Étude du bruit dans une analyse M-bandes en arbre dual

Caroline CHAUX[1], Laurent DUVAL[2], Jean-Christophe PESQUET[1]

[1] Institut Gaspard Monge et UMR-CNRS 8049
Université de Marne-la-Vallée, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée, France
Tel. : (+33) 1 60 95 77 39 – Fax : (+33) 1 60 95 72 14

[2]Institut Français du Pétrole
Direction Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées,
92500 Rueil Malmaison
Tel. : (+33) 1 47 52 61 02 – Fax : (+33) 1 47 52 70 12
{caroline.chaux,pesquet}@univ-mlv.fr, laurent.duval@ifp.fr

Résumé – Dans cet article, nous nous intéressons aux propriétés d'un bruit additif après une analyse en ondelettes M-bandes en arbre dual. Cette décomposition nous permet d'exprimer les liens régissant les coefficients du bruit dans les arbres primal et dual. La connaissance des propriétés statistiques du bruit s'avère en particulier utile à la conception de méthodes efficaces de débruitage spécifiques aux analyses en arbre dual. Notre contribution réside principalement dans le calcul des fonctions d'intercorrélation relatives à cette analyse pour différents types d'ondelettes M-bandes. Nous montrons en particulier que les paires de coefficients issus d'un bruit blanc, regardées point à point dans les décompositions primale et duale, sont décorrélées. Il existe cependant une corrélation significative dans un proche voisinage spatial dépendant du choix des ondelettes M-bandes.

Abstract – In this work, we study the properties of an additive noise undergoing a dual-tree M-band wavelet analysis. We express the relationships governing noise coefficients both in the primal and the dual tree. The knowlegde of the noise statistical properties is particularly useful for the design of efficient denoising methods in the framework of a dual-tree wavelet analysis. Our main contribution consists in the computation of the resulting cross-correlation functions for several M-band wavelet families. More specifically, we show that pairwise coefficients, from the primal and the dual-tree resulting from a white noise decomposition, are uncorrelated. Yet, there exists a significant local correlation, whose extent depends on the choice of the wavelet pair.

1 Introduction

La décomposition sur une base d'ondelettes discrètes est une méthode standard d'analyse et de débruitage d'image [1]. Cependant, les effets de non-invariance par translation (en anglais *shift-variance*) des coefficients, dus aux opérateurs de sous-échantillonnage, conduisent bien souvent à préférer des décompositions non-décimées, formant des trames très redondantes. Ces dernières améliorent notablement les performances de débruitage, mais restent coûteuses et surtout ne répondent pas toujours bien aux besoins d'analyse directionnelle des images.

Une analyse en ondelettes en arbre dual correspond à une décomposition des signaux sur une trame de redondance 2. Elle offre un excellent compromis entre le coût de calcul, une quasi-invariance par translation, une bonne robustesse aux bruits et la possibilité d'analyser des images dans plusieurs directions.

Elle repose sur le traitement des signaux par deux bancs de filtres hiérarchiques classiques, opérant en parallèle. Le second banc de filtres est appelé 'dual' du premier, dit 'primal'. Il est choisi de telle sorte que les ondelettes générées par les bancs primal et dual forment des paires de Hilbert. Le gain obtenu par l'usage de paire de Hilbert a été reconnu depuis [2].

La construction d'analyses en arbre dual a été initialement développée par N. Kingsbury [3] puis formalisée par I. Selesnick [4], dans le cas particulier des ondelettes dyadiques. Nous avons récemment généralisé [5, 6] cette notion d'analyse en paires de Hilbert pour les ondelettes M-bandes, avec $M > 2$. Ces travaux ont précisé l'expression des retards induits dans le banc dual, le préfiltrage requis sur les signaux discrets avant chaque décomposition, ainsi qu'une expression optimale de la reconstruction [6]. Les décompositions M-bandes ainsi obtenues, pour $M > 2$, permettent des décompositions plus précises en fréquence que dans le cas dyadique, ainsi qu'une meilleure sélectivité directionnelle. La liberté de choix accrue dans les filtres M-bandes permet enfin d'utiliser des ondelettes à la fois symétriques et orthogonales.

