

Modèles d'acoustique phénoménologiques -Application à la conception de matériau sur mesure-

Nicolas Auffray¹, Régis Bouchet¹ & Yves Bréchet²

¹ Onera-DMMP

BP72 - 29 avenue de la Division Leclerc FR-92322 CHATILLON CEDEX

² LTPCM/INPG

Domaine Universitaire de Grenoble
BP 75 38402 St. Martin d'Hères Cedex

Résumé :

Les modèles d'acoustique phénoménologique permettent, à partir de la description géométrique d'un matériau poreux, d'obtenir sa courbe d'absorption en fonction de la fréquence d'une onde le traversant. Faciles à programmer et à calculer, ces modèles permettent lors de la phase de conception d'une architecture poreuse d'accorder la structure aux exigences d'un cahier des charges. Nous présenterons une utilisation de ces modèles dans le cadre d'une approche Material-by-design.

Abstract :

Starting from the geometrical description of a porous media, phenomenological acoustic models allow us to obtain the absorption vs. frequency graph of a wave flowing through this porous media. The strength of those kind of models is that they are very easy to compute, so they are a powerful designing-tool to elaborate sound-absorptive architected media. Our aim here is to introduce that kind of model, and to place emphasis on how they could be used in a material-by-design approach.

Mots-clefs :

acoustique ; matériaux poreux ; material-by-design

1 Introduction

L'objectif de l'approche *material-by-design* consiste à utiliser les liens qui unissent les propriétés physiques des matériaux à leurs topologies, pour s'orienter dès la phase de pré-conception vers une architecture permettant au-dit matériau de maximiser son efficacité. L'acoustique des matériaux poreux est, à ce niveau, un excellent exemple des potentialités de cette approche. Par acoustique des matériaux poreux nous entendons les phénomènes dissipatifs qui prennent place au cœur de ces matériaux quand des ondes acoustiques viennent à les traverser. La problématique industrielle sous-jacente vise à la conception d'absorbeurs acoustiques destinés à réduire les émissions sonores des réacteurs d'avions, toutefois la démarche de conception initiée sur ce projet à une portée plus large qui touche à la conception *a-priori* d'absorbeurs acoustiques passifs. Comme illustré au cours de la thèse de Gasser (2003) si l'on maîtrise précisément l'architecture du réseau poreux périodique alors il nous est possible d'accorder notre matériau sur un spectre d'absorption choisi. Plusieurs approches ont été conduites au cours de son travail, nous nous concentrerons ici sur un modèle analytique de type Lafarge-Pride (LP par la suite). Les intérêts de ce modèle sont multiples, tout d'abord il est excessivement facile et rapide à mettre en oeuvre, les résultats prédits sont dans un bon rapport avec l'expérience et de plus il est assez aisé de dériver de son formalisme des outils qui peuvent être autant d'aide à la conception.

Dans un premier temps nous rappellerons quelques notions d'acoustique des matériaux poreux, ceci de manière à présenter le modèle de LP sur lequel nous allons travailler. Dans la partie suivante, nous nous intéresserons à la formulation inverse de notre problème, c'est-à-dire à la possibilité à partir d'une courbe d'absorption de remonter aux paramètres matériaux. Nous montrerons alors que ce problème, identifié comme mal posé, permet pour une courbe donnée d'obtenir un fuseau de matériaux y correspondant ; loin d'être problématique ce fait nous permet de déterminer les équations de matériaux équivalents au sens de l'acoustique. Cette propriété est d'une grande utilité pratique en conception car elle identifie des couples de paramètres sur lesquels on peut jouer pour optimiser un matériau vis-à-vis de contraintes extérieures.

2 Acoustique des matériaux poreux

L'ensemble des modèles d'acoustique phénoménologiques est dérivé en substituant au comportement local un comportement global moyenné sur la structure. On passe ainsi d'une intégration des équations de Navier-Stokes, qui tiendrait compte de la géométrie exacte de notre matériau poreux, à un modèle équivalent fonctionnant comme une loi entrée/sortie. L'idée est de moyenné sur le volume, quand le volume tend vers l'infini, nos équations locales viscothermiques en imposant que la forme des équations de comportement moyen est assimilable à celle d'un fluide parfait dont le nombre d'onde dépendrait de la fréquence.

