

Méthode X-SFEM pour le calcul de structure à géométrie aléatoire : application au calcul d'un joint de soudure

A. Clément*, A. Nouy*, F. Schoefs*, B. Bigourdan[◇], N. Moës*

* Institut de recherche en Génie civil et mécanique (GeM), Université de Nantes Atlantique, Ecole Centrale de Nantes, UMR CNRS 6183

[◇] IFREMER, Essais et Recherches Technologiques, Matériaux et Structures, Brest
anthony.nouy@univ-nantes.fr

Résumé :

Les méthodes éléments finis stochastiques offrent un outil robuste pour la prise en compte dans le calcul de structure des aléas sur les propriétés matériaux et les chargements. L'aléa portant sur la géométrie reste cependant un point mal maîtrisé dans le cadre de ces techniques. Afin de répondre à cette problématique, nous présentons une nouvelle méthode basée sur une extension au cadre stochastique de la méthode éléments finis étendus (X-FEM). Cette méthode repose sur l'utilisation de level sets aléatoires pour la description implicite de la géométrie et sur l'utilisation d'une approximation de Galerkin au niveau déterministe et stochastique. Elle est ici appliquée au calcul d'un joint de soudure aléatoire.

Abstract :

In structural analysis, stochastic finite element methods offer a robust tool to deal with randomness on material properties or loadings. Unfortunately, there is still no available efficient strategy to deal with uncertainties on the geometry. Here, we bring an answer to this problem by proposing a new method based on an extension to the stochastic framework of the eXtended Finite Element Method (X-FEM). This method lies on the use of the level set technique for the implicit description of the random geometry and the use of Galerkin approximation at deterministic and stochastic levels. Here, this method is applied to the analysis of a random welded joint.

Mots-clefs :

stochastic finite elements, random geometry, X-FEM

1 Introduction

Les méthodes éléments finis stochastiques de type Galerkin [Ghanem *et al.* (1991); Babuska *et al.* (2005); Matthies *et al.* (2005)] offrent aujourd'hui un outil robuste pour la prise en compte dans le calcul de structure d'aléas portant sur les propriétés matériau ou les chargements. Ces approches ne s'avèrent cependant pas adaptées au cas d'aléas portant sur la géométrie bien que cette problématique soit rencontrée dans de nombreuses applications : aléas sur un procédé de fabrication, modélisation de la corrosion en environnement aléatoire, matériaux hétérogènes à micro-structure aléatoire... Récemment, une méthode a été proposée pour traiter ce type de problèmes [Nouy *et al.* (2007)]. Cette méthode, baptisée X-SFEM pour eXtended Stochastic Finite Element Method, est une extension au cadre stochastique de la méthode X-FEM [Moës *et al.* (1999); Sukumar *et al.* (2001)]. Elle repose sur trois points : la représentation implicite de la géométrie par des level-sets aléatoires [Sethian (1999)], l'utilisation d'une approximation de Galerkin au niveau déterministe et stochastique et l'utilisation de la méthode de partition de l'unité [Melenk *et al.* (1996)] pour l'enrichissement éventuel de l'espace d'approximation. La méthode conduit à une solution approchée définie sur un seul et unique maillage. La solution obtenue est explicite en fonction des variables aléatoires décrivant l'aléa sur la géométrie et est d'une grande qualité au niveau stochastique. La méthode permet de plus une réduction importante du temps de calcul en comparaison à des approches classiques de type Monte-Carlo avec remaillages (facteur 100, 1000,...).

Dans la partie 2, nous rappelons la formulation d'un problème de mécanique à géométrie aléatoire. La technique des level sets pour la description de la géométrie est présentée dans la partie 3. Dans la partie 4, nous introduisons les espaces d'approximation au niveau spatial et stochastique. La définition de l'approximation ainsi que les problèmes liés à la construction du problème discrétisé sont introduits dans la partie 5. Enfin, dans la partie 6, nous appliquons la méthode au calcul de la réponse d'un assemblage soudé où la géométrie du cordon de soudure présente un aléa, identifié à partir de mesures expérimentales. Les performances de la méthode y sont comparées à une approche classique de type Monte-Carlo.

