

Une procédure générale d'estimation efficace de paramètres multiples avec application en localisation

P. FORSTER et G. GINOLHAC

GEA, Univ. Paris X, PST Ville d'Avray, 1 ch. Desvallières 92410 Ville d'Avray

philippe.forster,guillaume.ginolhac@u-paris10.fr

Résumé – Nous présentons dans ce papier un cadre théorique pour affiner une estimation efficace de plusieurs paramètres en tenant compte des liens entre eux. La méthode proposée s'appuie sur un théorème généralisant l'"Extended Invariance Principle" (EXIP). Nous montrons que l'approche développée permet de résoudre analytiquement certains problèmes non linéaires. Nous appliquons enfin ce cadre théorique à un problème de localisation par un radar multistatique.

Abstract – This article deals with a general procedure for efficient estimation of multiple parameters. The proposed technique is based on an original theorem which is established in the paper. The resulting method allows in some non linear cases an efficient estimation without iterative procedures. This new approach is applied to localize a target and estimate its speed in multistatic radar.

1. Introduction

En traitement du signal, le problème d'estimation suivant est très courant. Une observation bruitée $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^N$ est reliée à un vecteur de paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{P_\theta}$ par la relation :

$$\mathbf{m} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbf{n},$$

où $P_\theta \leq N$, $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ est la fonction décrivant la dépendance entre les mesures non bruitées et le vecteur des paramètres, \mathbf{n} est un bruit additif supposé gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance connue $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{Q}_n$. Dans ce contexte, l'estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) est souvent retenu pour ses bonnes propriétés statistiques. En effet, cet estimateur est asymptotiquement efficace et Gaussien lorsque la puissance du bruit tend vers 0 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) \xrightarrow{a.d.} N(\mathbf{0}, \mathbf{F}_\theta^{-1}), \\ \sigma \longrightarrow 0 \end{cases},$$

où $N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ désigne la distribution gaussienne de moyenne nulle et de covariance \mathbf{V} , et \mathbf{F}_θ est la Matrice d'Information de Fisher (MIF). L'estimateur du MV $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$ de $\boldsymbol{\theta}_0$ s'obtient en minimisant la fonction suivante :

$$f(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{m} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{Q}_n^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})).$$

Excepté le cas où $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ est une fonction linéaire, il n'existe pas de solution explicite à la minimisation de $f(\boldsymbol{\theta})$ et l'on a souvent recours à un algorithme itératif (e.g. Gauss-Newton) nécessitant une initialisation *ad-hoc*. C'est pourquoi il serait intéressant de dériver des estimateurs efficaces qui contournent la procédure itérative pour éviter les difficultés de calcul associées au MV tout en gardant ses bonnes propriétés statistiques. Une première contribution de ce papier est un théorème fournissant un cadre général pour trouver de tels estimateurs, et une seconde contribution est d'appliquer ce théorème à un problème de localisation en radar multistatique. La méthode théorique proposée peut être vue comme une généralisation du *EXtended Invariance Principle* (EXIP) [1].

2. Résultat théorique

Le théorème suivant utilise deux paramétrisations. La première, dite *non contrainte*, est composée de plusieurs paramètres pouvant avoir des relations entre eux mais qui ne sont pas utilisées. La seconde paramétrisation, dite *contrainte*, est composée uniquement des paramètres n'ayant pas de lien entre eux. Le but du théorème est d'exploiter les résultats de l'estimation avec la paramétrisation *non contrainte* pour obtenir facilement une estimation efficace avec la seconde paramétrisation. Comme celle-ci utilise les liens des paramètres entre eux, le résultat de l'estimation sera bien entendu plus précis. Plus précisément, soit \mathbf{m} un vecteur Gaussien de matrice de covariance connue $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{Q}_n$ et de moyenne \mathbf{s} dépendant d'un ensemble de paramètres inconnus. Soit $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_{P_u})^T \in \mathbb{R}^{P_u}$ la première paramétrisation (dite *non contrainte*), notée Π_u , de la moyenne avec une valeur exacte notée \mathbf{u}_0 , et $\mathbf{v} = (v_1 \dots v_{P_v})^T \in \mathbb{R}^{P_v}$ une seconde (dite *contrainte*) notée Π_v (valeur exacte \mathbf{v}_0) qui est plus restrictive au sens où $P_v < P_u$. Soit $\mathbf{u}(\mathbf{v})$ les valeurs des paramètres de la première paramétrisation atteints par la seconde. Un calcul simple montre que les MIF correspondantes \mathbf{F}_u et \mathbf{F}_v pour $\sigma = 1$ ont pour expressions :