2.1 Dérivation du modèle de Lafarge-Pride

Au niveau local, en régime harmonique et sous les hypothèses des petites perturbations d'une part, et de l'incompressibilité locale d'autre part, notre problème est décrit par le système d'équations (Voir [Johnson et al. \(1987\)](#) pour tous les détails de la dérivation) :

$$\rho_0 i \omega \underline{u} = -\nabla p + \mu \Delta \underline{u} \quad (1)$$

$$0 = \frac{1}{P_0} i \omega p - \frac{1}{T_0} i \omega \tau \quad (2)$$

$$\rho_0 C_p i \omega \tau = i \omega p + K \Delta \tau \quad (3)$$

complété des conditions aux limites suivantes au contact du squelette rigide et isotherme de notre matériau poreux :

$$\underline{u} = \underline{0} \quad (4)$$

$$\tau = 0 \quad (5)$$

Les variables \underline{u} , p , τ représentent respectivement les fluctuations des champs de vitesse, de pression et de température autour de leur valeur moyenne $\underline{0}$, P_0 , T_0 . Les autres coefficients sont : - ρ_0 la masse volumique de l'air ; - μ la viscosité dynamique de l'air ; - K le coefficient isotrope de conduction thermique ; - C_p la capacité calorifique massique. L'équation (1) est l'équation de la dynamique (Navier-Stokes incompressible), (2) dérive de la conservation de la masse tandis que (3) est l'équation de la thermique. Les conditions aux limites, quant à elles, traduisent le fait qu'au contact des parois de notre matériau la vitesse des particules de fluide s'annule (4) ainsi que, notre matériau étant considéré comme isotherme, la fluctuation de température du fluide au niveau des parois est nulle (5). En moyennant les champs locaux sur le volume du matériau on met les champs moyens sous la forme d'un fluide non dissipatif, c'est-à-dire tel que :

$$\Delta \langle p \rangle + \frac{\omega^2}{c_{eff}} \langle p \rangle = 0 \quad (6)$$

où

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\omega} \iiint_{\omega} p dV \quad (7)$$

avec

$$c_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\rho_{eff} \chi_{eff}}} \quad (8)$$

avec

$$\rho_{eff} = \rho_0 \alpha_{\infty} \left(1 - i \frac{8\mu}{\rho_0 \lambda^2} \frac{1-p+p\sqrt{1+\frac{C^2}{2p^2} \frac{\rho_0 \lambda^2}{8\mu} i\omega}}{C\omega} \right) \quad (9)$$

et

$$\chi_{eff} = \frac{1}{\gamma P_0} \left(\gamma - \frac{\gamma-1}{1 - i \frac{8\mu}{\rho_0 Pr \lambda^2} \frac{1-p'+p'\sqrt{1+\frac{C'^2}{2p'^2} \frac{\rho_0 \lambda'^2 Pr}{8\mu} i\omega}}{C'\omega}} \right) \quad (10)$$

ρ_{eff} , χ_{eff} et c_{eff} représentent respectivement la densité, la compressibilité et la célérité effective du milieu poreux. Les équations (9) et (10) sont particulièrement importantes car elles nous permettent de relier le comportement effectif du matériau à la géométrie de son architecture. Les paramètres de ces coefficients sont les suivants : - α_{∞} la tortuosité, c'est-à-dire le rapport entre la longueur parcourue par le fluide et la longueur du matériau ; - λ la longueur caractéristique visqueuse ; - C le facteur de formes des pores ; - p le facteur de variation de section des pores pour les phénomènes visqueux. λ , C' et p' sont leurs équivalents pour les phénomènes thermiques. Les coefficients μ et Pr sont, respectivement, la viscosité dynamique ainsi que le nombre de Prandtl du fluide sujet aux phénomènes acoustiques, dans notre cas il s'agira de l'air.

2.2 Modèle d'absorption acoustique pour un matériau poreux

La forme générale de l'équation de l'onde plane progressive unidimensionnelle solution de (6) est :

$$p = \langle p \rangle = e^{i\omega t} [Ae^{-ikx} + Be^{ikx}] \quad (11)$$

avec k le nombre d'onde. Son expression est

$$k = \frac{\omega}{c_{eff}} = \sqrt{\rho_{eff} \chi_{eff}} \omega \quad (12)$$

Le nombre d'onde associé à la propagation est un nombre complexe, ceci est caractéristique d'un phénomène dissipatif.