Dans cet article, nous étudions les propriétés d'un bruit additif après une décomposition par un arbre dual M-bandes. Nous rappelons tout d'abord les propriétés d'une telle analyse. Le débruitage par seuillage peut être ensuite appliqué de façon indépendante sur les deux arbres, ou en appariant les coefficients analogues sous forme de nombre complexe. Cependant, afin de mieux comprendre le comportement d'un bruit stationnaire après décomposition, nous calculons les différentes intercorrélations en une et deux dimensions. Nous produisons des expressions explicites pour quelques familles d'ondelettes M-bandes, ainsi que les résultats numériques correspondants.

Nous retrouvons le résultat selon lequel les paires de coefficients primal et dual d'un bruit blanc sont à composantes décorrélées, mais montrons qu'il existe entre elles une corrélation à court terme dont l'étendue dépend des ondelettes considérées.

2 Analyse en ondelettes M-bandes en arbre dual

Une décomposition en ondelettes en arbre dual est bâtie à partir d'une base d'ondelettes associée à une analyse multirésolution de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Dans le cas M-bandes, on dispose ainsi d'une fonction ψ_0 et de $M-1 \in \mathbb{N}^*$ ondelettes mères ψ_m où $m \in \{1,\ldots,M-1\}$, servant à réaliser l'analyse multirésolution classique. Ces fonctions que nous supposerons à valeurs réelles permettent de mettre en œuvre la décomposition multi-échelles en "arbre primal". L'analyse duale se déduit à partir d'une fonction d'échelle ψ_0^{H} et de $M-1$ ondelettes mères $\psi_m^{\mathrm{H}}, m \in \{1,\ldots,M-1\}$. Les ondelettes mères duales sont obtenues par transformée de Hilbert des ondelettes "originales", ce qui s'exprime, dans le domaine de Fourier, par :

$$\forall m \in \{1,\ldots,M-1\}, \qquad \widehat{\psi}_m^{\mathrm{H}}(\omega) = -\imath\,\mathrm{sign}(\omega)\widehat{\psi}_m(\omega), \tag{1}$$

où sign est la fonction signe et $\widehat{s}$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction s. La combinaison de la base primale et de la base duale conduit à une trame d'ondelettes présentant de nombreux avantages en termes d'analyse de signaux et images. Dans nos travaux antérieurs [6], nous avons étudié la construction des ondelettes duales, dans le cas orthogonal, et nous avons montré que la fonction d'échelle duale est liée à la fonction d'échelle primale ψ_0 par la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[,\qquad \widehat{\psi}_0^{\mathrm{H}}(\omega) = (-1)^k e^{-\imath(d+\frac{1}{2})\omega}\ \widehat{\psi}_0(\omega) \tag{2}$$

où d est un retard pouvant être choisi arbitrairement dans $\mathbb{Z}$. L'extension au cas 2D de ces décompositions peut s'effectuer de la même façon que pour les bases d'ondelettes classiques, par simple produit tensoriel.

3 Étude statistique du bruit

Dans cette partie, on considère tout d'abord l'analyse d'un bruit b monodimensionnel supposé réel stationnaire et centré, de fonction d'autocovariance γ_b, puis on étend cette étude au cas bidimensionnel.

3.1 Calcul des fonctions d'intercorrélation dans le cas 1D

On note $(b_{j,m}[k])_k$ les coefficients résultant d'une décomposition en ondelettes 1D M-bandes du bruit, dans une sous-bande donnée (j,m) où $j \in \mathbb{Z}$ et $m \in \{0,\ldots,M-1\}$. Les coefficients d'ondelettes issus de la décomposition duale sont notés $(b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k])_k$. On montre que, pour tout $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathsf{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k']\} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_b(x)\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}\left(\frac{x}{M^j} + k' - k\right) dx \tag{3}$$

où les intercorrélations déterministes des ondelettes sont définies par

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_m^{\mathrm{H}}(x-\tau)\,dx. \tag{4}$$

Une expression similaire existe pour

$$\mathsf{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}[k']\} = \mathsf{E}\{b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k]b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k']\} \tag{5}$$

en remplaçant $\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}$ par l'autocorrélation γ_{ψ_m} de la fonction ψ_m.

