

Approche fiabiliste de la stabilité des coques minces avec imperfections géométriques aléatoires

Claudine Noirfalise*, Jean-Marc Bourinet*, Michel Fogli* & Bruno Cochelin**

* Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, IFMA & Université Blaise Pascal
Campus de Clermont-Ferrand - Les Cézeaux - BP 265 - 63175 AUBIÈRE Cedex
Claudine.Noirfalise@ifma.fr

** Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Université d'Aix Marseille, UPR 7051
31 chemin Joseph-Aiguier - 13402 Marseille cedex 20

Résumé :

Le caractère aléatoire des imperfections géométriques initiales est souvent à l'origine des fortes dispersions obtenues expérimentalement sur les charges de flambement des coques minces et il est ainsi naturel de considérer ce problème mécanique sous l'angle probabiliste. Le travail présenté constitue une contribution en ce sens et aborde l'analyse de la stabilité des coques minces cylindriques sous pression externe avec imperfections géométriques aléatoires. Le problème mécanique fait appel à une résolution numérique par éléments finis et la probabilité de défaillance de la coque sous pression donnée est calculée à l'aide d'une méthode de simulation par subsets. Cette approche fiabiliste nécessite le choix d'un modèle stochastique pour la représentation du défaut. Pour ce faire, l'amplitude du défaut est décomposée en série de Fourier et les coefficients sont considérés comme variables aléatoires, les paramètres de ces variables étant identifiés à partir de données expérimentales.

Abstract :

Discrepancies observed in experimental buckling loads related to thin shells are mostly due to the random nature of the initial geometric imperfections. It is therefore necessary to consider this problem from a probabilistic point of view. This paper represents a contribution to this area and addresses the stability of cylindrical thin shells with random initial shape imperfections under an external given pressure. In order to solve this problem, a subset simulation method is applied based on numerical results obtained from a finite element model. This approach requires the choice of a stochastic model for representing the initial imperfections. A Fourier decomposition method has been used and the coefficients are considered as random variables whose parameters are identified from experimental data.

Mots-clefs :

Coques minces ; Méthode Asymptotique Numérique ; Simulation par subsets

1 Introduction

Les grandes dispersions sur les charges critiques de flambement obtenues expérimentalement ont, depuis de nombreuses années déjà, conduit chercheurs et ingénieurs à considérer explicitement les imperfections des coques dans le calcul de ces charges. Le caractère aléatoire de ce phénomène a également conduit de nombreux auteurs à orienter leurs travaux vers des approches prenant en compte une description probabiliste de ces imperfections. Partant de mesures expérimentales sur des coques, Arbocz a été l'un des premiers à réaliser des études fiabilistes prenant en compte le caractère aléatoire des imperfections et basées sur une solution pseudo-analytique du problème de flambement. Ces travaux ont d'ailleurs conduit ce

même auteur à constituer une base de données regroupant des mesures sur des coques cylindriques imparfaites [Arbocz *et al.* (1995)]. Diverses approches probabilistes peuvent être recensées dans la littérature. Les travaux développés dans [Bourinet *et al.* (2001)] proposent une approche fiabiliste du problème de flambage des coques imparfaites et abordent le problème mécanique par une approche éléments finis (EF). Le défaut est un cumul d'au plus 2 modes considérés comme les plus critiques, les amplitudes affectées à ces modes étant modélisées par des variables aléatoires. Des approches probabilistes basées sur une représentation spectrale du champ du défaut ont également été menées par Schenk *et al.* (2005), avec comme objectif de déterminer un histogramme des pressions critiques. Une étude similaire a été menée plus récemment par Papadopoulos *et al.* (2005), basée elle aussi sur une représentation spectrale du défaut et s'appuyant sur une méthode aux éléments finis stochastiques.

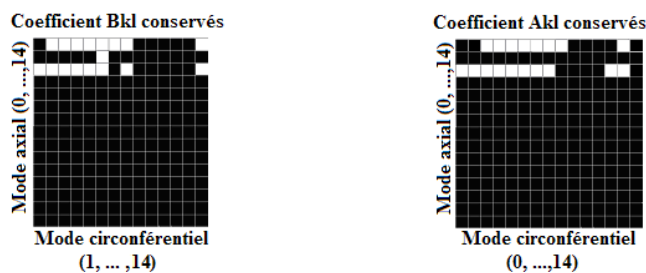
Les travaux proposés reprennent l'idée d'Arbocz qui consiste à développer l'amplitude de l'imperfection en série de Fourier à coefficients variables aléatoires. Les paramètres de ces variables aléatoires sont identifiés à partir de la base de données précédemment citée [Arbocz *et al.* (1999)]. La démarche utilisée s'appuie sur une méthode de simulation par subsets [Au *et al.* (2001)] couplée à une résolution numérique par éléments finis du problème de flambement, basée sur la méthode asymptotique numérique par éléments finis et mise en œuvre au sein du code EVE [Baguet (2001)]. Elle est techniquement possible grâce aux performances réunies de ces deux méthodes.

