 \cdot \underline{\underline{M}}_s \quad (12)$$

avec  $\underline{\underline{M}}_s$  la partie symétrique de la matrice  $\underline{\underline{N}}_i$  (cf relation (4)). Nous obtenons finalement :

$$(10) \text{ identique à : } \underline{d\sigma}^t \cdot \underline{\underline{M}}_s \cdot \underline{d\sigma} = 0 \quad (13)$$

Cette équation (13) constitue la limite des directions de chargements stables pour un état de contrainte déformation donné : à l'intérieur du cône,  $d^2W < 0$ , les directions sont instables, à l'extérieur elles sont stables. De cette manière, on définit la limite du domaine de bifurcation au sens de Hill, par l'état de contrainte déformation pour lequel il existe une première (et unique) direction instable. Sachant qu'initialement les valeurs propres de  $\underline{\underline{M}}_s$  sont positives, et en posant l'hypothèse (non démontrée, mais vérifiée numériquement sur plusieurs exemples) qu'elles varient de manière continue avec le paramètre de chargement, la limite du domaine de bifurcation, pour le modèle octolinéaire, est donnée par la relation suivante :

$$\min \left\{ \left( \det(\underline{\underline{M}}_s) \right)_i \right\}_{i=1,8} = 0 \quad (14)$$

Cette relation (14) peut s'étendre à la loi non linéaire avec une infinité de zones tensorielles et en prenant pour  $\underline{\underline{M}}_s$ , la partie symétrique de la matrice tangente du tenseur de la relation (2).

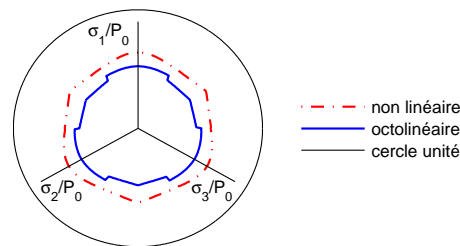


FIG. 1 – Domaines de bifurcation tracé dans le plan déviatoire des contraintes avec les lois octo et non linéaires pour un sable d’Hostun dense

Les limites des domaines de bifurcation pour les lois octo et non linéaires sont présentées sur la figure (1). Enfin, pour tracer les cônes de directions instables, deux procédures ont été mises en œuvre. La première est purement numérique : elle est basée sur le principe des enveloppes réponses de Gudehus (1979), et a été définie par Darve *et al.* (2000). La figure (2), donne les résultats obtenus pour un sable d’Hostun dense. La deuxième méthode est, quant à elle, à la

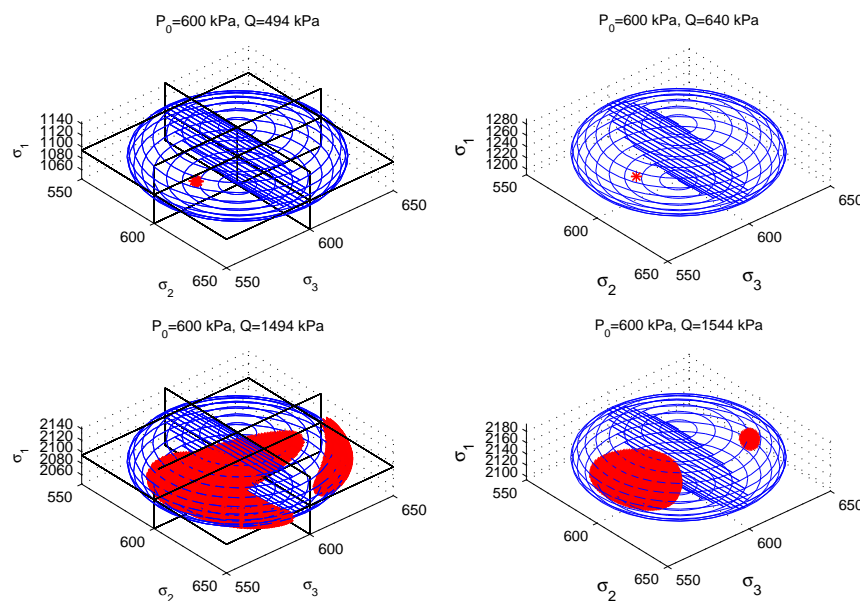


FIG. 2 – Cônes 3D pour un sable d’Hostun dense, à gauche : loi octolinéaire, à droite : loi non linéaire

