

## Robustesse de l'estimation de fiabilité d'une structure : un nouvel algorithme valorisant la monotonie, illustré sur un exemple industriel

Etienne de Rocquigny, Yacine Barhoumi\*, Silvia Turato, Guennadi Andrianov & Laurent Carraro\*

EDF R&D

Département Management des Risques Industriels  
6 quai Watier, 78 401 Chatou Cedex

\* Ecole des Mines de St-Etienne, Laboratoire 3MI  
158 Cours Fauriel, 42 023 St-Etienne Cedex 2  
[etienne.derocquigny@edf.fr](mailto:etienne.derocquigny@edf.fr)

### Résumé :

*Dans le cadre des travaux pour la justification de la tenue en service de la cuve d'un réacteur à eau sous pression, des études probabilistes se rapportant au risque de rupture brutale de la cuve soumise à des transitoires d'exploitation et accidentels ont été menées depuis de nombreuses années en appui/complément des analyses déterministes réglementaires réalisées par EDF. Ces études couplant un modèle physique (pour la sollicitation et la résistance du composant) et un modèle probabiliste des incertitudes sont destinées à estimer la fiabilité de la structure ; elles se heurtent au problème de l'extrême faiblesse des probabilités, et au défi classique de l'optimisation du rapport entre le temps de calcul et la robustesse du résultat obtenu. Un nouvel algorithme, valorisant entièrement la monotonie de la fonction de défaillance, est proposé et illustré sur un cas d'étude simplifié se reliant à un enjeu industriel, où il permet de contrôler de façon robuste les méthodes fiabilistes de type FORM-SORM.*

### Abstract :

*The structural integrity assessment of nuclear reactor pressure vessel under accidental transients has been assessed for years including probabilistic mechanics besides deterministic studies. Even with a simple physical model coupled with probabilistic uncertainties on material properties and the thermo-hydraulic transient, determination of the failure probability represents a computing dilemma: approximations are necessary to keep the computing time industrially-reasonable, either on the thermo-mechanical model to compute it quicker, or on the probabilistic side to limit the number of computations; both threaten the a priori theoretical conservatism. A new algorithm is introduced along with a simplified industrial example, entirely based on monotony properties: it allows the robust control of probabilistic approximations (FORM-SORM-like) classically used on the thermo-mechanical model.*

**Mots-clefs : Fiabilité des structures ; mécanique probabiliste; robustesse**

### 1 Introduction - contexte industriel

Le contexte est celui de l'estimation, par voie probabiliste, des marges existantes vis à vis du risque de rupture brutale de la cuve : elle est modélisée mécaniquement vis à vis de transitoires thermohydrauliques d'accidents conventionnels en assignant des lois de probabilités à certains paramètres incertains : e.g. la fluence, la taille et la localisation des défauts, la ténacité, ... Outre la question délicate, non traitée ici, du choix des paramètres des lois de probabilité (d'après essais, retour d'expérience, considérations physiques...), un défi numérique peut être posé par le calcul mécanique probabiliste ; faisant suite à de Rocquigny (2005), le présent article développe une voie possible pour assurer la robustesse des approximations en exploitant la monotonie de façon plus dédiée que les algorithmes *FORM-SORM* : ceci sera montré sur un cas simplifié étudié par EDF vis à vis d'un transitoire classique, la perte de réfrigérant primaire, et d'un choix particulier de sources d'incertitudes.

*N.B. : les propos transmis dans cet article n'ont aucunement vocation à alimenter les dossiers réglementaires concernant les réacteurs exploités par EDF ; les modèles et résultats numériques présentés à titre d'exploration scientifique ne peuvent en aucun cas être utilisés par quiconque pour tirer des conclusions sur la sûreté des ouvrages.*

## 2 Modèle physique et probabilisation des incertitudes

Le modèle thermo-mécanique étudié comprend (*cf.* Moinereau *et al.* (1998)) :

- une représentation thermo-hydraulique simplifiée du transitoire accidentel de perte de réfrigérant primaire (APRP ou LOCA en anglais) : la température du fluide primaire, sa pression et le coefficient d'échange thermique (H) à l'interface fluide-revêtement de cuve sont donnés analytiquement en fonction du temps et de la température d'injection de sécurité (Tis) : il s'agit schématiquement d'une chute rapide de température (et de pression) jusqu'à un palier froid à Tis (entre t=45s et t=1871s) avant remontée à 80°C quelque soit la valeur Tis, le tout en convection forcée.