2 Modèle stochastique pour les imperfections

La modélisation stochastique des imperfections initiales est réalisée par analyse statistique de mesures des défauts relevées sur un échantillon significatif de structures réelles. Les paramètres du modèle étudié ont été identifiés à partir des mesures d'imperfections de coques réalisées par Arbocz *et al.* (1999). Une analyse harmonique de l'amplitude radiale de l'imperfection permet d'approcher cette dernière par le développement en série de Fourier tronqué suivant :

$$w(x, \theta) = t \sum_{i=0}^{14} A_{i0} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) + t \sum_{j=0}^{14} \sum_{k=1}^{14} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) (A_{jk} \cos(k\theta) + B_{jk} \sin(k\theta))$$

où w désigne l'imperfection suivant l'axe radial du cylindre, (x, θ) sont les coordonnées axiale et circonférentielle du point considéré, t est l'épaisseur du cylindre, L sa longueur et A_{il} , B_{kl} , $i \in [0, \dots, 14]$, $l \in [0, \dots, 14]$, $k \in [1, \dots, 14]$ sont les 435 coefficients du développement de Fourier. Les 27 coques utilisées pour l'étude comportent toutes une découpe circulaire ou rectangulaire, 14 ont un rayon de 220 mm et 13 un rayon de 84 mm. Les découpes n'ont pas été prises en compte dans cette étude. Seules les données relatives aux 14 coques cylindriques de rayon 220 mm ont été exploitées. Ces coques ont une épaisseur de 0.5 mm et une longueur de 1000 mm. L'étude statistique a donc été réalisée sur un échantillon comportant 14 réalisations de chacun des 435 coefficients de Fourier décrivant les défauts. Une sélection a été opérée parmi ces coefficients et au final, seuls 35 ont été conservés : les 35 ayant les plus grandes moyennes (en valeur absolue) pondérées additivement par 2 écarts-types (Figure 1).

FIG. 1 – Coefficients A_{il} et B_{kl} conservés.

Un test de Kolmogorov à 5% a conduit à retenir l'hypothèse de normalité pour ces 35 variables aléatoires (v.a.). Tout comme leurs moyennes, la matrice de corrélation de ces v.a. a été estimée statistiquement. Pour les couples de v.a. dont le coefficient de corrélation était, en valeur absolue, supérieur à $\sqrt{3}/2$ (i.e. $\cos(\pi/6)$), il a été considéré que ces variables étaient liées linéairement. Pour les autres, la corrélation a été considérée comme nulle et par suite les v.a. concernées supposées indépendantes. Au final, 14 relations linéaires ont été déterminées et 21 coefficients de Fourier aléatoires retenus pour modéliser la distribution du défaut.

3 Modèle mécanique EF

Le modèle mécanique utilisé permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques et s'appuie sur une méthode originale et performante : la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). L'idée consiste à ramener le problème non linéaire de départ à une suite de problèmes linéaires, les inconnues de base étant exprimées sous forme polynomiale. Ce système de problèmes linéaires est ensuite résolu par une méthode aux éléments finis classique. Cette méthode est intégrée dans le code de calcul EVE développé au LMA de Marseille. La détermination de la pression critique de flambement est réalisée avec ce code. Les dimensions du cylindre étudié sont celles des 14 cylindres exploités dans l'étude statistique, à savoir un rayon de 220 mm, une épaisseur de 0.5 mm et une longueur de 1000 mm. Le modèle numérique est discrétisé en 1000 éléments finis de coque de type Büchter et Ramm, permettant de prendre en compte le cisaillement transverse et les grandes rotations. Les déplacements des nœuds appartenant aux deux extrémités du cylindre sont bloqués dans la direction radiale dans le repère local (conditions de type SS-3). Le matériau est considéré comme linéaire élastique (coque suffisamment mince), de module d'Young 53260 MPa et de coefficient de Poisson 0,3. Un algorithme de détection des points singuliers basé sur une perturbation en déplacement [Baguet (2001)] permet de déterminer la pression critique. Des travaux complémentaires ont été effectués sur le code EVE afin de prendre en compte les conditions aux limites dans le repère local et l'effet des forces suiveuses.