Dans la suite, nous nous intéressons au cas d'un bruit blanc : $\gamma_b(x) = \sigma^2\ \delta(x)$, δ désignant la distribution de Dirac. Si les bases d'ondelettes employées sont orthonormales, les suites de coefficients $(b_{j,m}[k])_k$ (resp. $(b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k])_k$) sont blanches, centrées, de variance σ^2 et l'on peut facilement déduire que

$$\mathsf{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k']\} = \sigma^2\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(k'-k)\,. \tag{6}$$

La détermination de l'intercovariance nécessite le calcul de la fonction $\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}$. Deux situations doivent être distinguées suivant que $m \neq 0$ ou $m = 0$.

- Pour tout $m \neq 0$, la densité interspectrale d'énergie de ψ_m et ψ_m^{H} est égale à

  $$\widehat{\gamma}_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(\omega) = \imath\,\mathrm{sign}(\omega)|\widehat{\psi}_m(\omega)|^2 \tag{7}$$

  ce qui conduit à :

  $$\begin{aligned}\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(\tau) &= \frac{\imath}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(\omega)\ |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2\ \exp(\imath\omega\tau)d\omega \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2\ \sin(\omega\tau)\,d\omega.\end{aligned} \tag{8}$$

  En particulier, on peut remarquer que, pour $m \neq 0$,

  $$\mathsf{E}\{b_{j,m}[k]b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k]\} = \sigma^2\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(0) = 0. \tag{9}$$

  On arrive à la conclusion que, pour $m \neq 0$, le vecteur $(b_{j,m}[k] \quad b_{j,m}^{\mathrm{H}}[k])^T$ a des composantes décorrélées, de même variance.
- Pour $m = 0$, après quelques calculs, on arrive à l'expression de l'intercorrélation suivante :

  $$\gamma_{\psi_0,\psi_0^{\mathrm{H}}}(\tau) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\widehat{\psi}_0(\omega)|^2\ \cos\left(\omega\ (\frac{1}{2}+\tau+d)\right)\,d\omega. \tag{10}$$

Notons que les fonctions d'intercorrélation obtenues possèdent des **propriétés de symétrie** intéressantes. En effet, pour tout $m \neq 0$, $\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}$ est une fonction impaire. De plus, $\gamma_{\psi_0,\psi_0^{\mathrm{H}}}$, vue comme une fonction de $\tau + d$, est symétrique par rapport à $-1/2$.

3.2 Calcul des fonctions d'intercorrélation dans le cas 2D

On considère ici l'analyse d'un bruit b bidimensionnel, toujours supposé réel stationnaire et centré, de fonction de covariance γ_b. De tels bruits apparaissent couramment dans les problèmes de débruitage d'images.

Nous allons procéder de façon similaire à la démarche suivie dans le paragraphe précédent. On note $(b_{j,m,m'}[k,l])_{k,l}$ les coefficients résultant d'une décomposition en ondelettes 2D M-bandes du bruit, dans une sous-bande donnée (j,m,m'). Les coefficients d'ondelettes issus de la décomposition duale sont notés $(b^{\mathrm{H}}_{j,m,m'}[k,l])_{k,l}$. On montre de la même façon que pour (3) que, pour tout $(k,l,k',l') \in \mathbb{Z}^4$,

$$\mathsf{E}\{b_{j,m,m'}[k,l]b^{\mathrm{H}}_{j,m,m'}[k',l']\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_b(x,y)\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}\Big(\frac{x}{M^j}+k'-k\Big) \gamma_{\psi_{m'},\psi^{\mathrm{H}}_{m'}}\Big(\frac{y}{M^j}+l'-l\Big)\,dxdy. \quad (11)$$

Dans le cas d'un bruit blanc bidimensionnel pour lequel $\gamma_b(x,y) = \sigma^2\,\delta(x)\delta(y)$, les coefficients $(b_{j,m,m'}[k,l])_{k,l}$ (resp. $(b^{\mathrm{H}}_{j,m,m'}[k,l])_{k,l}$) sont blancs, centrés, de variance σ^2. Par ailleurs, en utilisant l'expression ci-dessus, on peut facilement déduire que

$$\mathsf{E}\{b_{j,m,m'}[k,l]b^{\mathrm{H}}_{j,m,m'}[k',l']\} = \sigma^2\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(k'-k)\gamma_{\psi_{m'},\psi^{\mathrm{H}}_{m'}}(l'-l)\,. \quad (12)$$

Dans le cas particulier où $k=k'$ et $l=l'$, on arrive à la conclusion que, pour $m \neq 0$ ou $m' \neq 0$, le vecteur $(b_{j,m,m'}[k,l] \quad b^{\mathrm{H}}_{j,m,m'}[k,l])^T$ a des composantes décorélées.