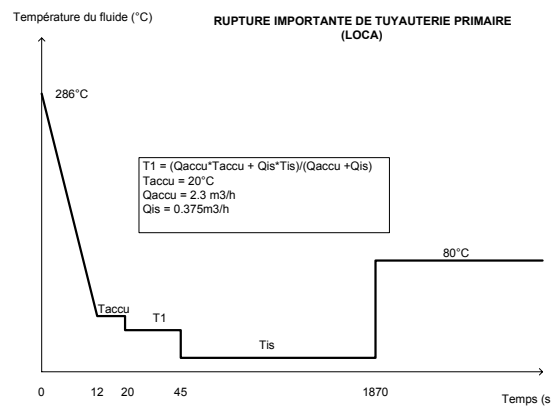


FIG. 1 – Transitoire de température dans le fluide primaire

- un modèle thermo-mécanique de l'épaisseur de la cuve, basé sur Code\_Aster : aux éléments finis 1D axisymétrique et bi-matériaux (revêtement puis métal de base). Le calcul est quasi-statique linéaire, mais avec des propriétés matériaux dépendant de la température : la discrétisation temporelle est de 397 pas.
- un modèle d'amorçage de la rupture autour d'un défaut, comprenant :
  - un défaut de type axial de hauteur variable, sous revêtement, dans le métal de base, au point chaud.
  - en pointe B, la plus éloignée de la peau interne, un facteur d'intensité de contraintes  $K_{cpB}(t)$  est calculé d'après le facteur d'intensité élastique avec correction elliptique et plasticité  $\beta$ .
  - à chaque instant la tenacité  $K_{Ic}$  est calculée selon le modèle ASME/RCC-M, dépendant de la température du métal en B ( $T_B(t)$ ) et du  $RT_{NDT}$  dont le décalage dépend de la fluence  $\Phi$  selon les formules FIM/FIS (*cf.* Turato *et al.* (2003)).

Des incertitudes sont modélisées par des lois de probabilités portant sur les variables suivantes : **hauteur du défaut ( $h = 2a$ )**, **distance à l'interface** métal-revêtement ( **$d$** ) et **ténacité** (modèle RCC-M) ), la tenacité  $K_{Ic}^{RCC-M}$  étant prise comme la valeur pessimiste à  $-2\sigma$  de l'incertitude intrinsèque de la tenacité notée  $u_{K_{Ic}}$ . Voici les lois suivies par ces variables :

Variable	Type	Paramètres	Commentaires
tenacité (incertitude intrinsèque) : $u_{K_{Ic}}$	normale	$K_{Ic}^{RCC-M}$ = valeur à $-2\sigma$ ; Coef. variation $c_{K_{Ic}} = 15\%$	Le support est tronqué à $[-4\sigma, +4\sigma]$
hauteur défaut : $h$	Weibull	$\alpha = 3.09\text{mm}$ ; $\beta = 1.8\text{mm}$	loi issue d'un exercice d'ajustement sur des données de tubulures
distance à l'interface : $d$	Uniforme	[0.1, 100mm]	Le défaut est par hypothèse dans la demi-épaisseur interne

Des valeurs déterministes pénalisées sont prises pour la température de l'injection de sécurité Tis (7°), la fluence (à  $6.5 \cdot 10^{19}$  n/cm<sup>2</sup>) et le RT<sub>NDT</sub> (pénalisé à  $-2\sigma$ ).