4 Calcul fiabiliste

Les calculs fiabilistes ont été menés à l'aide du code FERUM (Finite Element Reliability Using Matlab), initialement créé à l'Université de Berkeley et intégrant depuis de nouvelles fonctionnalités issues des travaux réalisés au LaMI. La mise en oeuvre pratique de calculs fiabilistes basés sur un modèle mécanique EF requiert une puissance de calcul importante. Pour cette raison, les calculs ont été effectués sur un cluster de 28 PC bi-processeurs, avec adaptation des algorithmes de fiabilité pour utiliser au mieux la distribution des calculs. La probabilité de défaillance P_f de la coque soumise à une pression donnée a été évaluée à l'aide d'une méthode de simulation par subsets [Au *et al.* (2001)]. L'idée de base de cette méthode est d'exprimer la

probabilité de défaillance P_f comme un produit de probabilités conditionnelles de valeurs plus élevées que celle qui est cherchée et dont l'évaluation nécessitera de ce fait un nombre de calculs beaucoup moins important. Le principe est décrit brièvement ci-après. Soit $F_m \subset \dots \subset F_2 \subset F_1$ m événements inclusivement ordonnés tels que, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $F_i = \{g_i(\xi) \leq 0\}$, où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est le vecteur n -dimensionnel des v.a. de base du problème, g_i est une fonction mesurable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et F_m - l'événement le plus improbable de la famille $\{F_1, \dots, F_m\}$, car $P(F_m) \leq P(F_{m-1}) \leq \dots \leq P(F_1)$ - est choisi pour coïncider avec l'événement de défaillance F du problème, i.e. $F_m = F$. On a : $F = \bigcap_{i=1}^m F_i$ et de la formule des probabilités conditionnelles il résulte que :

$$P_f = P(F_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(F_{i+1} | F_i)$$

La probabilité $P(F_1)$ - la plus grande de toutes les probabilités $P(F_i)$ - est calculée en utilisant une procédure de Monte-Carlo standard. Par exemple, avec la procédure la plus classique, elle s'obtient par :

$$P(F_1) = \text{IE} \left[\mathbf{1}_{D_1}(\xi) \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{D_1}(y^k)$$

où IE désigne l'espérance mathématique, D_1 est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n tel que : $D_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : g_1(y) \leq 0\}$, $\mathbf{1}_{D_1}$ est son indicatrice (telle que $\mathbf{1}_{D_1}(y) = 1$ si $y \in D_1$ et $\mathbf{1}_{D_1}(y) = 0$ si $y \notin D_1$) et $\{y^1, \dots, y^N\}$ est un N -échantillon de réalisations simulées du vecteur aléatoire ξ .

Quant aux probabilités conditionnelles $\{P(F_{i+1} | F_i); i=1, \dots, m-1\}$, elles sont estimées en utilisant une méthode basée sur un principe MCMC (Monte-Carlo Markov Chain) : l'algorithme de Metropolis-Hastings. Cet algorithme, qui repose sur la construction d'une chaîne de Markov ergodique dont la distribution invariante est adaptée au problème à résoudre, n'est pas détaillé ici et le lecteur intéressé est renvoyé aux références [Metropolis *et al.* (1953), Hastings (1970), Bartoli *et al.* (2001)] pour plus de détails.

On notera que, comme la probabilité $P(F_1)$, toutes les probabilités conditionnelles $P(F_{i+1} | F_i)$ sont beaucoup plus grandes que la probabilité cible $P(F)$.

5 Résultats

La pression critique de flambement du cylindre parfait a été déterminée numériquement et vaut 2900 Pa. Le mode de flambement obtenu pour la coque parfaite est le mode 6. Ce mode peut être différent pour la coque avec imperfection, suivant les réalisations des v.a. de base (cf. Figure 2).

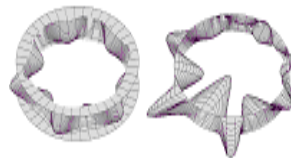


FIG. 2 – Déformées d'une coque cylindrique avec (droite) et sans défauts (gauche).

Pour l'étude fiabiliste, la probabilité de défaillance considérée est telle que :

$$P_f = P(g(\xi) \leq 0) ; g(\xi) = p(\xi) - p_0$$

où le vecteur aléatoire d'état ζ regroupe les 21 v.a. de base modélisant les imperfections, p est la pression critique fournie par EVE pour le cylindre sous pression externe avec imperfections initiales et p_0 est une pression critique de référence.

Le tableau 1 ci-dessous fournit les résultats obtenus pour 4 valeurs de la pression de référence : 1900, 1950, 2100 et 2200 Pa, ainsi que les résultats intermédiaires pour chaque pas de subsets. Les résultats sont fournis en termes de probabilité de défaillance (P_f) et d'indice de fiabilité généralisé (β).