2 Formulation d'un problème de mécanique à géométrie aléatoire

On s'intéresse ici au calcul d'une structure occupant un domaine aléatoire. On se place en hypothèse des petites perturbations. On introduit un espace probabilisé (Θ, \mathcal{B}, P) adapté à l'étude, où Θ est l'espace des événements élémentaires, \mathcal{B} une tribu d'événements sur Θ et P la mesure de probabilité. Un élément $\theta \in \Theta$ désigne un événement élémentaire. Le domaine aléatoire est représenté par une variable aléatoire $\theta \in \Theta \rightarrow \Omega(\theta) \subset \mathbb{R}^d$, où d désigne la dimension spatiale. On suppose que la structure est soumise à des efforts volumiques \mathbf{f} et à des efforts surfaciques \mathbf{F} sur une partie de la frontière du domaine aléatoire, notée $\Gamma_2(\theta)$. Le déplacement est imposé nul sur la partie complémentaire $\Gamma_1(\theta)$. On supposera ici que Γ_1 est déterministe. On suppose le comportement élastique linéaire. On notera $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations et \mathbf{C} le tenseur d'élasticité de Hooke. On introduit alors un domaine B tel que $\overline{\bigcup_{\theta} \Omega(\theta)} \subset B$. En d'autres termes, ce domaine inclut toutes les réalisations possibles de la géométrie. La formulation variationnelle du problème peut alors se mettre sous la forme : trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta) \in \mathcal{V}_0 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V}; \mathbf{u}|_{\Gamma_1 \times \Theta} = 0\}$ tel que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0 \quad (1)$$

où A et L sont respectivement des formes bilinéaire et linéaire s'écrivant :

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Theta} \int_B \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) I_{\Omega} dx dP(\theta) \quad (2)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Theta} \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} I_{\Omega} dx dP(\theta) + \int_{\Theta} \int_{\Gamma_2(\theta)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds dP(\theta) \quad (3)$$

où $I_{\Omega}(\cdot, \theta) : B \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice de $\Omega(\theta)$. Pour θ fixé, la solution \mathbf{u} appartient à l'espace $H^1(\Omega(\theta))$ qui, par prolongement, peut être considéré comme un sous espace de $H^1(B)$. Nous travaillerons ainsi dans l'espace fonctionnel suivant : $\mathcal{V} = L^2(\Theta, dP; H^1(B)) \equiv H^1(B) \otimes L^2(\Theta, dP)$.

3 Représentation d'une géométrie aléatoire avec la technique des level sets

Dans le cas déterministe, la technique des level sets [Sethian (1999)] consiste à représenter une hypersurface de \mathbb{R}^d par l'iso-zéro d'une fonction, appelée level set, définie sur un domaine de \mathbb{R}^d contenant l'hypersurface. Cette fonction est classiquement la fonction distance signée à l'hypersurface. Dans le cadre stochastique, cette level set devient aléatoire et est notée $\phi(\mathbf{x}, \theta)$. L'hypersurface aléatoire $\Gamma(\theta)$ est alors définie par :

$$\Gamma(\theta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d / \phi(\mathbf{x}, \theta) = 0\} \quad (4)$$

Dans notre étude, la level-set $\phi(\mathbf{x}, \theta)$, définie sur $B \subset \mathbb{R}^d$, représente la frontière du domaine aléatoire $\Omega(\theta)$. Par convention, on supposera que $\phi(\mathbf{x}, \theta)$ est négative dans le domaine et positive en dehors du domaine. La fonction caractéristique du domaine peut alors s'écrire :

$$I_{\Omega}(\mathbf{x}, \theta) = \mathcal{H}(-\phi(\mathbf{x}, \theta)) \quad (5)$$

où \mathcal{H} est la fonction Heaviside. En pratique, $\phi(\mathbf{x}, \theta)$ est interpolée aux noeuds d'un maillage éléments finis fixe (déterministe) du domaine B , non conforme avec la géométrie réelle de la structure étudiée :