L'événement de défaillance est défini ainsi : au moins à un instant du transitoire accidentel, la fonction (ou marge) instantanée de défaillance (prise à l'amorçage) devient négative. On cherche donc, par l'étude de mécanique probabiliste, à évaluer la probabilité suivante, dite probabilité de « risque global »<sup>1</sup> :

$$G(u_{K_{Ic}}, h, d, t) = K_{IcB}(u_{K_{Ic}}, h, d, t) - K_{cpB}(h, d, t) \quad Pf = P[G \min(u_{K_{Ic}}, h, d, t) < 0] = P[\text{Min}_i(G(u_{K_{Ic}}, h, d, t)) < 0]$$

### 3 Principe du nouvel algorithme en comparaison à Form

#### 3.1 Limitations de Form/Sorm vis à vis de la monotonie

Les méthodes classiques FORM/SORM (*cf.* par exemple Madsen *et al.* (1986)) font l'hypothèse que le domaine de défaillance est inclus dans le demi-espace délimité, dans l'espace transformé, par l'hyperplan-limite (resp. la surface d'ordre 2) : plus précisément, d'éventuelles zones de défaillance de l'autre côté du demi-espace ne sont acceptables qu'à condition d'être beaucoup plus éloignées de l'origine que le point de conception, le poids probabiliste dans l'espace transformé centré réduit décroissant rapidement avec la distance à l'origine.

La fonction de défaillance de certains systèmes mécaniques est monotone vis à vis des variables incertaines, i.e.  $\forall i, \forall a \geq 0, \forall \underline{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) \in \text{Supp}(\underline{X}) \quad G(x_1, \dots, x_i + a, \dots, x_p) \geq G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$  où l'on a supposé le sens de la monotonie croissante pour toutes les variables (quitte à transformer le signe des variables pour lesquelles  $G(\cdot)$  est décroissante) et où l'on a noté  $\text{Supp}(\underline{X})$  le support de la loi jointe du vecteur aléatoire des sources d'incertitudes. Remarquons que cette propriété de monotonie est d'ailleurs équivalente quand on l'exprime dans l'espace physique ou dans l'espace transformé FORM, tout au moins dans le cas de variables indépendantes : la transformation  $x_i = F^{-1}_{x_i} \circ \Phi(u_i)$ , composée de fonctions de répartition qui sont par définition croissantes, l'est aussi.

Cette hypothèse de monotonie n'est hélas pas suffisante pour assurer l'approximation FORM. Certes des points de conception annexes du type de ceux de la figure 2 (gauche) sont exclus, puisqu'en suivant une droite parallèle à l'un des axes (*i.e.* ne faire varier que  $u_i$  dans le vecteur  $\underline{u}$ ),  $G(\cdot)$  passerait d'une valeur négative à une valeur positive puis négative. Néanmoins la situation de la figure 2 (droite) n'est pas exclue. Le tirage d'importance autour du design point (DP) permettrait alors de corriger les écarts au demi-espace (plus ou moins rapidement selon leur distance au DP). Néanmoins la convergence vers 0 de l'erreur de celui-ci n'est qu'asymptotique (*cf.* par exemple Rubinstein (1981)).

<sup>1</sup> Cette probabilité est en fait conditionnelle à l'événement initiateur « APRP », dont l'ordre de grandeur conventionnel de probabilité d'occurrence est  $< 10^{-4}$ , ce par quoi toutes les probabilités de l'article doivent être multipliées

