

# Comparaison expérience/calcul par association de courbes

Jean-Michel LAGRANGE<sup>1</sup>, Roberto ARDON<sup>2</sup>, Nicolas VILLAIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CEA, Centre DAM Ile de France, BP 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France.

<sup>2</sup>Philips Medical Systems Research Paris, 51 rue Carnot BP 301, 92156 Suresnes Cedex, France  
jean-michel.lagrange@cea.fr, roberto.ardon@philips.com, nicolas.villain@philips.com

**Résumé** – Nous nous intéressons à une méthode de comparaison entre les résultats de calculs numériques et des vérités terrains qui nous sont présentés comme des courbes planes fermées. Nous réalisons une mise en correspondance des deux formes en nous fondant sur les distances entre leurs points. De cette mise en correspondance nous déduisons une mesure de l'écart entre les deux courbes. En définissant une fonction de coût sur l'espace produit des deux intervalles de paramétrages, nous introduisons une nouvelle méthode qui, à partir d'une initialisation convenable, fournit une bijection réalisant l'association des deux paramétrisations. Notre initialisation est obtenue en utilisant un chemin minimal (par rapport à la fonction de coût) et notre association est recherchée comme une somme de fonctions presque sûrement croissantes. Nous montrons une application de notre méthode pour la déformation de courbes.

**Abstract** – In this paper we present a new approach for matching two planar curves based on the distance between their points. By defining a cost function on the product space of the two parameterization intervals, we generate a one to one function that associates the two parameterizations. From this function we deduce a measure of the difference between the two curves. Our method is initialized by using a minimal path (with respect to the cost function) and our matching function is generated on a base of 'almost every where' increasing functions. Our matching can also be exploited for the deformation of curves.

## 1 Introduction

Les besoins actuels de validation des codes de calcul entraînent de vastes campagnes de comparaison entre les résultats de ces codes et des "vérités terrains". Chez Philips, nous développons des approches pour segmenter automatiquement des régions d'intérêt dans différentes modalités en imagerie médicale (organes, tumeurs, etc.) et nous souhaitons régler de façon robuste les paramètres de ces codes en comparant nos extractions avec des contours fournis par les médecins. Au CEA/DAM, cette même problématique apparaît lors de la confrontation entre des résultats expérimentaux référents (obtenus suite au dépouillement de radiographies X éclair d'objets en grande déformation) et leur restitution par des codes de calcul maison.

Dans les deux cas, les représentations mathématiques que nous manipulons sont des courbes que nous voulons comparer deux à deux de façon rapide, le résultat étant une mesure traduisant leur ressemblance. Ce problème a déjà été largement abordé par le passé. Younès et Bernard [1][2] ont proposé un cadre formel pour l'association optimale de courbes et sa résolution numérique. Cependant, cette dernière reste très lourde, coûteuse en temps de calcul et fournit une association non symétrique (fonction de la courbe choisie comme référence), pénalisante pour l'interprétation. Les travaux présentés dans [3], similaires à [6], fournissent une alternative très séduisante -car ne nécessitant pas d'échantillonnage des courbes- qui génère une correspondance via le calcul de chemins minimaux entre deux courbes utilisant un potentiel déduit de leur cartes de distances signées. Néanmoins, cette approche fournit elle aussi une association non symétrique et, en

pratique, des problèmes numériques apparaissent lorsque les courbes sont bruitées et très rapprochées. Dans [4], Frenkel et al. proposent un problème de calcul d'une association symétrique entre deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  basées sur un précalcul de toutes les distances entre chaque point de ces deux courbes (fournissant une carte de potentiels) et un calcul d'association rapide utilisant la technique du Fast Marching [5]. Pour leur besoin en reconnaissance de formes, leurs distances sont des différences de courbure qui sont incompatibles avec notre besoin de comparaison expérience/calcul du fait des invariances par translation et changement d'échelle et pour les difficultés d'estimation à partir de courbes très bruitées. De plus, **la solution du Fast Marching ne génère pas une association croissante** si bien que des croisements de points associés demeurent possibles (voir un exemple sur le graphe 3(e)) et rendent l'interprétation délicate.

