

Comportement dynamique d'un rotor embarqué par un mouvement de translation aléatoire

Lucie Bachelet, Nicolas Driot & Guy Ferraris

LaMCoS, CNRS UMR 5259,
INSA-Lyon
F-69621, France.
lucie.bachelet@insa-lyon.fr

Résumé :

Une méthode spectrale a été développée pour le calcul de la réponse de systèmes à coefficients paramétriques périodiques et à excitation externe aléatoire. Utilisée jusqu'à présent pour des systèmes discrets, on cherche ici à l'appliquer à des rotors géométriquement dissymétriques.

Pour cela, on considère le cas d'un rotor constitué d'un arbre déformable de section rectangulaire et d'un disque rigide. Le système arbre-disque est supporté par des paliers souples et sa base, supposée rigide, est embarquée par un mouvement de translation modélisé par un bruit blanc gaussien stationnaire. Les équations du mouvement sont obtenues par la méthode de Rayleigh Ritz pour laquelle 4 fonctions de déplacement sont considérées. La réponse obtenue par application de la méthode spectrale sur cet exemple est comparée avec celle issue d'une simulation de Monte Carlo.

Abstract :

A spectral method has been developed for computing the response of systems under both periodic parametrical and random external excitations. Used only for discrete systems, this work proposes to apply this approach on asymmetrical rotors.

For that purpose, we consider the case of a rotor composed by a deformable shaft with a rectangular section and a rigid disk. The shaft-disk system is supported by flexible bearings and its base, which is assumed rigid, is subjected to a translational motion modelled by a stationary Gaussian white noise. The equations of motion are obtained by the Rayleigh Ritz method for which 4 functions of displacement are considered. The response provided by the spectral method is compared with that obtained from a Monte Carlo simulation.

Mots-clefs : Equations paramétriques, dynamique des rotors, processus aléatoire

1 Introduction

Présents dans de nombreuses applications industrielles, les systèmes mécaniques dont les équations du mouvement sont à coefficients périodiques ne présentent pas de solution analytique pour l'étude des réponses libres et forcées. A ce jour, la plupart des travaux concernent uniquement le problème de stabilité associé aux réponses libres ([1]-[2]). En régime forcé, si l'excitation externe appliquée à ces systèmes est déterministe, l'implémentation d'une méthode temporelle ne pose pas de problème. En revanche, dans le cas où l'excitation est un processus aléatoire, l'absence de solution analytique implique l'implémentation de méthodes numériques. La simulation de Monte Carlo est le moyen le plus utilisé pour obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance (DSP) de la réponse, mais son coût de calcul est par essence prohibitif. Par ailleurs, des formules pseudo-analytiques applicables uniquement à des systèmes de faible dimension ([3]) et des changements de variables transformant les équations en systèmes invariants dans le temps ([4]) ont été développées. Enfin, une approche spectrale simple ([5]), a été proposée pour calculer la DSP de réponse de systèmes à coefficients périodiques et à excitation externe aléatoire.

Cette méthode n'a, pour l'heure, été validée que sur des systèmes discrets. Il est proposé ici de l'appliquer au cas d'un rotor géométriquement dissymétrique embarqué par un mouvement de translation aléatoire. Les équations du mouvement sont obtenues par la méthode de Rayleigh Ritz en considérant 4 fonctions de déplacements. L'excitation du support est supposée être un processus gaussien stationnaire. Les résultats issus de la méthode spectrale sont comparés à ceux d'une simulation de Monte Carlo.

2 Calcul de la réponse stationnaire du système

On cherche ici à calculer la réponse d'un système dont les équations du mouvement s'écrivent de la manière suivante :

$$\left(\mathbf{M} + \overline{\mathbf{M}}(t)\right)\ddot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{C} + \overline{\mathbf{C}}(t)\right)\dot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{K} + \overline{\mathbf{K}}(t)\right)\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont des matrices constantes respectivement de masse, amortissement et raideur et $\overline{\mathbf{M}}(t)$, $\overline{\mathbf{C}}(t)$ et $\overline{\mathbf{K}}(t)$ sont des matrices à coefficients périodiques. Le second membre $\mathbf{F}(t)$ est une réalisation du processus aléatoire stationnaire et ergodique $\{\mathbf{F}(t)\}$. Le système d'équation (1) étant supposé asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, la réponse forcée peut être obtenue suivant la théorie des systèmes linéaires. Pour cela, bien que l'on puisse envisager une simulation de Monte Carlo, une approche spectrale permettant de calcul de la réponse stationnaire de systèmes tels que (1) a été proposée dans un précédent travail ([5]).

