

Estimation du facteur d'intensité des contraintes à partir d'un champ cinématique mesuré

Julien Réthoré, Stéphane Roux & François Hild

LMT Cachan (ENS Cachan/CNRS-UMR 8535/Université Paris 6)
61 avenue du Président Wilson
F-94235 Cachan Cedex, France
{rethore,stephane.roux,hild}@lmt.ens-cachan.fr

Résumé :

On propose une technique de réduction de l'influence du bruit de mesure sur la détermination des facteurs d'intensité des contraintes. L'intégrale d'interaction est utilisée dans les développements présentés. Le champ d'extension virtuelle associé à cette intégrale est optimisé pour réduire l'influence d'un bruit affectant la mesure du champ de déplacement par corrélation d'images numériques étendue. Il est alors possible de prendre en compte la texture des images et les caractéristiques des fonctions de discrétisation grâce à un noyau de corrélation spécifique. Un exemple illustre les améliorations obtenues.

Abstract :

The paper is aimed at presenting a noise robust stress intensity factor estimation technique. Based upon an interaction integral, the sensitivity to noise measurement of the estimation of the stress intensity factor is reduced by means of an optimization of the virtual crack extension field (VCE). The displacement field is obtained using an extended digital image correlation technique. The VCE field is then tailored to account for the texture of the images and also for the displacement functional basis. An example is presented and illustrates the improvements brought out by the proposed technique.

Mots-clefs :

facteur d'intensité des contraintes, mesure de champ cinématique, incertitude de mesure

1 Introduction

Quantités caractéristiques de la sollicitation en mécanique de la rupture, les facteurs d'intensité des contraintes doivent pouvoir être estimés expérimentalement afin d'identifier la ténacité d'un matériau dit *fragile*. Les facteurs d'intensité des contraintes K_i donnent l'amplitude d'une harmonique particulière (ordre 1) dans le développement en $r^{n/2}$ du champ de déplacement en présence d'une fissure (r étant la distance à la pointe de la fissure). En ce sens, les K_i sont des grandeurs particulièrement difficiles à mesurer.

Les facteurs d'intensité des contraintes caractérisent l'ensemble du champ de déplacement et il est naturel de vouloir tirer partie de la totalité de l'information fournie par une mesure de champ cinématique. Ainsi, des techniques minimisant l'écart entre le champ mesuré et un champ théorique ont pu être développées (McNeill et al., 1987; Roux and Hild, 2006). Plus récemment, Réthoré et al. (2005) ont utilisé une technique d'intégrale d'interaction pour mesurer les facteurs d'intensité des contraintes.

L'intégrale d'interaction I^{int} s'écrit

$$I^{int} = - \int_{\Omega} [\sigma_{ml}^a u_{m,l} \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^a u_{i,k} + \sigma_{ij}^a u_{i,k}^a)] q_{k,j} \, d\Omega \quad (1)$$

où on trouve les champs mesurés \mathbf{u} , σ , des champs auxiliaires \mathbf{u}^a , σ^a et un champ d'extension virtuelle \mathbf{q} . Les champs auxiliaires seront les champs asymptotiques en pointe de fissure pour les modes I ou II . Dans ces conditions, les facteurs d'intensité des contraintes sont obtenus en ré-écrivant la relation d'Irwin pour le problème à deux champs

$$I^{int} = \frac{2}{E} (K_I K_I^a + K_{II} K_{II}^a) \quad (2)$$

En choisissant $K_I^a = 1$ et $K_{II}^a = 0$, respectivement $K_I^a = 0$ et $K_{II}^a = 1$, on peut calculer K_I , respectivement K_{II} , à partir de I^{int} . Le champ d'extension virtuelle doit satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_\Gamma &= 0 && \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{q} &= \mathbf{x} && \text{au front de fissure} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

où Γ est le support géométrique de la fissure \mathbf{n}_Γ la normale à ce support, et \mathbf{x} un vecteur unitaire aligné avec l'axe de la fissure.