$\phi(\mathbf{x}, \theta) = \sum_i N_i(\mathbf{x})\phi_i(\theta)$, où les N_i sont les fonctions d'interpolation classiquement employées dans la méthode des éléments finis. Avec quelques opérations simples sur les valeurs nodales de la level-set, il est possible, pour une réalisation donnée, de déterminer si un élément est dans le domaine ou non ou encore s'il est coupé par la frontière. Dans le cas de géométries simples (cercles, hyperplans, ...), l'expression analytique des fonctions level sets est connue.

4 Approximation au niveau spatial et stochastique

On travaille dans l'espace fonctionnel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} = L^2(\Theta, dP)$ et $\mathcal{U} = H^1(B)$. Cet espace s'écrivant comme un produit tensoriel d'espaces, on introduit naturellement une discrétisation indépendante au niveau spatial et au niveau stochastique. On introduit au niveau spatial un espace d'approximation éléments finis classique $\mathcal{U}_h \in \mathcal{U}$. La solution semi-discrétisée en espace est cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x})a_i(\theta) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\theta) \quad (6)$$

où les $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ désignent les fonctions de base éléments finis classiques et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \otimes \mathcal{S}$ est le vecteur aléatoire des inconnues nodales. Au niveau stochastique, on introduit un espace d'approximation $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$, dont une base est constituée par un ensemble de P fonctions $\{H_\alpha(\theta)\}_{\alpha \in \mathcal{J}_P}$. La solution totalement discrétisée, notée $\mathbf{u}_{h,P}$, sera alors cherchée dans l'espace :

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{S}_P = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}_\alpha H_\alpha(\theta), \mathbf{a}_\alpha \in \mathbb{R}^N \right\} \quad (7)$$

On supposera classiquement que l'aléa peut être représenté avec un nombre fini m de variables aléatoires indépendantes. L'espace des événements élémentaires Θ est donc un sous-domaine de \mathbb{R}^m et la mesure de probabilité P est la mesure de probabilité jointe de cet ensemble de variables aléatoires. Plusieurs choix ont été proposés pour la construction des bases d'approximation dans $L^2(\Theta, dP)$. Les approches spectrales telles que le chaos polynomial [Ghanem *et al.* (1991); Wiener (1938)] ou le chaos polynomial généralisé [Xiu *et al.* (2002); Soize *et al.* (2004)] utilisent des bases de polynômes orthogonaux et sont bien adaptées au cas de problèmes à solution régulière. Pour les cas de solutions moins régulières, d'autres techniques d'approximation ont été introduites comme le chaos de Wiener-Haar [et *al.* (2004)] ou la méthode des éléments finis [Deb *et al.* (2001)], qui introduit au niveau stochastique une approximation polynômiale par morceaux.

REMARQUE. — On ne s'intéresse dans cette étude qu'au cas de formes aléatoires. C'est un cas particulier de la méthode X-SFEM pour lequel aucun enrichissement par la partition de l'unité n'est nécessaire (voir [Daux *et al.* (2000)] pour le cas déterministe).