Dans ce papier, nous proposons une approche inspirée par les travaux décrits dans [4] car nous désirons tirer parti de l'association issue du Fast Marching (un chemin minimal) qui demeure une initialisation procurant à la fois rapidité, qualité et robustesse. Dans la section 2, nous fournissons une expression d'une carte de potentiels adaptée à notre problème de comparaison expérience/calcul. Dans la section 3, nous imposons la bijectivité de l'association symétrique sous la forme d'une contrainte sur la dérivée de la fonction associant les deux courbes dans un espace de représentation adapté. La section 4 enfin fournit une solution simple et efficace au problème de la déformation d'une courbe  $\mathcal{C}_1$  vers une courbe  $\mathcal{C}_2$  basée sur l'association précédente.

Dans ce qui suit, nous détaillons le calcul de la fonction

associant deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  d'abscisses respectives  $s$  et  $S$  comprises dans l'intervalle  $[0, 1]$  et nous illustrons les résultats de nos algorithmes sur les données de la figure 3(a).

## 2 Initialisation de l'association : chemins minimaux

En reprenant l'idée donnée dans [4], nous calculons une carte de potentiel  $\psi(s, S)$  de  $[0, 1]^2$  dans  $[0, 1]$  de sorte que l'association  $\phi^{FM}$  soit un chemin minimal au sens du potentiel  $\psi$ . Par notre construction,  $\psi$  doit être proche de 1 pour les grands écarts de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , nul aux croisements des courbes et proche de 0 pour les petits écarts. En définissant  $d_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(s, S) = \|\mathcal{C}_1(s) - \mathcal{C}_2(S)\|^2$  la carte des distances entre  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , nous posons :

$$\psi(s, S) = 1 - e^{-\alpha \cdot d_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(s, S)}, \forall (s, S) \in [0, 1]^2 \quad (1)$$

Comme dans les problèmes d'autofocalisation,  $\alpha$  est un paramètre nous permettant de maximiser globalement le contraste et est pris solution du problème suivant :

$$\arg \max_{\alpha} \int_0^1 \int_0^1 \|\nabla \psi\|^2(u, v) dudv \quad (2)$$

Etant donnée la carte de potentiel  $\psi$ , la carte d'action  $U$  est calculée par Fast Marching et l'association  $\phi^{FM}$  est identifiée au chemin minimal sur le potentiel  $\psi$  obtenu par descente de gradient sur  $U$  à partir du point de coordonnées  $(1, 1)$ .  $\phi^{FM}$  est donc solution du problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \phi^{FM} = \arg \min_{\phi} \int_0^1 \psi(s, \phi(s)) ds = \arg \min_{\phi} E(\phi) \quad (3)$$

et il apparaît clairement que la fonction  $\phi^{FM}$  n'est pas nécessairement croissante pour tout  $s$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

## 3 Association bijective de courbes

En s'inspirant des travaux décrits dans [1][2], la croissance de la fonction  $\phi$  pourrait être obtenue en posant  $\phi' = e^h$  et en recherchant la fonction  $h$  minimisant :

$$H(h) = \int_0^1 \psi \left( s, \int_0^s e^{h(u)} du \right) ds \quad (4)$$

Par expérience [2], ce type de critère conduit à un résultat sous optimal (résultat de la descente de gradient  $\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla_h H$ ) et dont la résolution est très lourde.

Nous proposons ici une solution sous optimale en réduisant l'espace de recherche de la fonction  $\phi$  mais qui a l'intérêt d'avoir un faible coût calculatoire et d'intégrer la solution décrite dans la section 2 ( $\phi^{FM}$  minimum global de l'énergie  $E$  du problème (P)) comme solution initiale tout en assurant  $\phi' > 0$ . Nous écrivons  $\phi(s) = s + \sum_{k=0}^K a_k \cdot P_k(s)$  où  $K$  est un nombre de modes de déformations (très inférieur au nombre de points des courbes

$\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ ) et nous résolvons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}2) \quad \begin{cases} \arg \min_{\{a_k\}_{k \in \{0, \dots, K\}}} \int_0^1 \psi(s, s + \sum_{k=0}^K a_k \cdot P_k(s)) ds \\ \text{(Conditions)} \sum_{k=0}^K a_k \cdot P_k'(s) > -1, \forall s \in [0, 1] \end{cases} \quad (5)$$

De façon identique aux développements décrits dans le chapitre 8 de [7], les modes  $P_k$  sont construits par Analyse en Composantes Principales sur un jeu d'exemples de fonctions croissantes de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$  obtenues en intégrant un processus stochastique positif de façon très probable. Ainsi, pour des coefficients  $a_k$  proches de l'unité, la fonction  $\phi(s) = s + \sum_{k=0}^K a_k \cdot P_k(s)$  croît-elle presque sûrement, ce qui nous permet de résoudre le problème (P2) en réalisant un ICM sous contraintes sur les  $a_k$ .