fois analytique et numérique. Elle consiste à substituer les valeurs numériques des modules et coefficients de Poisson tangents dans la formule (10). Ces résultats sont présentés sur la figure (3) : les points numériques de la figure (2) ont été conservés, et les cônes analytiques sont matérialisés par un maillage. la comparaison s’avère être très satisfaisante.

### 3 Application au glissement de Petacciato

Cette simulation a été effectuée dans le cadre du projet européen LessLoss. Petacciato est une petite ville située au centre de l’Italie sur la cote adriatique. Historiquement, 16 glissements ont été répertoriés sur la même zone entre 1906 et 1996. Le dernier évènement de 1996, qui

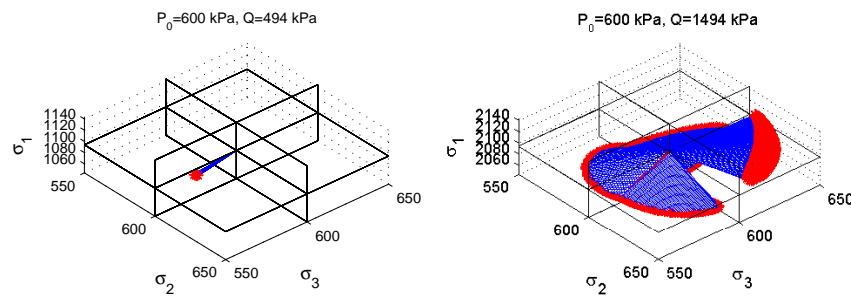


FIG. 3 – Cônes 3D analytiques pour un sable d'Hostun dense : loi octolinéaire

est apparu après de fortes pluies et qui a duré 8h, a causé de grandes dégradations au niveau du chemin de fer, de la route et détruit des bâtiments. Ceci a eu lieu alors que la pente est assez régulière sous une inclinaison moyenne de  $6^\circ$ .

Pour modéliser ce phénomène, nous avons effectué une simulation 2D en déformations planes avec le logiciel Lagamine développé à l'université de Liège (Belgique). Le modèle utilisé est hydromécanique couplé. La loi de comportement mécanique (modèle Plassol) est une loi élastoplastique à simple potentiel plastique, non-associée, avec écrouissage, et s'appuie sur le critère de Van-Eeckelen (1980). Le couplage hydromécanique, se fait par le biais de la pression effective de Bishop (1959). Le degré de saturation effectif substitué dans la formule de Bishop est calculé avec le modèle de Van-Genuchten (1980). La loi mécanique a été calibrée sur des essais triaxiaux drainés (courbe contrainte-déformation + courbe de variation de volume), et le modèle de Van-Genuchten sur une courbe de rétention d'eau (degré de saturation-pression capillaire).

Pour la simulation, l'unique paramètre de chargement retenu, en plus de la gravité, a été la montée de l'eau dans le massif. Au début, le massif est non saturé avec la teneur en eau résiduelle, puis on fait monter le niveau d'eau à chaque pas de chargement. En sortie, nous calculons à chaque point d'intégration la valeur du travail du second ordre local normalisé ( $d^2W_n \in [-1; 1]$ ), qui nous donne une idée du mode de rupture : localisé ou diffus (en fonction de la répartition des valeurs négatives de  $d^2W_n$ ). Puis une intégration (pondérée) des  $d^2W_n$  locaux sur tout le massif, donne une valeur globale qui renseigne sur la stabilité effective du massif. Les résultats sont présentés sur les figures (4) et (5). Sur la figure (4), les pointillés