Considérons maintenant le cas de la figure 1 qui représente notre matériau poreux dans son environnement. Le milieu 1 est l'air, le milieu 2 le matériau et le 3 un miroir acoustique. L'impédance de l'air est notée Z_0 , celle du milieu poreux Z_{eff} , tandis que celle du miroir acoustique est supposée infinie. On a

$$Z_{eff} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\chi_{eff}}} \quad (13)$$

On introduit r le coefficient de réflexion en pression de l'onde acoustique, c'est-à-dire le rapport des pressions de l'onde réfléchie sur l'onde incidente :

$$r = \frac{H * Z_{eff} - Z_0}{H * Z_{eff} + Z_0} \quad (14)$$

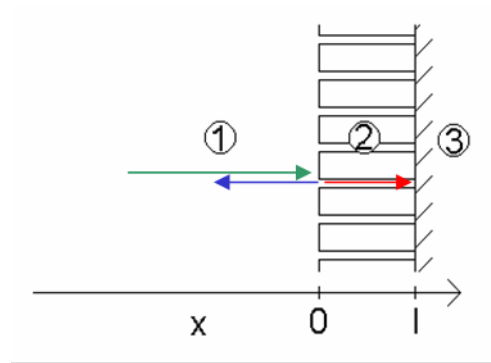


FIG. 1 – Schéma d'un matériau poreux en fonctionnement (voir le texte pour plus d'explication)

où H est la fonction de transfert qui permet de tenir compte du parcours de l'onde dans le matériau poreux. H s'exprime

$$H = \frac{1 + e^{-2i\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}\omega L}}}{1 - e^{-2i\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}\omega L}}} \quad (15)$$

et, si l'on passe en énergie, on obtient la dissipation créée par le matériau.

$$\text{Abs}(f) = 1 - |r(f)|^2 \quad (16)$$

3 Utilisation du modèle de Lafarge-Pride

La programmation du modèle précédent dans un logiciel du type Matlab est triviale. Regardons maintenant des exemples d'outils que l'on peut dériver de cette approche. Nous nous intéresserons à la classe des problèmes inverses. Par problème inverse nous entendons le fait de remonter au jeu de paramètres du modèle connaissant la courbe d'absorption. L'idée initiale est d'identifier les paramètres matériaux d'un échantillon en minimisant le nombre de manipulations expérimentales. Pour que cela soit possible il faut que pour une courbe donnée il existe un jeu de paramètres unique. Nous allons montrer que cela n'est pas le cas, et que nous pouvons dériver des propriétés intéressantes de cette constatation.

3.1 Existence de solutions multiples

On considère que le problème direct est défini par la donnée d'un vecteur de paramètre matériau de la forme suivante :

$$\underline{V} = \{L, \alpha_\infty, \phi, \lambda, \lambda', C, C', p, p'\} \quad (17)$$

L'image de ce vecteur par une application ϕ est une fonction Abs de \mathbb{R}^+ dans $[0; 1]$ qui à une fréquence associe un niveau d'absorption. Le problème inverse dans le cas idéal consiste alors à se demander si connaissant une fonction Abs particulière on peut remonter à \underline{V} . Le problème inverse dans le cas réel est plus complexe car on ne connaît plus la fonction Abs mais une approximation de cette fonction que l'on considère pour une fenêtre finie de fréquences. Le problème idéal traite de la nature intrinsèquement bien posé ou non du problème, le problème réel considère en plus la sensibilité de ce problème. Nous considérerons ici uniquement le cas idéal. Un problème est dit bien posé au sens d'Hadamard si trois conditions sont réunies : - que la solution existe ; - que cette solution soit unique ; - que la solution dépende de façon continue des données. On a procédé à la

minimisation d'une courbe générée par le modèle de LP par lui-même via un algorithme de Levenberg-Marquardt. Le problème de l'existence d'une solution est, de fait, automatiquement réglé. Nous ne vérifierons pas le troisième point. Le résultat de cette étude montre l'existence d'une infinité de famille de solutions liées. La raison en est la suivante, nous pouvons récrire les paramètres du modèle de la manière suivante

$$Z_{eff} = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi} \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\alpha_\infty \chi_{eff}}} \quad H = \frac{1 + e^{-2i\sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\alpha_\infty} \chi_{eff} \omega \sqrt{\alpha_\infty} L}}}{1 - e^{-2i\sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\alpha_\infty} \chi_{eff} \omega \sqrt{\alpha_\infty} L}}} \quad (18)$$

on pose alors

$$q = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi}, t = \sqrt{\alpha_\infty} L \quad (19)$$