5 Approximation de Galerkin et construction du problème discrétisé

L'approximation de Galerkin $\mathbf{u}_{h,P} = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \mathbf{N}\mathbf{a}_\alpha H_\alpha$ est définie en remplaçant \mathcal{V} par $\mathcal{V}_{h,P}$ dans la formulation variationnelle (1). Elle est alors obtenue en résolvant le système d'équations suivant :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} E(\mathbf{K}H_\alpha H_\beta)\mathbf{a}_\alpha = E(\mathbf{b}H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{J}_P \quad (8)$$

où E désigne l'espérance mathématique, $\mathbf{K} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice aléatoire et $\mathbf{b} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^N$ un vecteur aléatoire dont les composantes sont définies par :

$$\begin{aligned} K_{ij}(\theta) &= \int_B \varepsilon(\varphi_j) : \mathbf{C} : \varepsilon(\varphi_i) \mathcal{H}(-\phi(\mathbf{x}, \theta)) dx \\ b_i(\theta) &= \int_B \varphi_i \cdot \mathbf{f} \mathcal{H}(-\phi(\mathbf{x}, \theta)) dx + \int_{\Gamma_2(\theta)} \varphi_i \cdot \mathbf{F} ds \end{aligned} \quad (9)$$

Le calcul des termes $E(\mathbf{K}H_\alpha H_\beta)$ et $E(\mathbf{b}H_\beta)$ nécessite le calcul d'une intégrale sur Θ avec la mesure dP . Il est à noter que les composantes de \mathbf{K} et \mathbf{b} ne sont pas des fonctions régulières au niveau stochastique. Par exemple, dans le cas où seule la géométrie est aléatoire, on montre aisément que les contributions d'un élément fini $B_e \subset B$, notées $\mathbf{K}_e(\theta)$ et $\mathbf{b}_e(\theta)$, n'évoluent que sur une partie du domaine stochastique $\Theta_{cut}^e = \{\theta \in \Theta; \exists \mathbf{x} \in B_e, \phi(\mathbf{x}, \theta) = 0\}$, qui correspond aux réalisations pour lesquelles la frontière coupe l'élément B_e . En pratique, afin de bien intégrer le problème discrétisé, on réalise un maillage de l'espace stochastique permettant de représenter grossièrement ce domaine Θ_{cut}^e . Ce maillage est généré automatiquement à l'aide d'une technique recursive de type octtree. Pour chaque élément stochastique, on utilise alors une technique de quadrature classique, conduisant à l'évaluation des matrices élémentaires $\mathbf{K}_e(\theta_k)$ et $\mathbf{b}_e(\theta_k)$ pour des réalisations θ_k particulières. Ces calculs sont classiques dans le cadre de la méthode X-FEM déterministe [Sukumar *et al.* (2001)]. On notera qu'une quadrature de faible ordre au niveau stochastique est généralement suffisante pour intégrer correctement le problème discrétisé.

6 Application : calcul d'un assemblage soudé

Le problème étudié est celui d'un cordon de soudure présenté sur la figure 1. L'aléa porte sur la forme du cordon de soudure. Des procédés portables basés sur la technologie laser permettent de mesurer en temps réel plus de 20 paramètres caractérisant la géométrie transverse d'un cordon de soudure. Des études statistiques, notamment sur les corrélations entre ces paramètres et l'amorçage de fissure, sont disponibles dans [Schoefs (2005)]. On suppose ici que la frontière du cordon est circulaire et tangente aux deux pièces soudées. L'aléa porte donc uniquement sur le rayon r du cordon, modélisé par une variable aléatoire uniforme $r = U(0.05, 0.15)$. L'espace des événements est donc l'intervalle $\Theta = [0.05, 0.15] \subset \mathbb{R}$. On cherche à prédire le comportement de la pièce soumise à une sollicitation de flexion. Pour cela, un effort réparti est appliqué à l'extrémité droite de la pièce (partie déterministe de la frontière) et des conditions aux limites d'encastrement sont appliquées sur la partie de la frontière Γ_1 (voir figure 1). Le module d'Young est pris égal à 210000 MPa et le coefficient de Poisson à 0,3 aussi bien pour l'acier de la pièce que pour le métal d'apport utilisé pour la soudure. Les calculs sont réalisés sous l'hypothèse des déformations planes.

On utilise au niveau spatial une approximation éléments finis définie sur un maillage fixe de triangles à 3 noeuds représenté sur la figure 1. Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé pour lequel les fonctions de base de \mathcal{S}_P sont les polynômes de Legendre sur $\Theta = [0.05, 0.15]$.