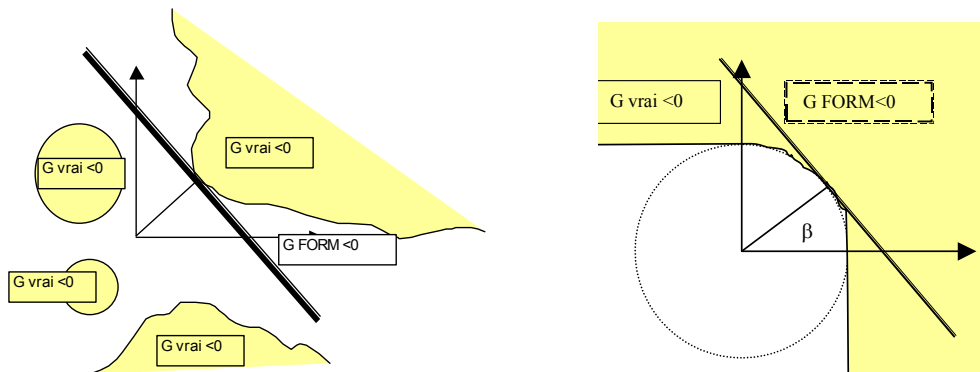


FIG. 2 – Configurations de domaine de défaillance où FORM n'est pas conservative : dans un cas *non monotone* multi-points de conception (à gauche) ; dans un cas *monotone* (à droite)

D'autres propriétés mathématiques que la simple monotonie sont donc nécessaires pour justifier théoriquement du conservatisme de FORM. Il n'est pas dans le propos du présent article de discuter intégralement de la conditions de validité de FORM, qui reste une heuristique très classique en mécanique probabiliste industrielle, ou des méthodes hybrides comme la tirage d'importance : le propos est de montrer que la monotonie suffit en soi à permettre l'utilisation d'un autre algorithme, dont le conservatisme est *certain*.

### 3.2 Un nouvel algorithme valorisant complètement la monotonie

De Rocquigny (2005), proposait une stratégie remplaçant le code mécanique (tout au moins sa sous-partie la plus coûteuse en temps CPU) par une surface de réponse conservative, via une fonction constante par morceaux, simulée ensuite à faible coût par Monte-Carlo. Dans l'exemple étudié, la construction en était très simple puisqu'il n'y avait qu'une variable aléatoire en entrée : quelques dizaines de calculs (chers) du code mécanique suffisant à la construire, et par là-même à évaluer la probabilité de défaillance.

Si plusieurs variables aléatoires  $X_i$  affectent le code mécanique ( $\underline{X}$  devient un vecteur de dimension  $p$ ), on généralise facilement cette stratégie en passant, dans la fonction constante par morceaux, des intervalles à des pavés de dimension  $p$ . C'est le point de départ du nouvel algorithme proposé, comportant deux améliorations : (i) le maillage de  $Supp(\underline{X})$  par un plan d'expérience à pavés iso-probables, dans l'esprit du *Latin Hypercube Sampling(LHS)* ; (ii) une adaptation progressive de la finesse du maillage de  $Supp(\underline{X})$ , pour contrer l'augmentation de la taille du plan d'expérience sous-jacent, qui croît à la puissance  $p$ . L'avantage décisif de la première amélioration est qu'elle dispense de simuler par Monte-Carlo la surface de réponse ainsi construite. Les pavés étant iso-probables, il suffit de compter, sur les pavés totaux, la proportion de pavés encadrant (*respectivement* encadrés par) les points défaillants, ce qui donne une majoration (*resp.* minoration) *certaine* de  $P_f$ , cf. Figure 3.

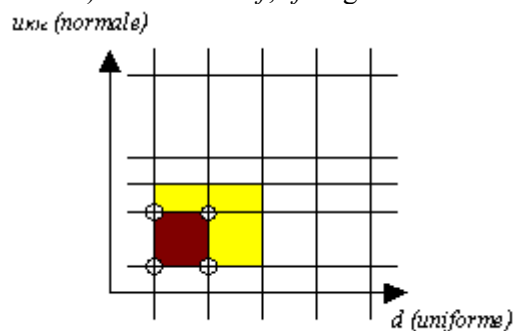


FIG. 3 – Illustration de l’algorithme, dans l’exemple d’un plan 5x5 iso-probabiliste, croisant une variable uniforme et une variable normale : les 4 points cerclés sont défaillants ; le pavé marron minore l’espace défaillant, l’ensemble des pavés jaunes et marron le majore.