Habituellement utilisée dans le contexte de la simulation numérique (Suo and Combescure, 1992; Destuynder et al., 1983), cette technique présente un certain nombre d'avantages en vue d'une application expérimentale :

1. I^{int} étant une forme linéaire en \mathbf{u} , aucun biais systématique n'est introduit par une incertitude de mesure.
2. I^{int} est théoriquement indépendante de Γ , gage de robustesse par rapport à la taille du domaine d'intégration. Néanmoins, les conditions d'indépendance par rapport au contour pour \mathbf{u} (admissibilité statique, et lèvres de fissure libre d'effort) ne seront satisfaites qu'aux incertitudes de mesures près. La sensibilité des résultats à la taille de Ω doit donc être étudiée avec attention.
3. \mathbf{q} est peu contraint. On peut envisager d'exploiter cette liberté pour optimiser \mathbf{q} . Par exemple pour retirer une zone dans le calcul des K_i , il suffit d'imposer une valeur de \mathbf{q} constante dans cette zone.

Par contre, l'intégrale d'interaction fait intervenir le gradient du champ de déplacement. On s'attend donc à une sensibilité à l'incertitude élevée. Cette contribution est dédiée à une optimisation du champ d'extension virtuelle par rapport à une fonction coût qui est la sensibilité de l'estimation des K_i aux incertitudes affectant la mesure du champ de déplacement \mathbf{u} .

2 Formulation

La détermination du champ d'extension virtuelle optimal est faite numériquement ce qui implique l'utilisation d'un schéma de discrétisation. Pour le champ \mathbf{q} , on utilisera des fonctions de forme éléments finis d'ordre 1 sur le maillage grâce auquel on a obtenu le champ de déplacement

$$\mathbf{q} = \Psi_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \quad ; \quad \mathbf{u} = \Psi_{\mathbf{u}} \mathbf{U} \quad (4)$$

En notation matrice/vecteur, les vecteurs Ψ contiennent les fonctions de discrétisation et \mathbf{U} , \mathbf{Q} les valeurs des degrés de liberté correspondant à ces fonctions. En introduisant ces définitions dans I^{int} , on obtient une expression générique du facteur d'intensité des contraintes en mode I ou II

$$K_{I,II} = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{I,II} \mathbf{U} \quad (5)$$

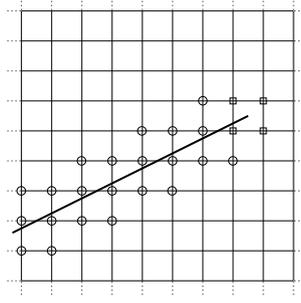


FIG. 1 – Configuration d’enrichissement : les cercles indiquent les nœuds avec enrichissement discontinu et les carrés les nœuds supportant l’enrichissement singulier.

où $K_{I,II}$ et $\mathbf{M}_{I,II}$ sont calculés en mode I ou en mode II en choisissant le champ auxiliaire correspondant

$$\mathbf{M}_{I,II} = -\frac{E}{2} \int_{\Omega} \nabla \Psi_{\mathbf{q}}^T [\boldsymbol{\sigma}^a : \nabla \Psi_{\mathbf{u}} \mathbf{I} - (\boldsymbol{\sigma}^a \nabla \Psi_{\mathbf{u}} + (\mathbf{D} \nabla^s \Psi_{\mathbf{u}}) \nabla \mathbf{u}^a)] d\Omega \quad (6)$$

Supposons que le champ de déplacement mesuré soit affecté d’une perturbation $\boldsymbol{\eta}_u$ due à une incertitude lors de l’acquisition des images. $\boldsymbol{\eta}_u$ est caractérisée par sa moyenne et sa variance

$$\langle \boldsymbol{\eta}_u \rangle = \mathbf{0} \quad ; \quad \langle \boldsymbol{\eta}_u^2 \rangle = \mathbf{C} \eta^2 \quad (7)$$

où \mathbf{C} est appelé noyau de corrélation et η l’écart type. Cette matrice caractérise la variance de la perturbation pour chacune des inconnues du champ de déplacement discrétisé. On peut alors calculer la perturbation δK affectant K en utilisant l’Eq. (5). Celle-ci a les caractéristiques suivantes

$$\langle \delta K_{I,II} \rangle = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{I,II} \langle \boldsymbol{\eta}_u \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \delta K^2 \rangle = \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_{I,II} \mathbf{C} \mathbf{M}_{I,II}^T \mathbf{Q} \eta^2 \quad (8)$$