Sur la figure 2, on présente le maximum des contraintes σ_{xx} obtenu en fonction du rayon du cordon. L'approche X-SFEM présentée ici est comparée avec une approche FEM classique où pour chaque réalisation du rayon r , un calcul éléments finis est mené sur un nouveau maillage conforme à la réalisation de la géométrie. Pour la méthode X-SFEM, cette courbe est un post-traitement rapide du calcul car la solution est connue explicitement en fonctions de la variable aléatoire r . On constate que les solutions X-SFEM et FEM sont très proches pour des maillages spatiaux équivalents. En les comparant à la solution de référence (obtenue avec un maillage spatial très fin), on remarque que l'écart maximal entre les deux méthodes ne dépasse pas les 5%.

REMARQUE. — Avec l'approximation choisie, pour une réalisation donnée de la géométrie, la contrainte est constante par élément. On choisira alors par convention de mettre à zéro cette contrainte dans un élément coupé par la frontière si le point de Gauss utilisé pour l'intégration spatiale est situé en dehors de la matière.

La figure 3 représente les solutions X-SFEM obtenues pour différents ordres de chaos. La quantité d'intérêt est le déplacement vertical en un point P_2 pouvant se situer dans ou en dehors de la matière selon la valeur du rayon du cordon (voir figure 1). On peut alors distinguer deux parties pour la solution X-SFEM : une partie physique (réalisations où P_2 est dans la matière) et une partie non physique (réalisations où P_2 est hors matière) correspondant à un prolongement de la solution physique dans B

pour lequel il n'existe évidemment pas de solution de référence. On constate que la partie physique de la solution converge très vite vers la solution de référence obtenue par FEM. De même, sur la figure 4, on constate que les densités de probabilité obtenues pour le déplacement vertical au point P_1 (point sûrement dans la matière) convergent également très rapidement en fonction de l'ordre de la décomposition sur le chaos. On notera ici que le calcul avec la technique de Monte-Carlo (couplée à un calcul FEM classique) a été réalisé pour 10000 tirages et a nécessité un temps de calcul 100 fois supérieur à celui de la méthode X-SFEM proposée.

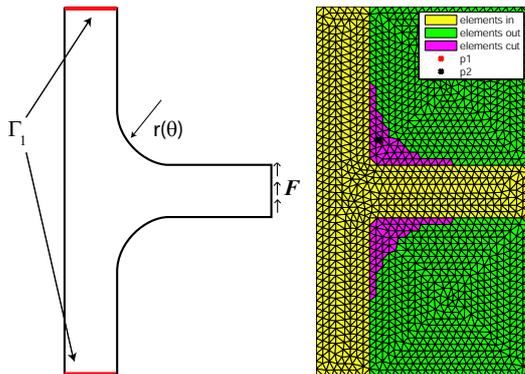


FIG. 1 – Présentation du problème d'assemblage soudé et maillage du domaine B

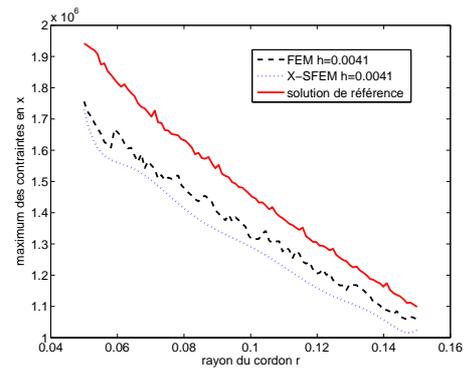


FIG. 2 – Surfaces de réponse du maximum des contraintes σ_{xx} obtenues par X-SFEM et par une approche FEM classique avec remaillages