2.1 Approche spectrale

Dans cette partie, on rappelle brièvement les principales étapes d'une approche spectrale permettant de calculer la densité spectrale de réponse de systèmes linéaires à coefficients variant périodiquement dans le temps et à second membre stochastique. Cette méthode est plus amplement décrite dans [5]. A partir du processus $\{\mathbf{F}(t)\}$, on construit un nouveau processus ergodique et stationnaire $\{\mathbf{F}_T(t)\}$ dit « processus tronqué » dont N échantillons indépendants sont ceux du processus initial $\{\mathbf{F}(t)\}$ définis sur la durée finie T . On sait, ([6]), que la réponse $\mathbf{x}_T^k(t)$ du système soumis à la $k^{\text{ième}}$ fonction échantillon $\mathbf{F}_T^k(t)$ du processus tronqué s'écrit :

$$\mathbf{x}_T^k(t) = \int_T \mathbf{h}(\tau, t) \mathbf{F}_T^k(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

où le terme $h_{ij}(\tau, t)$ de la matrice $\mathbf{h}(\tau, t)$ correspond à la réponse au temps t du ddl i du système soumis à une impulsion unitaire appliquée au ddl j au temps $(t - \tau)$. En exprimant $\mathbf{h}(\tau, t)$ à partir de sa transformée de Fourier bilinéaire $\mathbf{H}(\omega_1, \omega_2)$ et en procédant à quelques changements de variable, on définit l'expression de la réponse fréquentielle en fonction de la transformée de Fourier de la fonction échantillon $\mathbf{F}_T^k(t)$:

$$\mathbf{X}_T^k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega_1, \omega - \omega_1) \mathbf{F}_T^k(\omega_1) d\omega_1 \quad (3)$$

Selon [7], des estimateurs des DSP des processus tronqués $\{\mathbf{F}_T(t)\}$ et $\{\mathbf{x}_T(t)\}$ sont obtenus par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{FF}}^k(\omega_1, T) &= \mathbf{F}_T^k(\omega_1) \mathbf{F}_T^{k*}(\omega_1) \\ \mathbf{S}_{\mathbf{xx}}^k(\omega, T) &= \mathbf{X}_T^k(\omega) \mathbf{X}_T^{k*}(\omega) \end{aligned} \quad (4)$$

où le symbole * signifie « transposée conjuguée de ». En introduisant (3) dans (4) et en considérant la moyenne des estimateurs de DSP de chaque fonction échantillon, on obtient l'expression des estimateurs des DSP des processus tronqués. Enfin, en faisant tendre la durée des échantillons T vers $+\infty$, on obtient l'expression de la DSP du processus réponse $\{\mathbf{x}(t)\}$:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{xx}}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega_1, \omega - \omega_1) \mathbf{S}_{\mathbf{FF}}(\omega_1) \mathbf{H}^*(\omega_1, \omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (5)$$

où $\mathbf{S}_{FF}(\omega_l)$ est la DSP du processus initial de l'excitation. La $p^{\text{ième}}$ colonne de la matrice bispectre $\mathbf{H}(\omega_l, \omega - \omega_l)$ est obtenue à partir de la réponse fréquentielle du système soumis à l'excitation déterministe $\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{u}e^{j\omega_l t}$ dont la $p^{\text{ième}}$ composante du vecteur \mathbf{u} est égale à 1 alors que toutes les autres sont nulles. Ainsi, les colonnes de $\mathbf{H}(\omega_l, \omega - \omega_l)$ sont les réponses spectrales du système soumis à $e^{j\omega_l t}$ sur chacun de ses degrés de liberté. Ces réponses sont obtenues à l'aide d'une méthode spectrale ([8]) qui calcule de manière itérative le spectre de la réponse en passant les termes liés à l'excitation interne (ici $\overline{\mathbf{M}}(t)\ddot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{C}}(t)\dot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{K}}(t)\mathbf{x}$) du système au second membre.