On montre ainsi que la variance de la perturbation des facteurs d’intensité des contraintes est une forme quadratique du champ d’extension virtuelle. La minimisation de l’influence des incertitudes de mesure conduit donc à la détermination d’un champ d’extension virtuelle optimal par résolution du système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{I,II} \mathbf{C} \mathbf{M}_{I,II}^T & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_p \end{pmatrix} \quad (9)$$

où \mathbf{L} , \mathbf{Q}_p et $\boldsymbol{\lambda}$ permettent d’imposer les conditions aux limites Eq. (3) à la solution.

3 Caractérisation de l’incertitude de mesure

La mesure du champ de déplacement est obtenue par corrélation d’images numériques. Pour prendre en compte la présence d’une fissure, on utilise un schéma de discrétisation étendu. D’abord utilisé dans la méthode des éléments finis étendus par Moës et al. (1999), ce type de discrétisation a ensuite été introduit dans un algorithme de corrélation d’image Réthoré et al. (2006a). La forme discrétisée de \mathbf{u} s’écrit alors

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\alpha} a_{\alpha n} N_n(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} + \sum_{n \in \mathcal{N}_{cut}} \sum_{\alpha} d_{\alpha n} N_n(\mathbf{x}) H_e(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} + \sum_{n \in \mathcal{N}_{tip}} \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^4 c_{\alpha n j} N_n(\mathbf{x}) F_j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{\alpha} \quad (10)$$

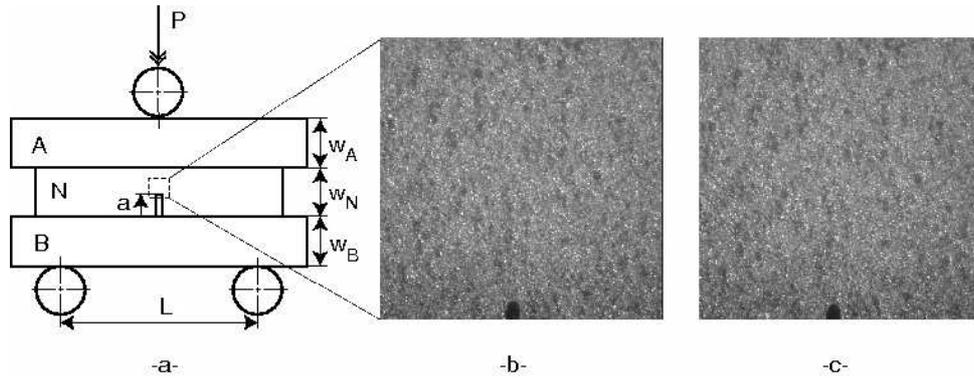


FIG. 2 – Géométrie du dispositif expérimental (a). L'échantillon fragile en Carbone de Silicium (N) est placé entre deux poutres en acier (A et B). On effectue un premier essai afin d'initier une fissure stable. Image initiale (b) et fissurée (c) de la face de l'échantillon. Au milieu du bord bas de l'image on distingue un point noir qui est l'entaille initiale. La taille de l'image est 1008×1016 pixels avec un facteur de conversion $p = 1.85 \mu\text{m}/\text{pixel}$

où N_n sont les fonctions de forme éléments finis utilisées comme partition de l'unité, $a_{\alpha n}$ les degrés de liberté associés dans la direction définie par e_α . $H_e(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_e)$ est la fonction d'enrichissement discontinue à laquelle on associe les degrés de liberté $d_{\alpha n}$ portés par les nœuds \mathcal{N}_{cut} dont le support est entièrement tranché par la fissure (\mathbf{x}_e désigne la position du nœud e et H et la fonction de Heaviside valant 0 ou 1 de part et d'autre des lèvres de la fissure). F_j sont des fonctions singulières

$$[F_j] = \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right] \quad (11)$$

dont les degrés de liberté associés, $c_{\alpha n j}$, sont portés par les nœuds \mathcal{N}_{tip} dont le support contient la pointe de la fissure (Figure 1).