L’algorithme est finalement le suivant :

- (a) (à la première itération) paver  $Supp(\underline{X})$  avec un plan d’expérience à pavés isoprobables ; (à la  $k$ -ième itération) : idem, seulement sur le sous-ensemble courant  $Sk$
- (b) (la seule étape coûteuse) calculer la fonction  $G(.)$  aux points du  $k$ -ième plan
- (c) calculer un encadrement de  $Pf$  : compter les proportions de pavés minorant ou majorant les points défaillants dans  $Sk$  et multiplier ces proportions à la proportion de pavés majorant, i.e. la borne supérieure, de l’itération  $k-1$  (à la première itération, prendre 1)
- (d) extraire le sous-ensemble  $Sk+1$  en ne conservant de  $Sk$  que les pavés majorant les points défaillants et aller à l’étape (a) de l’itération  $k+1$

#### 4 Implémentation via Open TURNS sur l’exemple de la cuve sur un transitoire donné

##### 4.1 implémentation dans Open Turns et résultats

Cet algorithme a été mis en œuvre sur le modèle physique présenté au §2. et basé sur *Code Aster* 1D, par un codage original dans la plate-forme *Open TURNS* de traitement d’incertitudes, co-développée par EDF, EADS et Phimeca (Andrianov *et al* (2007)).

Voici les résultats comparés entre FORM, SORM, et deux paramétrages de l’algorithme en changeant la taille du plan d’expérience itératif. Monte-Carlo n’est indiqué que comme référence virtuelle : il a été évidemment impossible de le mettre en œuvre sur l’exemple industriel compte tenu de la faiblesse des probabilités ( $<10^{-4}$ ).

Méthode	Nb. d’appels au code mécanique	Estimation de $Pf$	Contrôle de l’erreur	Commentaires
Form	57	$2.2 \cdot 10^{-5}$	Difficile a priori	Contrôle possible par simulations locales (tirage importance), mais seulement <i>statistiquement</i>
Sorm	63	$6.7 \cdot 10^{-6}$	Difficile a priori	idem
Algo. monotone (plan d’exp. non optimisé)	1700	$6.9 \cdot 10^{-5} > Pf > 1.4 \cdot 10^{-6}$	L’encadrement est <i>certain</i>	En augmentant le nombre de tirages, réduction <i>certaine</i> de l’encadrement
Algo. monotone (plan d’exp. optimisé)	80	$5 \cdot 10^{-4} > Pf$	idem	idem
Monte-Carlo	$> 10^7$ pour une variance raisonnable	(non testé)	Encadrement <i>incertain</i> , avec niveau de confiance	En augmentant le nombre de tirages, on réduit <i>statistiquement</i> l’encadrement

Dans l’exemple étudié, notons que l’algorithme valide les estimations de FORM et de SORM qui apparaissent en ordre de grandeur proches de bornes sup. et inf. de  $Pf$ . Si FORM et SORM apparaissent comme plus performantes en nombre de calculs, il faut bien noter la différence majeure de résultat : l’encadrement fourni par notre algorithme est *certain* (sous hypothèse de monotonie), tandis que l’erreur sur FORM/SORM reste théoriquement inconnue.

L’optimisation du plan d’expérience rend l’algorithme plus économe en calculs, comme on l’introduit dans le tableau : 80 calculs suffisent par exemple à garantir une borne supérieure certaine déjà basse. On peut également réduire le nombre de calculs en partant, au sein de l’algorithme monotone, de pavés encadrant le point de conception FORM (étude en cours).