2.2 Un outil de validation : la simulation de Monte Carlo

La simulation de Monte Carlo est l'unique "vraie" méthode numérique permettant d'estimer la réponse d'un système excité par un processus aléatoire. C'est pourquoi elle est utilisée ici en tant qu'outil de validation de la méthode précédemment décrite. Pour la mettre en œuvre, un très grand nombre de fonctions échantillons du processus est avant tout généré. Parmi les différentes techniques de simulation numérique de telles trajectoires, il a été choisi ici d'utiliser la méthode de Markovianisation proposée dans [9]. Chaque trajectoire est alors appliquée au système et les réponses temporelles correspondantes sont calculées par intégration numérique (schéma de Newmark). Un estimateur de la DSP associé à chaque réponse est ensuite calculé à partir de la transformée de Fourier de celle-ci. Enfin, la DSP globale du processus réponse est obtenue en moyennant tous les estimateurs de DSP de réponse. Evidemment, plus le nombre de fonctions échantillons générées est important, meilleure est la précision de la réponse.

3 Application

Validée sur des systèmes discrets, on propose d'appliquer la méthode spectrale au cas d'un rotor dissymétrique dont le support est embarqué par un mouvement de translation aléatoire.

3.1 Equation du mouvement

On considère ici un rotor composé d'un arbre flexible en acier de longueur $L = 0.4$ m et de section rectangulaire dont la hauteur et la largeur sont $h = 2$ cm et $b = 2.3$ cm respectivement. L'arbre est muni au tiers de sa longueur d'un disque rigide en acier de rayon $R = 15$ cm. L'ensemble du rotor est porté par des paliers flexibles situés aux extrémités de l'arbre et dont les caractéristiques de raideur et d'amortissement sont données dans le tableau 1. Le support du rotor étant supposé rigide, il n'est pas modélisé.

Position	k_{xx} (N/m)	k_{zx} (N/m)	k_{xz} (N/m)	k_{zz} (N/m)	c_{xx} (Ns/m)	c_{zx} (Ns/m)	c_{xz} (Ns/m)	c_{zz} (Ns/m)
$y = 0$	10^5	0	0	10^5	50	0	0	50
$y = L$	2.10^5	0	0	2.10^5	25	0	0	25

Tableau 1 : Caractéristiques des paliers

Les équations du mouvement sont obtenues par la méthode de Rayleigh Ritz pour laquelle 4 formes modales ont été considérées : les deux modes de corps solide (cylindrique et conique) pour décrire les mouvements dus aux paliers et les deux premiers modes de flexion d'une poutre appuyée-appuyée pour modéliser la flexion de l'arbre. Ainsi les déplacements dans les directions transverses à l'axe du rotor x et z sont définis par :

$$\begin{aligned} u(y,t) &= f_1(y)q_1(t) + f_2(y)q_3(t) + f_3(y)q_5(t) + f_4(y)q_7(t) \\ w(y,t) &= f_1(y)q_2(t) + f_2(y)q_4(t) + f_3(y)q_6(t) + f_4(y)q_8(t) \end{aligned} \quad (6)$$

où les fonctions de formes correspondant aux modes :

- De corps rigide sont $f_1(y)=1$ et $f_2(y)=ay+b$
- De flexion sont $f_3(y)=\sin(\pi y/L)$ et $f_4(y)=a_6y^6+a_5y^5+a_4y^4+a_3y^3+a_2y^2+a_1y+a_0$

La fonction f_4 est obtenue en interpolant le second mode de flexion calculé par éléments finis du rotor en simple appui à ses deux extrémités. Les fonctions $q_i(t)$ sont les coordonnées généralisées.

L'application des équations de Lagrange aux énergies cinétiques et de déformations des différentes composantes du rotor mène au système d'équations de dimension 8 suivant :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \mathbf{M}_s \sin(2\Omega t) + \mathbf{M}_c \cos(2\Omega t)) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C} + \mathbf{G}_s \sin(2\Omega t) + \mathbf{G}_c \cos(2\Omega t)) \dot{\mathbf{q}} \\ + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_s \sin(2\Omega t) + \mathbf{K}_c \cos(2\Omega t)) \mathbf{q} = \mathbf{F}\ddot{z}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Dans cette expression, $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_8]$ est le vecteur des coordonnées généralisées. Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont des matrices de masse, gyroscopique, d'amortissement et de raideur. Elles sont liées aux inerties moyennes de la section de l'arbre. En revanche les matrices indicées en s et c sont liées à la dissymétrie de la section de l'arbre. Elles sont modulées par des fonctions périodiques de fréquence 2Ω , où Ω est la vitesse de rotation du rotor. Ces fonctions peuvent agir sur sa stabilité et sur sa réponse en multipliant les fréquences de résonance. Au second membre, \mathbf{F} est le vecteur des forces externes et $\ddot{z}(t)$ est un processus aléatoire gaussien stationnaire et ergodique modélisé par un bruit blanc.