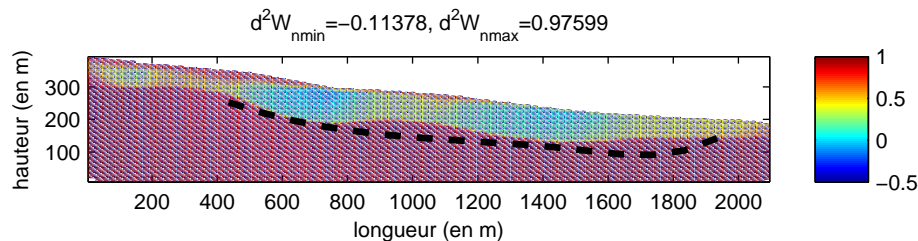


FIG. 4 – isovaleurs de  $d^2W_n$  à 95% de saturation. En tiretés, la surface de glissement réelle

noirs correspondent à la surface de glissement réelle, et sur la figure (5), on se rend compte que la divergence numérique (atteinte au 96<sup>e</sup> pas sur 100 programmées initialement) est atteinte juste avant l'annulation du travail du second ordre global qui correspond à l'instabilité effective du massif.

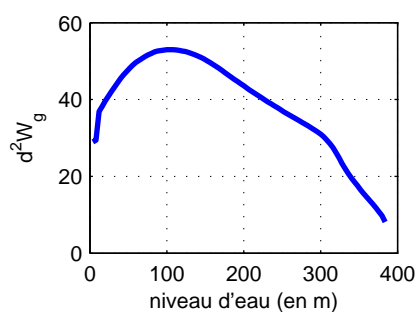


FIG. 5 – évolution de  $d^2W_{global}$  au cours de la simulation

#### 4 conclusion

En première partie, l'étude analytique et numérique prouve qu'une zone importante d'instabilité potentielle se trouve à l'intérieur même du critère limite de plasticité (Mohr-coulomb) : l'instabilité dépend du trajet et des directions de chargements. Dans nos exemples, si on suit un chemin triaxial drainé jusqu'à un déviateur situé au delà de la limite de bifurcation donnée en figure (1), et qu'une direction à l'intérieur des cônes 3D est suivie, alors l'instabilité sera atteinte. En seconde partie, nous avons vu qu'une simulation hydromécanique couplée intégrant le critère de Hill permettait de définir le mode de rupture du massif : ici, le caractère diffus de la rupture tel qu'on le voit sur les photos du site est assez bien reproduit par le modèle. Enfin le travail du second ordre global donne un bon indicateur sur la stabilité globale du massif.

#### Références

- Darve, F. 1982 An incrementally non-linear constitutive law : assumption and prediction *In Gudehus, Darve & Vardoulakis eds.* pp. 513-520, Publ. Balkema.
- Darve, F., Dendani, H., Chau, B. 1988 Different classes of constitutive equations and their characteristics *In Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive soils (Saada A. S., Bianchini G. F eds)* pp. 11-17, Publ. Balkema.
- Darve, F., Laouafa, F. 2000 Instabilities in granular materials and application to landslides *In Mechanics of cohesive-frictional materials* **5** pp. 627-652
- Darve, F., Servant, G., Laouafa, F., Khoa, H.D.V. 2004 Failure in geomaterials, Continuous and discrete analyses *In Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **193** pp. 3057-3085
- Darve, F., Vardoulakis I. 2004 Degradations and Instabilities in Geomaterials *In CISM course, Springer publ.*
- Gudehus, G. 1979 A comparison of some constitutive laws for soils under radially loading symmetric loading and unloading *In Proc. 3<sup>rd</sup> numer. Meth. in Geomechanics* **4** pp. 1309-1323, Publ. Balkema
- Khoa, H.D.V., Georgopoulos, I.O., Darve, F., Laouafa, F. 2006 Diffuse failure in geomaterials : Experiments and modelling *In Computer and Geotechnics* **33** pp. 1-14
- Laouafa, F., Darve, F. 2002 Modelling of slope failure by a material instability mechanism *In Computer and geotechnics* **29** pp. 301-325