

Approche probabiliste du comportement mécanique d'interfaces discrètes

Bernard Haussy, Jean François Ganghoffer

ESEO/LEMTA-ENSEM

4 rue Merlet de la Boulaye, BP 30926 49009 Angers CEDEX, 2 avenue de la Forêt de Haye, BP 160,
54504 Vandoeuvre CEDEX
Bernard.haussy@eseo.fr

Résumé :

La modélisation des interfaces de manière discrète permet une étude fine de leur structure et de leur comportement. L'utilisation d'aspects stochastiques enrichit la modélisation.

On s'intéresse ici à la dégradation progressive des liens entre les deux surfaces en contact. Une modélisation récursive est proposée ; les variations des modules d'Young et coefficients de Poisson décrivant le comportement des fibres composant l'interface conduisent à une loi de type Scott Blair caractérisée par un exposant différentiel fractionnaire. Le seuil de rupture potentiel des fibres est décrit par diverses lois de probabilité.

Des simulations de fluage et de traction sont réalisées, décrites par des équations aux dérivées fractionnaires stochastiques.

En regard de solutions analytiques obtenues dans quelques cas particuliers à l'aide de la transformation de Laplace, une méthode basée sur les polynômes d'Adomian est présentée. La convergence de la méthode est envisagée.

Abstract :

Modelling interfaces in a discrete way permits to have a good idea of their behaviour. Introducing stochastic aspects improves the model.

Progressive damage of the links between the two surfaces in contact is analyzed. A recursive model is proposed: variations of the Young modulus and Poisson ratio lead to a Scott Blair behaviour law of the interface; a fractional differential exponent is exhibited. Different probability laws describe the break of the fibres.

Traction and creep simulations are computed, both are the results of fractional differential equations.

Some analytical solutions are provided with the use of Laplace transform; others cases are treated by a method based on the Adomian polynomials. Convergence of that last method is studied.

Mots-clefs :

Interface; discret; stochastique

1 Introduction

L'étude des interfaces, munis d'une microstructure dont la dimension typique n'est plus négligeable comparée à l'épaisseur de celle ci, met en défaut une analyse basée le concept de VER et l'homogénéisation associée.

On peut envisager de construire une approche discrète à l'aide d'éléments analogiques dont les propriétés sont décrites à l'aide de lois de probabilité (Kliemann et al 1993). Dans le cas de l'endommagement, le comportement peut être modélisé par une approche probabiliste.

On se propose d'élaborer des modèles discrets probabilistes d'endommagement d'interfaces en introduisant un comportement viscoélastique des fibres mises en jeu.

2 Faisceau viscoélastique en fluage et en traction

Les fibres constituant le faisceau sont munies d'un comportement viscoélastique, modélisé par un schéma de Kelvin Voigt

Une variable d'endommagement D est introduite, elle représente la proportion de fibres brisées dépendante d'une loi de probabilité. La contrainte globale effective est alors

$$\sigma = \frac{\Sigma}{1-D}$$

où Σ est la contrainte nominale.

On étudie des problèmes de fluage et on obtient des courbes de déformation.

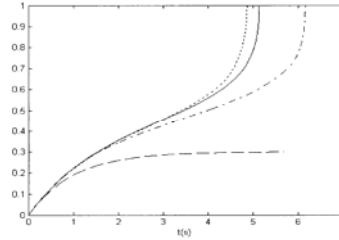


Fig. 1 : Déformation en fonction du temps. Interface vierge / Interface endommagée (Cas continu : courbe continue)

La comparaison entre continu et discret (Fig. 1) montre l'effet de la dispersion statistique .

On peut également envisager des problèmes de traction (rampe en fonction du temps) :

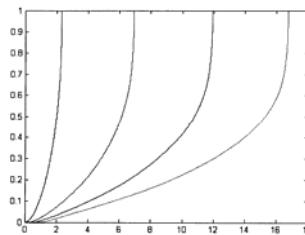


Fig. 2 : Simulation de traction : déformation en fonction du temps - $\tau_e = 1s$, de gauche à droite : $\tau_f = 1,5,10,15s$

On observe une déformation supplémentaire due à l'endommagement.