$$\mathbf{F}_u = (\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{s})_{\mathbf{u}_0}^T \mathbf{Q}_n^{-1} (\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{s})_{\mathbf{u}_0}, \quad (1)$$

$$\mathbf{F}_v = (\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u})_{\mathbf{v}_0}^T \mathbf{F}_u (\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u})_{\mathbf{v}_0}, \quad (2)$$

où $(\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{s})$ et $(\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u})$ sont les matrices des dérivées partielles $N \times P_u$ et $P_u \times P_v$ par rapport à \mathbf{u} et \mathbf{v} . Soit alors $\hat{\mathbf{u}}$ un estimateur efficace et asymptotiquement Gaussien non contraint de \mathbf{u}_0 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0) \xrightarrow{a.d.} N(\mathbf{0}, \mathbf{F}_u^{-1}), \\ \sigma \longrightarrow 0 \end{cases}, \quad (3)$$

et notons $\hat{\mathbf{F}}_u$ un estimateur consistant de la MIF (e.g. la MIF calculée avec les valeurs des paramètres estimés $\hat{\mathbf{u}}$ au

lieu de \mathbf{u}_0). Considérons maintenant une fonction $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de $\mathbb{R}^{P_u} \times \mathbb{R}^{P_v}$ vers \mathbb{R}^{P_u} , et notons :

$$\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g} = \left[\partial_{u_1} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \cdots \quad \partial_{u_{P_u}} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right]. \quad (4)$$

Théorème : La minimisation du critère $\tilde{C}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v})\|^2$ conduit à un estimateur consistant $\tilde{\mathbf{v}}$ de \mathbf{v}_0 . La minimisation du critère

$$C(\mathbf{v}) = (\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v}))^T \left((\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g})_{\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}}^{-T} \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}} (\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g})_{\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}}^{-1} \right) (\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v}))$$

(où $\tilde{\mathbf{v}}$ est un estimateur consistant de \mathbf{v}_0) conduit à un estimateur efficace et asymptotiquement Gaussien $\hat{\mathbf{v}}$ de \mathbf{v}_0 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0) \xrightarrow{a.d.} N(\mathbf{0}, \mathbf{F}_{\mathbf{v}}^{-1}) \\ \sigma \longrightarrow 0 \end{cases}$$

On notera $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}}$ la MIF estimée à partir de $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}}$:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}} = (\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}(\mathbf{v}))_{\hat{\mathbf{v}}}^T \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}} (\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}(\mathbf{v}))_{\hat{\mathbf{v}}}. \quad (5)$$

Démonstration : Considérons la fonction $F_{\mathbf{W}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v}))^T \mathbf{W} (\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v}))$ où \mathbf{W} est une matrice définie positive. Cette fonction atteint une valeur minimale pour $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$. Maintenant, il est facile de montrer que, pour $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$, le théorème des fonctions implicites appliqué au gradient de $F_{\mathbf{W}}$ fournit la relation suivante entre la valeur \mathbf{v} (qui minimise $F_{\mathbf{W}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$) et $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\Delta \mathbf{v} = (\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}^T \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g} \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u})^{-1} (\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}^T \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}) \Delta \mathbf{u} + o(\Delta \mathbf{u}) \quad (6)$$

où :

- $\Delta \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0$ et $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$;

- $\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ et $\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}$ sont évalués à \mathbf{v}_0 et $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$.

La consistance de \mathbf{v} se déduit immédiatement de l'expression (6) ; en particulier, la consistance de $\tilde{\mathbf{v}}$ affirmée dans le théorème correspond au choix $\mathbf{W} = \mathbf{I}$. De plus, nous pouvons écrire pour le terme $o(\Delta \mathbf{u})$ de l'équation (6) :

$$\left\| \frac{1}{\sigma} o(\Delta \mathbf{u}) \right\| = \left\| \frac{1}{\sigma} \Delta \mathbf{u} \right\| \frac{\|o(\Delta \mathbf{u})\|}{\|\Delta \mathbf{u}\|}.$$

Quand $\sigma \longrightarrow 0$ dans l'expression ci-dessus, $(1/\sigma) \Delta \mathbf{u}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire gaussien (hypothèse (3)) et $\frac{\|o(\Delta \mathbf{u})\|}{\|\Delta \mathbf{u}\|}$ converge en probabilité vers 0. Donc,

$\|(1/\sigma) o(\Delta \mathbf{u})\|$ converge en probabilité vers 0 et nous concluons d'après (6) que $(1/\sigma) \Delta \mathbf{v}$ est asymptotiquement gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\left(\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}^T \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g} \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \right)^{-1} \left(\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}^T \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g} \right) \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{-1} \left(\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g} \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \right) \left(\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}^T \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^T \mathbf{W} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g} \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u} \right)^{-1}.$$