De façon à pouvoir évaluer l'impact du choix de l'ondelette, nous allons maintenant préciser les expressions de ces intercorrélations pour différentes familles d'ondelettes, dans le cas de la décomposition d'un bruit blanc.

4 Exemples de familles d'ondelettes

4.1 Ondelettes de Shannon M-bandes

Les ondelettes de Shannon M-bandes correspondent à une analyse idéalement sélective en fréquence. On a alors, pour tout $m \in \{0,\dots,M-1\}$,

$$\widehat{\psi}_m(\omega) = \mathbf{1}_{]-(m+1)\pi,-m\pi]\cup[m\pi,(m+1)\pi[}(\omega) \quad (13)$$

où $\mathbf{1}_S$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $S \subset \mathbb{R}$. En se restreignant au cas d'intérêt où $q \in \mathbb{Z}$, on obtient à l'aide de (8) et (10) :

$$\gamma_{\psi_0,\psi_0^{\mathrm{H}}}(q) = \frac{(-1)^{(d+q)}}{\pi(d+q+\frac{1}{2})}$$

$$\forall m \neq 0, \qquad \gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(q) = \begin{cases} (-1)^{(m+1)q}\frac{1-(-1)^q}{\pi q} & \text{si } q \neq 0 \\ 0 & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad (14)$$

On remarque que, quand q est pair, $\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(q) = 0$, pour $m \neq 0$.

4.2 Ondelettes de Meyer

Ces ondelettes [7] restent à bande limitée mais en ayant des bandes de transition plus douces. On a alors

$$\widehat{\psi}_0(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le |\omega| \le \pi(1-\epsilon) \\ \gamma\Big(\frac{|\omega|}{2\pi\epsilon} - \frac{1-\epsilon}{2\epsilon}\Big) & \text{si } \pi(1-\epsilon) \le |\omega| \le \pi(1+\epsilon) \\ 0 & \text{si } |\omega| \ge \pi(1+\epsilon) \end{cases} \quad (15)$$

où $0 < \epsilon \le 1/3$ et $\forall\,\theta \in [0,1]$, $\gamma(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}\nu(\theta))$ avec $\nu : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\nu(0) = 0$ et $\forall\,\theta \in [0,1]$, $\nu(1-\theta) = 1-\nu(\theta)$. Un choix usuel pour la fonction ν est : $\forall\,\theta \in [0,1]$, $\nu(\theta) = \theta^4(35 - 84\,\theta + 70\,\theta^2 - 20\,\theta^3)$.

En se limitant au cas dyadique, à partir de l'équation à 2 échelles $\sqrt{2}\widehat{\psi}_1(2\omega) = H_1(\omega)\,\widehat{\psi}_0(\omega)$ où $H_1(\omega)$ est le filtre passe-haut de l'analyse multirésolution [1], on peut déduire l'expression de $\widehat{\psi}_1$.

Après quelques calculs, on aboutit à : $\forall\, q \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{\psi_0,\psi_0^{\mathrm{H}}}(q) = \frac{(-1)^{d+q}\cos\big(\pi\epsilon(d+q+\frac{1}{2})\big)}{\pi(d+q+\frac{1}{2})} + 2(-1)^{d+q}\epsilon\int_0^1 \gamma^2(\theta)\,\sin\big(\pi\epsilon(1-2\theta)(d+q+\frac{1}{2})\big)\,d\theta \quad (16)$$

$$\gamma_{\psi_1,\psi_1^{\mathrm{H}}}(q) = \frac{\cos(2\pi\epsilon q) - (-1)^q\cos(\pi\epsilon q)}{\pi q} + 2(-1)^{q+1}\epsilon\int_0^1 \gamma^2(\theta)\,\sin(\pi\epsilon(1-2\theta)q)\,d\theta + 4\epsilon\int_0^1 \gamma^2(\theta)\sin(2\pi\epsilon(1-2\theta)q)d\theta. \quad (17)$$

On observe que ces deux quantités convergent simplement vers les expressions données par l'équation (14) pour $m \in \{0,1\}$, quand $\epsilon \to 0$.