On observe une grande différence de comportement dans le cas du fluage et de la traction. Dans ce dernier cas, la force appliquée est l'intégration d'une distribution d'Heaviside, l'intégration lisse les irrégularités du système et minimise les différences observées lors des tirages aléatoires successifs. La solution du problème discret est donc très dépendante de la façon dont le système est sollicité.

3 Dégradation récursive des paramètres physiques

La propagation de l'endommagement entraîne une dégradation progressive des propriétés mécaniques des liens entre les deux surfaces. On imagine que les raideurs équivalentes des liens décroissent avec l'endommagement (Oustaloup 1995), la propagation du front de fissure est directionnelle. On modélise cela en donnant des valeurs récursives au module d'Young et à la viscosité des fibres, (coefficients α et β) (Fig. 3).

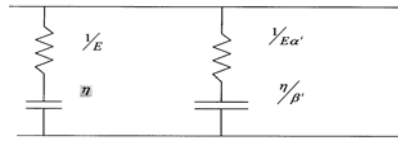


Fig. 3 : Modélisation réursive d'une interface

La loi de comportement du bloc réursive est évaluée en réalisant une analogie électrique. On identifie une loi de la forme :

$$\sigma(t) = \frac{1}{\omega_0^n} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \varepsilon(t)$$

où $\omega_0 = E/\eta$ et $n = \frac{1}{1 + \frac{\log \beta}{\log \alpha}}$, (loi de Scott Blair). La loi de comportement du matériau s'écrit :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \frac{E}{\omega_0^n} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \varepsilon(t)$$

n est un exposant de dérivation fractionnaire, en général réel.

Pour un fluage sans endommagement ($\sigma(t) = \Sigma$), on doit résoudre l'équation suivante :

$$\Sigma = E\varepsilon(t) + \frac{E}{\omega_0^n} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \varepsilon(t)$$

Elle peut être résolue, dans certains cas (ici $n = 1/2$), par transformation de Laplace :

$$\varepsilon(t) = -\gamma \sqrt{\omega_0} t^{-1/2} E_{1/2, 1/2}(-E\sqrt{\omega_0} \sqrt{t}) + \Sigma \sqrt{\omega_0} \int_0^t \left[u^{-1/2} E_{1/2, 1/2}(-E\sqrt{\omega_0} \sqrt{u}) \right] du$$

avec $\gamma = -\frac{E}{\sqrt{\omega_0}} \frac{d^{-1/2} \varepsilon}{dx^{-1/2}} \Big|_{t=0}$.

où $E_{1/2, 1/2}$ est une fonction de Mittag-Leffler. La forme de la solution (Fig. 4) ressemble à la courbe correspondante de l'interface vierge (Fig. 1)

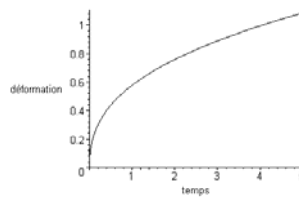


Fig. 4 : Fluage, comportement de type Scott Blair

Pour les tests de traction réalisés par application d'une rampe de contrainte $\Sigma = \sigma_0 \frac{t}{\tau_f}$, l'équation admet comme solution :

$$\varepsilon(t) = -\gamma \sqrt{\omega_0} t^{-1/2} E_{1/2, 1/2}(-E\sqrt{\omega_0} \sqrt{t}) + \frac{\sigma_0}{\tau_f} \sqrt{\omega_0} \int_0^t \left[(t-u) u^{-1/2} E_{1/2, 1/2}(-E\sqrt{\omega_0} \sqrt{u}) \right] du$$

La courbe représentative de la réponse est donnée sur la Fig. 5 dans le cas où $\gamma = 0$.