Les figures 3(c) et 3(d) montrent un exemple de  $\phi$  croissante suite à une initialisation avec une projection de  $\phi^{FM}$  sur les  $P_k$ . La figure 3(g) illustre la non bijectivité de  $\phi^{FM}$  (présence de valeurs négatives pour la courbe en trait plein bleu donnant  $\frac{d\phi^{FM}}{ds}$ ) alors que notre solution (tracée en pointillé rouge) est telle que  $\phi' > 0$ . L'influence locale de la contrainte de positivité de la dérivée est nettement visible sur les figures 3(e) et 3(f).

La mesure d'écart entre les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  est finalement donnée par  $\int_0^1 d_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(s, \phi(s)) ds$ .

## 4 Application à la déformation de courbes

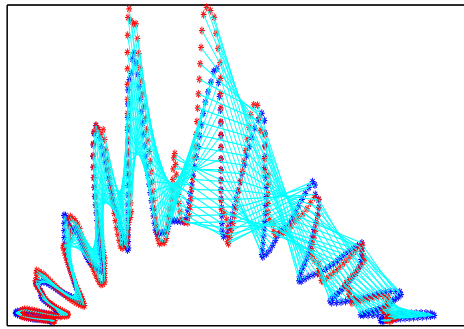
Outre la mesure obtenue à l'optimum du problème (P2), cette association  $\phi$  strictement croissante peut être utile pour calculer des chemins de déformation "harmonieux" entre  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . A partir de la nappe solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\Delta U = 0 \quad \text{avec } U(\mathcal{C}_1(s)) = s \\ \text{et } U(\mathcal{C}_2 \circ \phi(s)) = s, \forall s \in [0, 1] \quad (6)$$

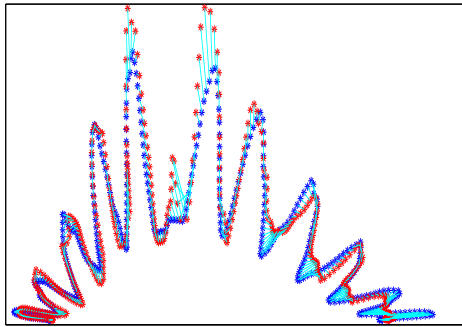
on peut générer des trajectoires  $l(s, t)$  (paramétrées par  $t$  et pour chaque paramètre  $s$ ) entre les points  $\mathcal{C}_1(s)$  et  $\mathcal{C}_2 \circ \phi(s)$  en recherchant les lignes de niveaux de  $U$ , c'est à dire les courbes vérifiant :  $\forall (s, t) \in [0, 1], U(l(s, t)) = s$ . Sur le problème donné par la figure 2(a) et grâce à l'association solution de (P2) illustrée sur la figure 2(b), nous obtenons un ensemble de trajectoires qui conduisent à la déformation données sur la figure 2(c).

## 5 Travaux futurs

Tout d'abord, nous travaillons sur une exploitation de la mesure des écarts  $\int_0^1 d_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(s, \phi(s)) ds$  entre un ensemble de "vérités terrain"  $\mathcal{C}_1$  et de restitutions ou de segmentations  $\mathcal{C}_2$ , le but étant de discriminer entre tel ou tel code de calcul et tel ou tel jeu de paramètres.



(a) association obtenue avec  $\phi = Id$



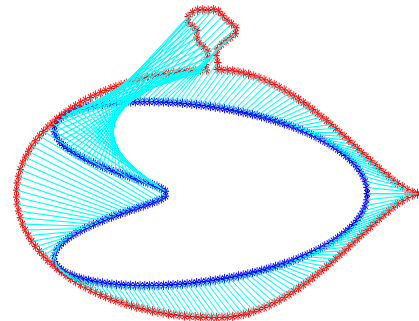
(b) association croissante

FIG. 1 – Association de deux courbes, la première en mettant en correspondance les points avec la même abscisse curviligne, l'autre en utilisant notre méthode.