3.2 Réponse du rotor

Après s'être assuré de sa stabilité, on calcule la réponse forcée du rotor pour $\Omega = 2000$ tr/min lorsque le bruit blanc a une DSP d'amplitude $A = 10000 \text{ m}^2/\text{s}^2/\text{Hz}$ sur $[-\Omega_{\max}; \Omega_{\max}]$ où Ω_{\max} est égal à 2 fois la plus grande des fréquences propres du système. Celles-ci sont calculées dans le repère lié à l'arbre du rotor (« repère tournant ») puis projetées dans le repère lié au support (« repère fixe »). Cette démarche est nécessaire car il n'est pas possible de calculer les fréquences d'un système à coefficients variables.

La figure 1 compare la DSP de réponse obtenue par la méthode spectrale à celle d'une simulation de Monte Carlo réalisée sur 1000 échantillons. On constate que les résultats sont en bonne concordance au niveau des résonances mais aussi que ce sont les modes de corps rigide qui répondent le plus. En effet, les pulsations propres en rad/s sont :

Modes du corps solide				Modes de flexion			
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
95	106	215	550	2161	2173	8824	9339

Et les pics de résonance sont les pulsations indicées 1 à 4. La prédominance des modes du corps solide ne permet pas d'observer la présence de résonances paramétriques dues à la dissymétrie du rotor. Pour cela, on considère le cas où le rotor est en appui à ses extrémités, ce qui équivaut à supposer que les paliers ont une raideur infinie. Dans ce cas, le système devient de dimension 4 et seuls les modes flexion sont considérés. La figure 2 compare les DSP de réponse obtenues par les deux méthodes et montre la présence de résonances secondaires en plus des résonances principales correspondant aux pulsations propres du système qui sont :

1 ^{er} mode de flexion		2 ^{ème} mode de flexion	
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
397	433	1511	1768

Par contre, comme on constate un fort décalage des fréquences et des différences de niveau sur les résonances, on ne peut pas valider l'approche spectrale sur cet exemple. Le paragraphe suivant propose une explication quant à ce décalage fréquentiel.

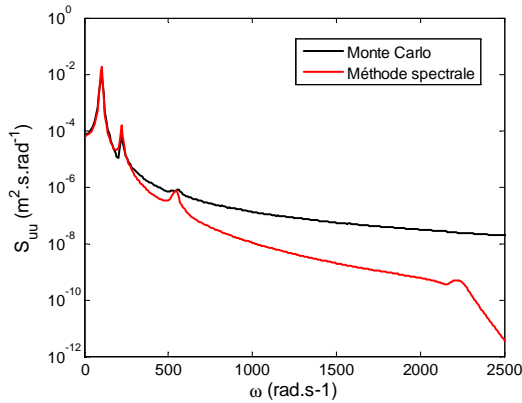


Figure 1 : DSP de réponse suivant x pour le modèle à 4 modes

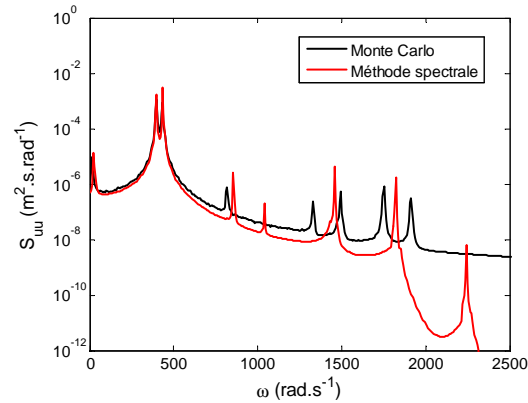


Figure 2 : DSP de réponse suivant x pour le modèle à 2 modes de flexion

3.3 Critique des résultats

Comme on l'a dit au paragraphe 2.1, les colonnes du bi-spectre \mathbf{H} , qui sont les réponses spectrales du système à des exponentielles en $j\omega t$, sont calculées en utilisant une méthode spectrale itérative ([8]). Cette dernière s'applique en considérant les termes paramétriques comme sources d'excitation interne et en les transférant au second membre. Ainsi, pour le cas du rotor dissymétrique, le système à résoudre est le suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{j\omega t} - (\mathbf{M}_s \sin(2\Omega t) + \mathbf{M}_c \cos(2\Omega t))\ddot{\mathbf{q}} - (\mathbf{G}_s \sin(2\Omega t) + \mathbf{G}_c \cos(2\Omega t))\dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{K}_s \sin(2\Omega t) + \mathbf{K}_c \cos(2\Omega t))\mathbf{q} \quad (8)$$