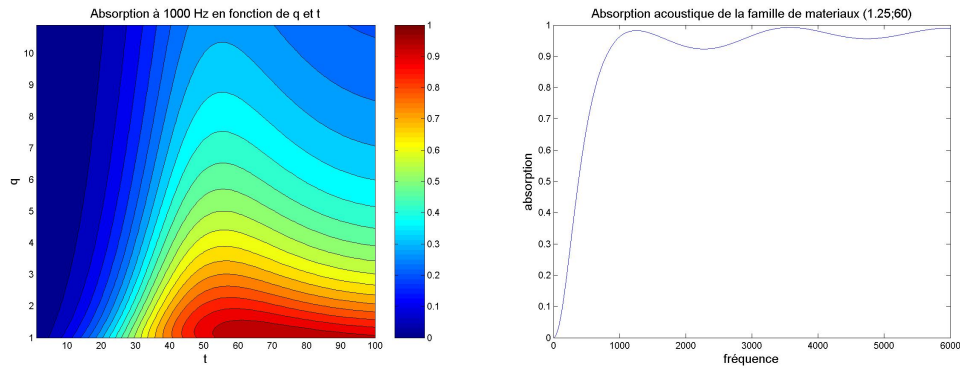
De fait pour un jeu de paramètres $\{q, t, \lambda, \lambda', C, C', p, p'\}$ donné on a, quelque soit L , la famille de jeu de paramètres

$$\underline{V}_{q,t} = \left\{ L, \left(\frac{t}{L} \right)^2, \frac{t}{q} \frac{1}{L}, \lambda, \lambda', C, C', p, p' \right\} \quad (20)$$

qui conduit à des courbes d'absorption identiques. La raison est que cette vision « globale » du problème mélange deux échelles d'observation du matériau. Le vecteur \underline{V} contient en effet des paramètres intrinsèques au réseau poreux $\{\alpha_\infty, \lambda, \lambda', C, C', p, p'\}$ ainsi que des paramètres macroscopiques $\{L, \phi\}$. L'interprétation physique des coefficients q et t va dans ce sens. On a $t = \sqrt{\alpha_\infty} L = L'$ qui est la longueur effective du réseau, le seul paramètre de longueur vu par l'onde. Ainsi que $q = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi}$ qui correspond à la limite haute fréquence du rapport $\frac{Z_{eff}}{Z_0}$ et qui est une constante d'architecture du milieu poreux.

3.2 Conséquences

Deux conséquences importantes découlent de cette étude. Tout d'abord si l'on caractérise le comportement d'un matériau au tube à impédance la simple mise en oeuvre d'une méthode inverse pour remonter aux caractéristiques du milieu est insuffisante, d'autres mesures physiques seront nécessaire pour cela. Le deuxième point est toutefois positif, car on a pour une courbe d'absorption donnée une famille de matériau y conduisant, et de plus on connaît les relations qui lient les paramètres macroscopiques au sein de cette famille. Cela peut permettre en phase de conception si on a, par exemple, une contrainte de longueur limite sur le dispositif acoustique de jouer sur les autres paramètres pour obtenir un matériau acoustique adapté. Dans cette optique il devient plus astucieux, lors de phase de recherche de solutions, de travailler à partir du couple $\{q, t\}$ qu'à partir de $\{L, \alpha_\infty, \phi\}$. Le candidat identifié, les formules (19) permettent de trouver la mise en oeuvre macroscopique la plus adaptée du matériau. Considérons un exemple. On prend comme paramètres intrinsèques $\lambda = \lambda' = 0,1$ mm et $C = C' = p = p' = 1$ et on trace, pour ce jeu de paramètres, la carte des isovaleurs d'absorption à 1000Hz en fonction de $\{q, t\}$ (fig.2(a)). Désirant maximiser cette absorption on note que la famille des matériaux (1,25 ; 60) semble être une bonne candidate. La courbe absorption-fréquence de cette famille, présentée sur la figure 2(b), confirme cela. Si l'on recherche maintenant, par exemple, la solution qui minimise la tortuosité, on abouti au trio de paramètres macroscopiques : $L = 60$ mm ; $\alpha_\infty = 1$; $\phi = 80\%$.



(a) Carte d'iso-absorption dans l'espace des familles de courbes (b) Courbe d'absorption de la famille (1.25;60)

FIG. 2 – Sélection d'une famille de matériau maximisant l'absorption acoustique à 1000Hz

4 Conclusion

Après avoir réintroduit les étapes qui conduisent à l'établissement des modèles d'acoustiques phénoménologiques, nous avons montré que le problème qui permet ensuite de passer de l'impédance de ce milieu poreux à sa courbe d'absorption contient des paramètres liés. A une courbe d'absorption donné correspond alors une famille de matériaux équivalent, le problème inverse est donc mal posé. Ce fait n'est pas problématique dans un contexte de conception car il nous permet de réaliser des cartes de choix dans l'espace des familles de solutions. Une fois une solution identifiée, on peut ensuite modifier les paramètres liés pour trouver la solution la mieux adaptée au cahier des charges.

Références

- Gasser, Stéphane. 2003 Étude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel. *Thèse INPG*.
- Johnson, D. L., Koplik, J., Dashen, R. 1987 Théorie of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *In Journal of Fluid Mechanic* vol 176 pp. 379-402.