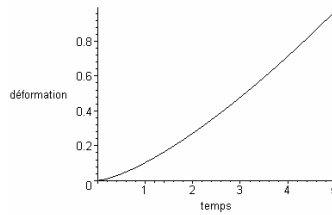


Fig. 5 : Déformation en fonction du temps, rampe de contrainte

4 Endommagement de l'interface récursive

L'introduction d'une variable probabiliste dans le problème conduit à l'écriture d'une équation différentielle fractionnaire stochastique. Un problème de fluage avec endommagement s'écrit :

$$\sigma(t) = \frac{\Sigma}{1-D} = E\varepsilon(t) + \frac{E}{\omega_0^n} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \varepsilon(t),$$

En notant $\left(\frac{d}{dt} \right)^n = D^n$, l'équation à résoudre se met sous la forme :

$$D^n \varepsilon + \omega_0^n \varepsilon - \frac{\omega_0^n \Sigma}{E(1-D(\varepsilon))} = 0$$

Ce type d'équation, non linéaire, se prête bien à la démarche d'Adomian (1988). Cette méthode repose sur un calcul récursif d'approximations successives de la solution du problème. On scinde l'équation en différents termes (Shawagfeh (2002)), fractionnaire, linéaire et non linéaire, avec des notations évidentes, on a :

$$F\varepsilon = D^n \varepsilon \quad L\varepsilon = \omega_0^n \varepsilon = \lambda \varepsilon \quad NL\varepsilon = -\frac{\omega_0^n \Sigma}{E(1-D(\varepsilon))} = -\frac{\mu}{1-D(\varepsilon)}$$

Une première étape consiste à construire les polynômes d'Adomian de la partie non linéaire de l'équation ; puis, une solution est construite récursivement par intégrations successives.

Si on considère une distribution uniforme ($D(\varepsilon) = \varepsilon$) les premiers polynômes d'Adomian de la partie non linéaire s'écrivent :

$$A_0 = f(y_0) = \frac{1}{1-y_0};$$

$$A_1 = f'(y_0)y_1 = \frac{1}{(1-y_0)^2} y_1$$

$$A_2 = f''(y_0)y_2 + \frac{1}{2} y_1^2 f'''(y_0) = \frac{1}{(1-y_0)^2} y_2 + \frac{y_1^2}{(1-y_0)^3}$$

$$A_3 = f'''(y_0)y_3 + y_1 y_2 f''''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f''''(y_0) = \frac{1}{(1-y_0)^2} y_3 + \frac{2y_1 y_2}{(1-y_0)^3} + \frac{y_1^3}{(1-y_0)^4}$$

L'inversion de l'opérateur de dérivation fractionnaire peut se faire à l'aide de l'opérateur intégral de Riemann-Liouville. Il est défini par, pour l'ordre $\delta > 0$, par :

$$(J^\delta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^x (x-t)^{\delta-1} f(t) dt$$

Formellement, on a alors :

$$\varepsilon = \mu J^n \left(\frac{1}{1-D(\varepsilon)} \right) - \lambda J^n \varepsilon,$$

On construit la solution du problème $\varepsilon = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p$, la partie non linéaire de l'équation étant

développée à l'aide des polynômes d'Adomian $NL\varepsilon = \sum_{p=0}^{\infty} A_p$:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = C_0 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \mu J^n (A_0)$$

$$\varepsilon_n = \mu J^n (A_{n-1}) - \lambda J^n (\varepsilon_{n-1}) \text{ pour } n > 1$$