4.3 Familles d'ondelettes issues de paquets d'ondelettes

4.3.1 Forme générale

On peut générer des familles d'ondelettes M-bandes à partir de décomposition en paquets d'ondelettes dyadiques correspondant à des analyses en sous-bandes égales. On est alors limité à des facteurs M en puissance de 2. Dans ce cas, les fonctions de base sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &2|\widehat{\psi}_{2m}(2\omega)|^2 = |H_0(\omega)|^2|\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \\ \text{et}\quad &2|\widehat{\psi}_{2m+1}(2\omega)|^2 = |H_1(\omega)|^2|\hat{\psi}_m(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

où H_0 et H_1 sont les filtres passe-bas et passe-haut de l'analyse multirésolution dyadique. On en déduit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} -\pi\gamma_{\psi_{2m+1},\psi^{\mathrm{H}}_{2m+1}}(q) = {} & \gamma_{h_1}[0]\int_0^\infty |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2\sin(2\omega q)d\omega \\ & + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{h_1}[k]\Big(\int_0^\infty |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2\sin((2q-k)\omega)d\omega \\ & + \int_0^\infty |\widehat{\psi}_m(\omega)|^2\sin((2q+k)\omega)d\omega\Big) \end{aligned} \quad (19)$$

où, pour tout $\ell \in \{0,1\}$, $(\gamma_{h_\ell}[k])_{k\in\mathbb{Z}}$ est l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle du filtre de réponse fréquentielle H_ℓ :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \gamma_{h_\ell}[k] = \sum_p h_\ell[p]h_\ell[p-k]. \quad (20)$$

Dans le cas où $m \neq 0$, étant donnée la définition (8), on peut réécrire l'expression (19) comme :

$$\gamma_{\psi_{2m+1},\psi^{\mathrm{H}}_{2m+1}}(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{h_1}[k]\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q-k). \quad (21)$$

TAB. 1 – Calcul des intercorrélations dans le cas 2-bandes ($d = 0$).

	$\gamma_{\psi_0,\psi_0^{\mathrm{H}}}$				$\gamma_{\psi_1,\psi_1^{\mathrm{H}}}$		
Ondelettes $\setminus$ q	0	1	2	3	1	2	3
Shannon	0.63662	-0.21221	0.12732	-9.0946×10^{-2}	0.63662	0	0.21221
Meyer $\epsilon = 1/10$	0.63622	-0.21100	0.12532	-8.8166×10^{-2}	0.63260	-4.7224×10^{-3}	0.20054
Meyer $\epsilon = 1/6$	0.63550	-0.20887	0.12184	-8.3418×10^{-2}	0.62555	-1.2581×10^{-2}	0.18177
Meyer $\epsilon = 1/3$	0.63216	-0.19916	0.10668	-6.4166×10^{-2}	0.59378	-4.1412×10^{-2}	0.11930
Haar	0.51288	-1.1338×10^{-2}	-1.0855×10^{-3}	-2.6379×10^{-4}	0.10816	5.6994×10^{-3}	1.5610×10^{-3}

TAB. 2 – Calcul des intercorrélations : extension au M-bandes ($d = 0$).

	$\gamma_{\psi_2,\psi_2^{\mathrm{H}}}$			$\gamma_{\psi_3,\psi_3^{\mathrm{H}}}$		
Ondelettes $\setminus$ q	1	2	3	1	2	3
Shannon 4-bandes	-0.63662	0	-0.21221	0.63662	0	0.21221
Hadamard 4-bandes	6.0560×10^{-2}	1.5848×10^{-3}	4.0782×10^{-4}	-4.9162×10^{-2}	-3.0109×10^{-4}	-3.4205×10^{-5}

De façon similaire, on a, pour tout $m \neq 0$,

$$\gamma_{\psi_{2m},\psi_{2m}^{\mathrm{H}}}(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{h_0}[k]\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q-k). \tag{22}$$

Les deux dernières relations fournissent des équations récursives pour le calcul des intercorrélations du bruit, connaissant $\gamma_{\psi_1,\psi_1^{\mathrm{H}}}$.