La méthode spectrale suppose que les fréquences principales sont celles correspondant aux équations sans excitation paramétrique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (9)$$

et que les résonances secondaires sont dues aux fonctions périodiques en $2\Omega t$ qui modulent les matrices liées à la dissymétrie du rotor. Ici, les valeurs des fréquences propres du système (9) sont :

1 ^{er} mode de flexion		2 ^{ème} mode de flexion	
ω_1^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_4^*
397	435	1460	1823

Elles sont différentes (surtout pour le 2^{ème} mode) de celles calculées dans le repère tournant car elles correspondent aux fréquences d'un rotor symétrique et non aux « vraies » fréquences du rotor dissymétrique. Ainsi, la méthode spectrale ne résout pas le bon problème ! Ceci nous montre les limites de cette approche qui ne s'applique pas aux rotors pour lesquels les coefficients paramétriques sont dus à leur géométrie (ici la dissymétrie de l'arbre) et non à une excitation externe.

Cependant, on pourrait penser que le bi-spectre peut se calculer par la transformée de Fourier des réponses temporelles du système soumis aux exponentielles en jout calculées par un schéma d'intégration numérique classique. A priori, cette solution semble séduisante puisqu'elle n'induit pas de décalage fréquentiel. En effet, on résout le système complet et obtient les « vraies » résonances. Mais elle présente peu d'intérêt par rapport à la simulation de Monte Carlo car le bi-spectre doit être calculé à partir des réponses stationnaires du système. Or, pour atteindre le régime permanent, il faut intégrer temporellement les équations sur une très longue durée, ce qui implique un temps de calcul élevé.

4 Conclusions

Ce travail de validation de la méthode proposée dans [5], qui semblait être une simple formalité, a mis l'accent sur les limites de l'approche pour des applications rotors. En effet, partant d'équations à coefficients périodiques a priori classiques, on a montré que, bien que la formulation de la DSP de réponse (5) soit juste, la méthode spectrale itérative ne peut pas être appliquée si les termes paramétriques sont dus à la géométrie du rotor. Il faudrait donc une autre approche pour calculer la réponse de tels systèmes. Il est néanmoins intéressant de vérifier que la méthode spectrale s'applique aux rotors dans le cas où les termes paramétriques sont dus à une excitation extérieure. Des travaux sont en cours pour traiter le cas d'un rotor embarqué par un mouvement de rotation harmonique (qui implique des coefficients paramétriques périodiques) et une translation aléatoire.

Références

- 1 Marghitu D.B., Sinha S.C., Boghiu D. 1998 Stability and control of a parametrically excited rotating system. Part I: stability analysis. *Dynamics and Control*. **8**, 5-18
- 2 Friedmann P., Hammond C.E., Woo T.H. 1977 Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems. *Int. J. for Num Meth. in Eng.* **11**, 1117-1136.
- 3 Dimentberg M.F., Lin Y.K. 2002 An exact solution for response spectral density of a single-degree-of-freedom system under both parametric and additive white noise excitations. *J. of Applied Mechanics*, Trans. ASME. **69**, 399-400.
- 4 Suh, J.H., Hong S.W., Lee C.W. 2005 Modal analysis of asymmetric rotor system with isotropic stator using modulated coordinates. *J. of Sound and Vibration*. **284**, 651-671.
- 5 Bachelet, L., Driot, N., Perret-Liaudet, J. 2007 Une approche spectrale pour calculer la réponse forcée de systèmes paramétriques excités par un processus aléatoire. *8^e Colloque national en calcul des structures, Giens (France)*.
- 6 Bendat J.S., Nonlinear system analysis and identification from random data, Wiley, 1990.
- 7 Axisa F., Modélisation des systèmes mécaniques : Vibrations sous écoulements, Hermes Sciences, 2001.
- 8 Perret-Liaudet J. 1996 An original method for computing the response of a parametrically excited forced system. *J. of Sound and Vibrations*. **2**, 165-177.
- 9 Bernard, P., Fogli, M., Bressolette, Ph., Lemaire, M. 1984 Un algorithme de simulation stochastique par markovianisation approchée, application à la mécanique aléatoire. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*. **3**, 905-950.