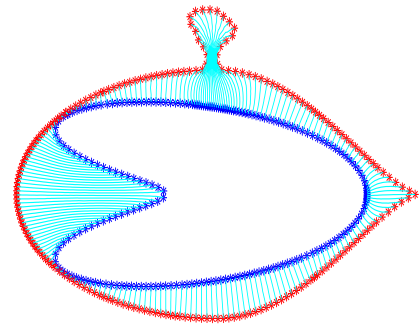
Dans le futur, nous aimerions nous attaquer au problème plus ardu de l'association de surface métrée, c'est-à-dire, à l'extension 3D de l'approche décrite dans cet article.

## Références

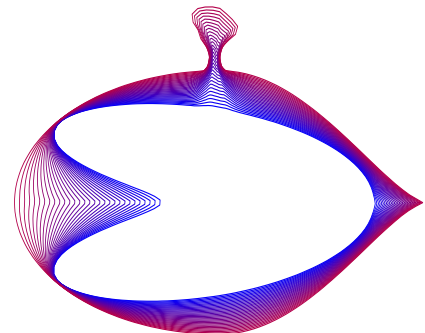
- [1] L. YOUNÈS, R. AZENCOTT, F. COLDEFI. A distance for elastic matching in object recognition. Proceedings of 12<sup>th</sup> ICPR, 1996. [1](#), [2](#)
- [2] M. BÉNARD. Comparaison élastique de courbes à l'aide de distances bâties sur des modèles stochastiques et déterministes. Thèse de doctorat de l'ENS Cachan soutenue le 29 Janvier 1997. [1](#), [2](#)
- [3] I. COHEN, I. HERLIN. Curves matching using geodesic paths. IEEE Conference on CVPR, pp. 741-746, 1998. [1](#)
- [4] M. FRENKEL, R. BASRI. Curves matching using the fast marching methods. EMMCVPR, pp. 35-51, 2003. [1](#), [2](#)
- [5] S. OSHER, J.A. SETHIAN. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. Journal of Computational Physics, vol 79, 12-49, 1988. [1](#)
- [6] R. ARDON, L.D. COHEN. Fast Constrained Surface Extraction by Minimal Paths. to appear in IJCV 2005. [1](#)
- [7] J. M. LAGRANGE. Reconstruction tomographique à partir d'un petit nombre de vues. Thèse de doctorat de l'ENS Cachan soutenue le 16 Décembre 1998. [2](#)



(a) exemple synthétique : élongation d'abscisse

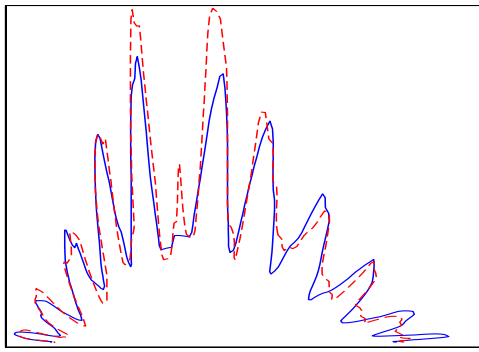


(b)  $\phi$  croissant et chemins d'associations.

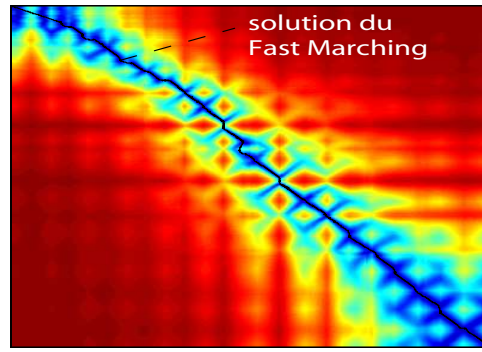


(c) exemple de déformation suivant les chemins déduit par la mise en correspondance.