##### 4.2 Discussion sur la monotonie sur l’exemple testé

La robustesse du résultat donné par notre algorithme dépend évidemment de l’hypothèse sous-jacente de monotonie. Dans l’exemple étudié, la fonction de défaillance est croissante avec

$d$  et  $u_{Kic}$  et décroissante avec  $h$  : c'est trivial dans le cas de l'incertitude sur la ténacité, (cf. de Rocquigny (2005) pour plus de détails), et assez intuitif en ce qui concerne  $h$  et  $d$  : la rupture est plus vraisemblable si le défaut est plus grand, ou plus proche du revêtement, le choc froid y étant plus sensible. Mais c'est théoriquement non trivial à démontrer pour ces deux variables, et notamment pour  $h$ . L'étude des équations de l'intensité de contraintes et de la ténacité montre que des effets s'opposent : par exemple avec  $h$  croissante, l'éloignement de l'interface de la pointe externe réduit le choc thermique et donc augmente la ténacité alors que l'intensité de contraintes s'accroît bien évidemment. En fait, l'étude numérique montre que, sur ce cas certains effets dominant, assurant donc la monotonie, sauf dans des régions lointaines de la défaillance (quand  $d$  est forte et  $h$  moyenne), ce qui n'est pas gênant. Cette discussion de nature physique prend évidemment une importance forte dans l'étude de la robustesse de l'estimation : cela nous semble être en fait l'un des intérêts de l'algorithme proposé, que d'inciter plus encore une réflexion de nature physique dans l'analyse de la robustesse de l'étude fiabiliste.

## 5 Conclusions et Pistes de Recherche

Garantir la robustesse de l'estimation des probabilités de défaillance reste un défi dans le cas où les modèles mécaniques sont coûteux en temps de calcul. Il a été proposé un nouvel algorithme qui est théoriquement certainement conservatif dans le cas où la monotonie est assurée : cela reporte en fait la démonstration de la robustesse sur la question des propriétés du problème physique sous-jacent.

Sur un exemple industriel simplifié de mécanique nucléaire, on a pu assurer de façon robuste un encadrement de probabilités très faibles ( $10^{-5}$ ) en un nombre moyennement élevé de simulations (le millier), validant ainsi les probabilités estimées par ailleurs de façon très efficace mais sans contrôle d'erreur par la méthode FORM-SORM (<100 simulations). La performance de l'algorithme en termes de nombre de calculs nécessaires peut être encore optimisée en ajustant la taille du plan d'expériences et en hybridant avec les méthodes fiabilistes plus traditionnelles, l'avantage étant néanmoins décroissant avec le nombre de variables incertaines. Il reste évidemment raisonnable dans tous les cas de disposer d'un panel de méthodes d'estimation variées des probabilités.

## Références

de Rocquigny E. 2005, Couplage mécano-probabiliste pour la fiabilité des structures - un cas industriel où la robustesse d'une surface de réponse est démontrable, 17<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Troyes.

Moinereau D., Messelier-Gouze C., Bezdikian G., Ternon-Morin F., Mezière Y., Faidy C., Pellissier-Tanon A., Vagner J. and Guichard D. 1998, "Some recent developments in French Reactor Pressure Vessel structural integrity assessment", ASME Pressure Vessels and Piping, Vol. 365, 45-58.

de Rocquigny E., Chevalier Y., Turato S., Meister E. 2004 « Probabilistic Assessments of the Reactor Pressure Vessel Structural Integrity : Direct coupling between probabilistic and finite-element codes to model sensitivity to key thermo-hydraulic variability », ASME ICONE12.

Madsen H.O., Kenk S. & Lind N.C. 1986, Methods of Structural Safety, Prentice-Hall Inc.

Rubinstein R.Y. 1981, Simulation and the Monte-Carlo Method, Wiley

Andrianov G., Burriel S., Cambier S., Dutfoy A., Dutka-Malen I., de Rocquigny E., Sudret B., Benjamin P., Lebrun R., Mangeant F., Pendola M. 2007, Open TURNS : an Open Source initiative to treat risk, uncertainties and statistics in a structured industrial approach, ESREL'07, Stavanger, Norway

Turato S., Venturini V., Meister E., Bass B.R., Dickson T.L. Pugh C.E. 2003 "Deterministic and probabilistic assessments of the reactor pressure vessel structural integrity : benchmark comparisons " ASME PVP03