4.3.2 Un cas particulier : Walsh-Hadamard

A l'opposé des ondelettes de Shannon, ces ondelettes mettent l'accent sur la localisation spatiale. On a alors

$$\widehat{\psi}_0(\omega) = \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2})\, e^{-\imath \frac{w}{2}} \tag{23}$$

$$\widehat{\psi}_1(\omega) = \imath\, \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{4})\ \sin(\frac{\omega}{4})\, e^{-\imath \frac{w}{2}}. \tag{24}$$

Après des calculs un peu laborieux [8], on obtient pour tout $q \in \mathbb{N}$ (en adoptant la convention que $0\ln(0) = 0$) :

$$\begin{aligned}\pi\gamma_{\psi_1,\psi_1^{\mathrm{H}}}(q) &= 6\,q\ln(q) + (1+q)\ln(1+q) - (1-q)\ln|1-q| \\ &- 4\,(\frac{1}{2}+q)\ln(\frac{1}{2}+q) + 4\,(\frac{1}{2}-q)\ln|\frac{1}{2}-q|.\end{aligned} \tag{25}$$

On note que $\gamma_{\psi_1,\psi_1^{\mathrm{H}}}(q) \sim 1/(8\pi q^3)$ quand $q \to \infty$, ce qui représente une décroissance asymptotique plus rapide que celle des ondelettes de Shannon (14).
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\pi\gamma_{\psi_0,\psi_0^{\mathrm{H}}}(q) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{1}{2}\ S_k(3+2d+2q) - S_k(1+2d+2q) \\ + \frac{1}{2}\ S_k(-1+2d+2q)\Big)\end{aligned} \tag{26}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_k(x) = x\int_{k\pi x}^{(k+1)\pi x} \frac{\sin(u)}{u}\, du. \tag{27}$$

Le cas $M = 2$ correspond aux ondelettes de Haar. Pour $M = 2^p$ avec $p > 1$, les intercorrélations $\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}$, $m \in \{2, \dots, 2^p - 1\}$ peuvent être obtenues de manière récursive, à l'aide des équations (21) and (22). Dans le cas simple des ondelettes de Walsh-Hadamard, on a donc, pour tout $m \neq 0$,

$$\begin{aligned}\gamma_{\psi_{2m+1},\psi_{2m+1}^{\mathrm{H}}}(q) &= \gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q) \\ &- \frac{1}{2}\Big(\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q+1) + \gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q-1)\Big)\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\psi_{2m},\psi_{2m}^{\mathrm{H}}}(q) &= \gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q+1) + \gamma_{\psi_m,\psi_m^{\mathrm{H}}}(2q-1)\Big).\end{aligned} \tag{29}$$

5 Application numérique

Le tableau 1 ci-dessus montre que les intercovariances entre les coefficients du bruit de l'analyse en arbre dual peuvent prendre des valeurs significatives. On observe également que le choix de l'ondelette a une influence importante sur l'ampleur de ces corrélations. En effet, si les ondelettes de Meyer conduisent à des résultats proches de celle de Shannon, les corrélations sont moins fortes pour l'ondelette de Haar.
Dans le cas M-bandes, comme le montre le tableau 2, les valeurs des intercovariances dans le cas de Shannon restent significatives alors que dans le cas de Hadamard, elles deviennent rapidement proches de 0.

Références

[1] Stéphane Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Éditions de l'école Polytechnique, 2000.

[2] P. Abry and P. Flandrin. Multiresolution transient detection. In *Proc. Int. Symp. on Time-Freq. and Time-Scale Analysis*, pages 225–228, Philadelphia, USA, October 1994.

[3] N. G. Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *J. of Appl. and Comp. Harm. Analysis*, 10(3) :234–253, May 2001.

[4] I. W. Selesnick. Hilbert transform pairs of wavelet bases. *Signal Processing Letters*, 8(6) :170–173, Jun. 2001.

[5] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. Hilbert pairs of M-band orthonormal wavelet bases. In *Proc. Eur. Sig. and Image Proc. Conference*, pages 1187–1190, Vienna, Austria, September 6-10, 2004.

[6] C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. $2D$ dual-tree M-band wavelet decomposition. In *Proc. Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc.*, Philadelphia, USA, March 18-23, 2005.

[7] Y. Meyer. *Ondelettes. Ondelettes et opérateurs*. Tome 1, Hermann, Paris, 1990.

[8] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2000.