L'enrichissement ajouté à l'approximation standard contient des fonctions très "riches", en particulier les fonctions F_j . Pour une même quantité d'information disponible (liée à la taille des éléments et à la texture des images), la détermination des degrés de liberté correspondant à ces enrichissements est donc moins robuste que celle des degrés de liberté standards. On s'attend à ce que le bruit obtenu sur les degrés de liberté enrichis atteigne des niveaux plus importants. Il s'agit alors d'obtenir une représentation du noyau de corrélation \mathbf{C} associé à la détermination du champ de déplacement discrétisé sur la base fonctionnelle enrichie.

Le problème de corrélation s'écrit comme l'appariement de deux fonctions de niveaux de gris discrètes f et g via un champ de déplacement \mathbf{u} . f et g correspondent à l'image de référence et l'image déformée. L'équation locale de la conservation du flot optique s'écrit

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (12)$$

Besnard et al. (2006) ont récemment proposé une stratégie de résolution de cette loi de conservation en utilisant des éléments finis. L'extension à une approximation éléments finis étendue est proposée dans (Réthoré et al., 2006a) ou (Réthoré et al., 2006b). Un algorithme de Newton est utilisé pour déterminer le minimum du résidu global associé à l'Eq. (12)

$$\Phi^2 = \iint_{\Omega} [f(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x})]^2 dx \quad (13)$$

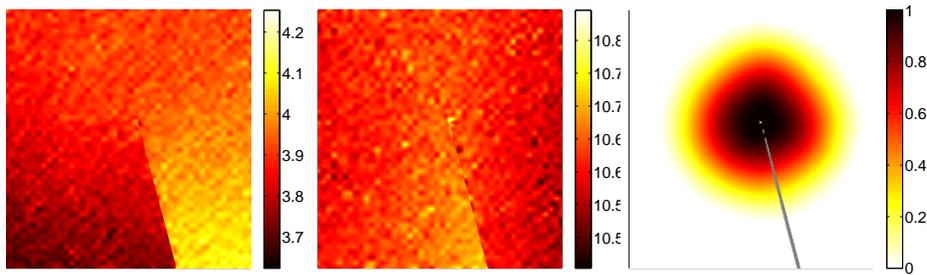


FIG. 3 – Déplacement horizontal (gauche) et vertical (centre) et champ d’extension virtuelle optimisé (droite). La fissure est symbolisée par la ligne grise et sa pointe par le point blanc. Facteur de conversion $p = 1.85 \mu\text{m}/\text{pixel}$.

A chaque itération, une nouvelle solution (supposée *proche* de la précédente) est calculée par résolution du système linéaire

$$\mathbf{A}^i \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{b}^i - \mathbf{A}^i \mathbf{u}^i \quad (14)$$

avec

$$A_{nm}^i = \iint_{\Omega} (\psi_m \cdot \nabla f(\mathbf{x} + \mathbf{u}^i)) (\psi_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} + \mathbf{u}^i)) dx \quad (15)$$

et

$$b_n^i = \iint_{\Omega} (\psi_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} + \mathbf{u}^i)) [g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{u}^i)] dx \quad (16)$$

Lors de l’acquisition d’une image, celle-ci est affectée d’un bruit (variation du niveau de gris de chaque pixel considéré comme un bruit blanc). Cependant, en considérant l’image f bruitée comme référence, A^i n’est pas affectée par le bruit d’acquisition de l’image, mais $f - g$ subit une perturbation de variance η_p^2 évaluée à $2\eta_c^2$ qui contient toutes les sources de bruit. On définit η_c^2 comme la variance des perturbations supposées égales et non corrélées affectant respectivement f et g . En utilisant l’expression de b^i , il vient

$$\langle \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}^2 \rangle = (\mathbf{A}^i)^{-1} \eta_p^2 \quad (17)$$

Par identification avec l’équation (7), on observe que l’inverse de la matrice tangente du problème à convergence peut être vue comme le noyau de corrélation du bruit de déplacement $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$.