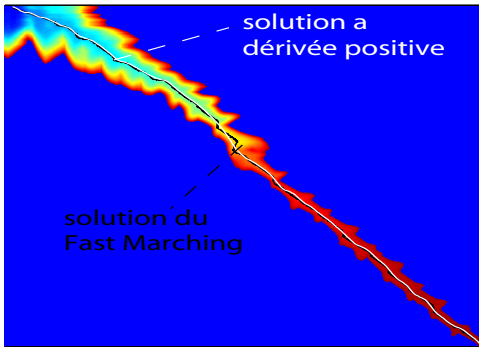
FIG. 2 – Association de deux courbes fermées, la première en mettant en correspondance les points avec la même abscisse curviligne, l'autre en utilisant notre méthode. Nous montrons aussi la déformation qui peut se déduire à partir de notre mise en correspondance.



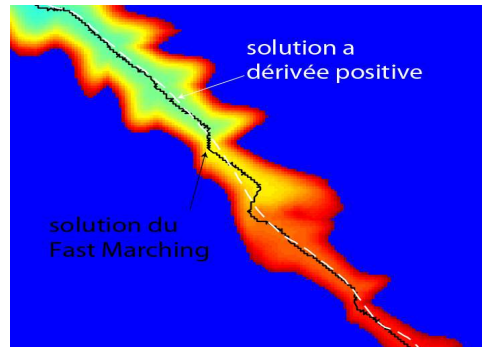
(a) Courbes  $C_1$  et  $C_2$  à associer



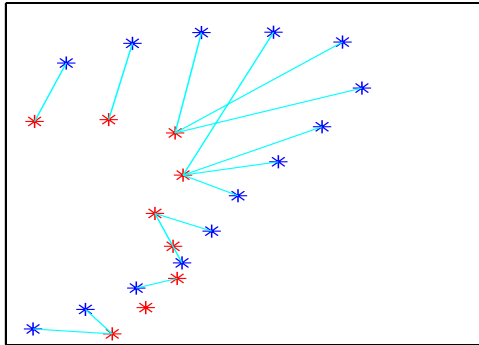
(b) Potentiel basé sur les distances.



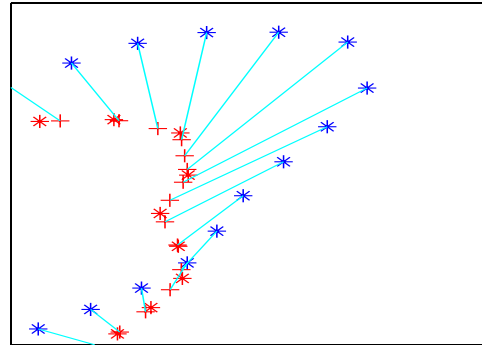
(c) Carte d'action  $U$ .



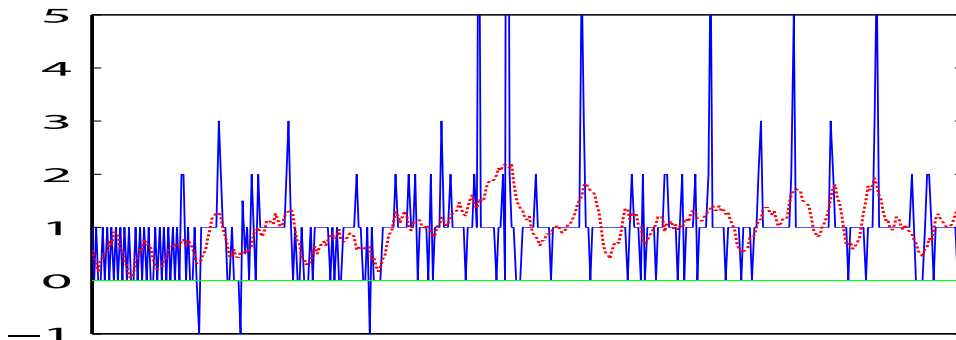
(d) Agrandissement montrant l'écart entre la solution du chemin minimal et la courbe reconstruite par notre méthode.



(e) Association  $\phi^{FM}$ , possibilité d'associations multiples et croisements.



(f) Association croissante générée par notre méthode.



(g) Dérivées de  $\phi^{FM}$  et de  $\phi$ , la première n'est pas strictement croissante.

FIG. 3 – Principales étapes du calcul de  $\phi$