Ici, on obtient, pour les premiers termes :

$$\varepsilon_1 = \mu \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$$

$$\varepsilon_2 = (\mu - \lambda) \mu \frac{t^{2n}}{\Gamma(2n+1)}$$

$$\varepsilon_3 = \left[\mu \left[(\mu - \lambda) \frac{\mu}{\Gamma(3n+1)} + \frac{\mu^2}{(\Gamma(n+1))^2} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(3n+1)} \right] - \lambda (\mu - \lambda) \mu \frac{1}{\Gamma(3n+1)} \right] t^{3n} = \phi t^{3n}$$

$$\varepsilon_4 = \mu \left[\phi \frac{\Gamma(3n+1)}{\Gamma(4n+1)} + 2\mu(\mu - \lambda) \mu \frac{\Gamma(3n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+1)\Gamma(4n+1)} + \frac{\mu^3}{(\Gamma(n+1))^3} \frac{\Gamma(3n+1)}{\Gamma(4n+1)} \right] t^{4n} - \lambda \phi \frac{\Gamma(3n+1)}{\Gamma(4n+1)} t^{4n}$$

On peut alors obtenir une courbe déformation en fonction du temps (Fig. 6).

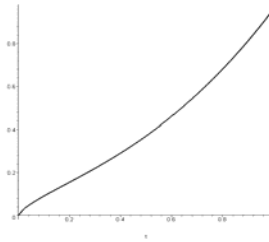


Fig. 6 : Fluage, endommagement : loi uniforme, $n = 0.7$, paramètres unitaires

On peut remarquer l'analogie d'allure avec les courbes de la Fig. 1 dans le cas de l'endommagement.

La même démarche peut être envisagée pour une traction réalisée par l'application d'une rampe

de contrainte $\Sigma = \sigma_0 \frac{t}{\tau_f}$.

L'équation à résoudre s'écrit alors :

$$D^n \varepsilon + \omega_0^n \varepsilon - \frac{\sigma_0 \omega_0^n}{E \tau_f} \frac{t}{(1-D(\varepsilon))} = 0,$$

Elle est alors assez similaire à l'équation précédente et se résout par la même méthode. On écrit :

$$F \varepsilon = D^n \varepsilon \quad L \varepsilon = \omega_0^n \varepsilon = \lambda \varepsilon \quad NL \varepsilon = -\frac{\sigma_0 \omega_0^n}{\tau_f E} \frac{t}{(1-D(\varepsilon))} = -\frac{\eta}{1-D(\varepsilon)},$$

Ce qui conduit à une courbe de déformation en fonction du temps (Fig. 7) ayant une allure proche de celles de la Fig. 2.

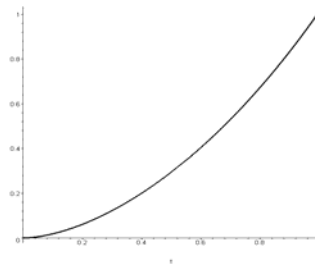


Fig. 7 : Traction : endommagement uniforme, $n = 0.7$, paramètres unitaires

Des simulations ont été réalisées avec des lois normales et des lois Beta - les polynômes d'Adomian ont une autre forme, donnant lieu à des courbes ayant la même allure que celles obtenues avec la loi uniforme. La convergence de la méthode est établie pour ce type de problème (séries alternées).

5 Conclusions

Il semble clair, au vu des applications présentées, que l'approche discrète probabiliste se révèle être un outil simple et puissant de description de phénomènes physiques tels que la rupture. L'utilisation de la méthode d'Adomian s'avère être un outil extrêmement puissant et simple pour résoudre des problèmes différentiels fractionnaires non linéaires et stochastiques.

Références

- Shawagfeh N. 2002 Analytical approximate solutions for non linear fractional differential equation *Applied mathematics and computation* **131**, 517-529.
- Kliemann W., Namachchivaya N.S., 1993 *CRC Mathematical modelling series; Non linear dynamics and stochastic mechanics* Ed.
- Oustaloup A. 1995 La dérivation non-entière. Théorie, synthèse et applications. Hermès, Paris
- Adomian, G. 1988 A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of mathematical analysis and applications*. **135**, 501-544, 1988.