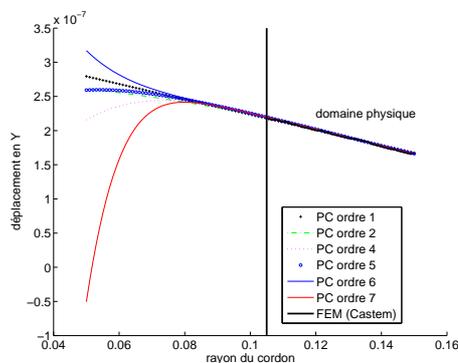


FIG. 3 – Surface de réponse du déplacement vertical en P_2 obtenue par X-SFEM pour différents ordres de chaos et comparaison avec une approche FEM classique avec remaillages

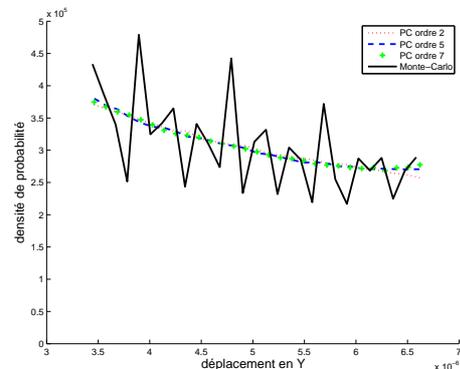


FIG. 4 – Comparaison des densités de probabilité du déplacement vertical au point P_1 obtenues avec X-SFEM pour différents ordres du chaos et comparaison avec une approche FEM/Monte-Carlo classique

7 Conclusion

Nous avons proposé une méthode éléments finis stochastiques, basée sur la méthode X-FEM, permettant de résoudre un problème à géométrie aléatoire sans remaillage. Cette méthode s'appuie sur une représentation aisée de la géométrie aléatoire à l'aide de level sets aléatoires. Elle s'appuie également sur l'utilisation d'une approximation de Galerkin au niveau spatial et stochastique. A condition d'apporter un soin particulier à l'intégration du problème discrétisé (génération de maillage automatique au niveau stochastique), cette méthode conduit à une solution d'une grande qualité, comparable aux solutions obtenues avec des méthodes classiques (FEM classique couplée avec Monte-Carlo). Cette méthode réduit

drastiquement le temps de calcul des approches classiques et peut donc s'avérer efficace pour des études probabilistes de plus en plus menées dans le cadre industriel.

Remerciements

Ces études sont soutenues par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) et par le programme européen MEDACHS, concernant les méthodes de diagnostic, de réparation et de maintenance des structures situées sur le littoral atlantique (<http://www.medachs.univ-bordeaux1.fr>).

Références

- R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin, 1991.
- I. Babuska, R. Tempone, and G. E. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :1251–1294, 2005.
- H. G. Matthies and A. Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Comp. Meth. in App. Mech. Eng.*, 194(12-16) :1295–1331, 2005.
- A. Nouy, F. Schoefs, and N. Moës. X-SFEM, a computational technique based on X-FEM to deal with random shapes. *European Journal of Computational Mechanics*, 16 :277–293, 2007.
- N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 190 :6183–6200, 2001.
- J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- J. M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity method : basic theory and applications. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 39 :289–314, 1996.
- N. Wiener. The homogeneous chaos. *Am. J. Math.*, 60 :897–936, 1938.
- D. B. Xiu and G. E. Karniadakis. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2) :619–644, 2002.
- C. Soize and R. Ghanem. Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(2) :395–410, 2004.
- O. P. Le Maître, O. M. Knio, H. N. Najm, and R. G. Ghanem. Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions. *Journal of Computational Physics*, 197 :28–57, 2004.
- M. Deb, I. Babuška, and J. T. Oden. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 190 :6359–6372, 2001.
- C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 48 :1741–1760, 2000.
- F. Schoefs. Approche fiabiliste pour l'optimisation de la maintenance des bâtiments de surface. *Rapport de contrat universitaire du GeM pour Ifremer*, (2004-2-2021432 TMS/RED/MS), September 2005.