	$p_0 = 2200$ Pa	$p_0 = 2100$ Pa	$p_0 = 1950$ Pa	$p_0 = 1900$ Pa
Nombre total de calcul	2000	6189	8369	10000
Nombre de pas de subsets	2	3	4	5
Probabilité pas 1 (Coeff. Var.)	1.10^{-1} (~ 9,5 %)	1.10^{-1} (~ 7 %)	1.10^{-1} (~ 6,7 %)	1.10^{-1} (~ 7 %)
Probabilité pas 2 (Coeff. Var.)	$2.04.10^{-1}$ (~ 10 %)	$9,95.10^{-2}$ (~ 11 %)	$9,95.10^{-2}$ (~ 10 %)	1.10^{-1} (~ 11 %)
Probabilité pas 3 (Coeff. Var.)		$4,64.10^{-1}$ (~ 5 %)	$9,96.10^{-2}$ (~ 13 %)	1.10^{-1} (~ 13 %)
Probabilité pas 4 (Coeff. Var.)			$1,83.10^{-1}$ (~ 10 %)	1.10^{-1} (~ 14 %)
Probabilité pas 5 (Coeff. Var.)				$9,78.10^{-1}$ (~ 0.9%)
Probabilité de défaillance P_f	$2,04.10^{-2}$	$4,62.10^{-3}$	$1,8182.10^{-4}$	$9,78.10^{-5}$
Coefficient de variation	~ 14 %	~ 14 %	~ 20 %	~ 22 %
β	2,05	2,60	3,57	3,72

TAB. 1 – Résultats des simulations par subsets.

Les performances réunies de la méthode EF (MAN) et de la procédure de simulation (subsets) utilisées pour cette application ont permis de mener à bien les calculs malgré la complexité du problème, et ce avec une efficacité d'autant plus grande que la probabilité cible est faible. Le modèle probabiliste des imperfections géométriques a été calé sur les données expérimentales. Une méthode de type FORM (First Order Reliability Method), qui généralement ne requiert qu'un faible nombre de calculs, a également été appliquée mais malheureusement sans succès ici (défaut de convergence), peut-être en raison du nombre important de v.a. de base.

6 Conclusion

A l'issue de cette étude, de nombreuses perspectives sont envisagées. Concernant la modélisation stochastique du défaut, un modèle par champs bornés et une représentation spectrale de type Karhunen-Loève tronquée seront testés. Il est également projeté de mener l'étude fiabiliste en se basant sur une nouvelle méthode combinant le principe des simulations par subsets et un remplacement des états limites intermédiaires par un séparateur SVM (Support Vector Machine). Cette méthode présente l'avantage de diminuer le nombre d'appels au modèle EF, et probablement de conduire à une réduction de la variance de l'estimation de P_f . Enfin, il est possible d'envisager l'application de cette étude à des structures plus complexes, sous réserve de disposer d'un nombre suffisant de données. L'originalité des travaux présentés réside dans la réalisation de calculs fiabilistes (et non de simples études de sensibilités) basés sur une méthode EF performante et précise appliquée à un problème 3D de type coque, et intégrant une description suffisamment générale de l'aléa sur l'amplitude de l'imperfection, avec un coût de calcul acceptable.

Références

- Au, S.K. & Beck, J.L. 2001 Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics* **16(4)**, 263-277
- Arbocz, J. & Hol, J.M.A.N. 1995 Collapse of axially compressed cylindrical Shells with random Imperfections. *Thin-Walled Structures* **23**, 131-158
- Arbocz, J. & Abramovich, H. 1999 The initial imperfection data bank at the Delft University of Technology – Part VI, Memorandum M-867, Delft University of Technology.
- Baguet, S. 2001 Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique. Thèse de doctorat, Université de Aix-Marseille II.
- Bourinet, J.M., Gayton, N., Lemaire, M. & Combescure, A. 2001 Plastic collapse of imperfect submarine pressure hulls: a probabilistic approach. ICOSAR 2001, USA. (ed. Corotis et al.). Swets & Zeitinger.
- Bartoli, N. & Del Moral, P. 2001 Simulation et algorithmes stochastiques. Cépaduès Editions.
- Hastings, W.K. 1970 Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika* **57**, 97-109
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H. & Teller, E. 1953 Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.* **21**, 1087-1092.
- Papadopoulos, V. & Papadrakakis, M. 2005 The effect of material and thickness variability on the buckling load of shells with random initial imperfections. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194**, 1405-1426.
- Schenk, C.A. & Schuëller, G.I 2005 Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems. Berlin New York, Springer.