4 Résultats

On s’intéresse au dispositif expérimental décrit sur la Figure 2. Les composantes verticale et horizontale du champ de déplacement obtenu par un calcul de corrélation d’images étendue sont présentées par la Figure 3 pour des éléments de 16 pixels. Le champ d’extension virtuelle optimal est aussi présenté sur cette figure pour le mode I .

Le gain apporté par l’utilisation d’un noyau de corrélation adapté est d’un facteur 10 sur l’incertitude de la détermination du facteur d’intensité des contraintes (Figure 4-b). Comme indiqué par la Figure 4-a, les valeurs de K_I pour les grandes tailles de domaine sont stables et cohérentes aux incertitudes prés. On obtient une valeur de $2.90 \pm 0.05 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ pour une valeur de η_p de 2 niveaux de gris.

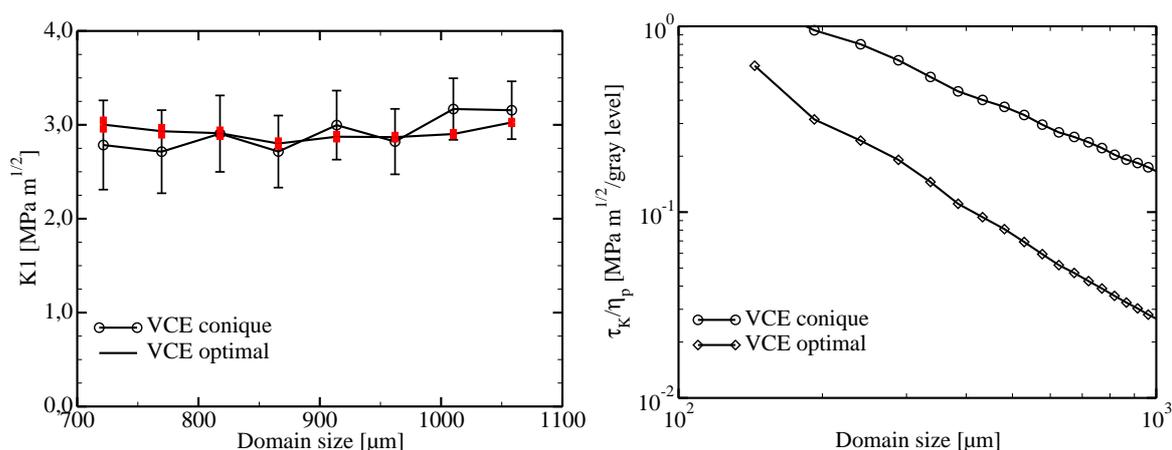


FIG. 4 – Evolution la mesure de K_I et de son écart type τ_K en fonction de la taille du domaine d'intégration pour un champ q de forme conique et le champ optimisé. Les valeurs de barre d'erreur sont obtenues en considérant $\eta_p = 2$ niveau de gris.

Références

- Besnard G, Hild F, Roux S (2006) “finite-element” displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics* 46(6) :789–803
- Destuynder P, Djaoua M, Lescure S (1983) Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 2(1)
- McNeill S, Peters W, Sutton M (1987) Estimation of stress intensity factor by digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics* 28(1) :101–112
- Moës N, Dolbow J, Belytschko T (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46(1) :133–150
- Réthoré J, Gravouil A, Morestin F, Combescure A (2005) Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral. *International Journal of Fracture* 132(1) :65–79
- Réthoré J, Hild F, Roux S (2006a) Extended digital image correlation with crack shape optimization, soumis.
- Réthoré J, Roux S, Hild F (2006b) From pictures to extended finite elements : Extended digital image correlation. *Comptes Rendus de Mecanique*, accepté.
- Réthoré J, Roux S, Hild F (2006c) Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, accepté.
- Roux S, Hild F (2006) Stress intensity factor measurement from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture* 140(1-4) :141–157
- Suo X, Combescure A (1992) On the application of the $\mathcal{G}\theta$ method and its comparison with de Lorenzi's approach. *Nuclear Engineering and Design* 135 :207–224