Le choix $\mathbf{W}_{opt} = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^{-T} \mathbf{F}_{\mathbf{u}} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g}^{-1}$ conduit à la valeur $(\partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u}^T \mathbf{F}_{\mathbf{u}} \partial_{\mathbf{v}} \mathbf{u})^{-1}$ de la covariance asymptotique ci-dessus de $(1/\sigma) \Delta \mathbf{v}$: ceci est juste la borne de Cramer Rao comme le montre l'expression (2) de la MIF. Donc, la minimisation de $F_{\mathbf{W}_{opt}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ conduit à une estimation efficace et

asymptotiquement gaussienne de \mathbf{v}_0 . Finalement, nous pouvons remplacer \mathbf{W}_{opt} par n'importe quel estimé $\hat{\mathbf{W}}$ de \mathbf{W}_{opt} tel que $\hat{\mathbf{W}} = (\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g})_{\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}}^{-T} \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}} (\partial_{\mathbf{u}} \mathbf{g})_{\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}}^{-1}$ sans changer les conclusions : la fonction critère résultante $F_{\hat{\mathbf{W}}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ est juste le critère $C(\mathbf{v})$ du théorème.

L'originalité de ce théorème par rapport à la méthode EXIP [1] tient à l'introduction de la fonction \mathbf{g} dans le critère : en effet, la méthode EXIP minimise un critère du type $\|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2$ (dans une métrique appropriée). Notre théorème est particulièrement utile quand la fonction $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v})$ est linéaire par rapport à \mathbf{v} puisque les critères $\tilde{C}(\mathbf{v})$ et $C(\mathbf{v})$ peuvent être minimisés exactement dans ce cas. Par exemple, il est facile de montrer que l'estimateur asymptotiquement efficace développé par Chan [2] pour la localisation de sources (voir aussi [3-4] pour des applications de localisation de mobiles) est une conséquence directe de notre théorème. Dans notre article, nous en déduisons un algorithme original pour localiser une cible à l'aide d'un radar multistatique.

3. Application à la localisation

Le radar multistatique comporte N émetteurs, localisés en $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$ et un seul récepteur, localisé en $(0, 0)$. La cible est supposée se déplacer dans un plan. Ses coordonnées exactes sont notées (x_0, y_0) et ses coordonnées de vitesse (v_{x0}, v_{y0}) . Notre vecteur de mesures $\mathbf{m} = (\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_N \quad \delta_1 \quad \cdots \quad \delta_N)^T$ consiste à N distances de propagation entre le récepteur et les émetteurs $1, 2, \dots, N$, et N dérivés de la distance de propagation correspondantes obtenues par des mesures Doppler. Introduisons quelques notations :

$$r_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} \quad (1 \leq i \leq N) \quad \text{et}$$

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$d_i = \frac{v_{x0}(x_0 - x_i) + v_{y0}(y_0 - y_i)}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}} \quad (1 \leq i \leq N) \quad \text{et}$$

$$d = \frac{v_{x0} \cdot x_0 + v_{y0} \cdot y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Les expressions des mesures exactes (sans bruit) pour l'émetteur i sont :

$$\delta_i = r_i + r \quad \text{et} \quad \dot{\delta}_i = d_i + d$$

Nous supposons qu'un bruit Gaussien, centré, de matrice de covariance connue $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{Q}_n$ est ajouté aux mesures. La méthode développée ci-après peut être vue comme une application multiple de notre théorème. Dans les différentes étapes de la méthode, nous nous référons à \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{v}}$ en mettant un exposant (i) pour la paramétrisation i .

- étape 1 :

Paramétrisation $\Pi_{\mathbf{u}} : \mathbf{u}^{(1)}$ est égal au vecteur de mesures \mathbf{m} (vecteur de \mathbb{R}^{2N}). Sa MIF est $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}^{(1)}} = \mathbf{Q}^{-1}$. Le but est maintenant de trouver une relation linéaire entre les paramètres $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0})$ et $\mathbf{u}^{(1)}$ quitte à introduire de

nouveaux paramètres inconnus. Dans un autre contexte, Chan [2] fournit la méthode pour obtenir la relation suivante pour l'émetteur i :

$$u_i^{(1)2} - 2u_i^{(1)}.r = x_i^2 + y_i^2 - 2.x_0.x_i - 2.y_0.y_i . \quad (7)$$

On note que la première partie des mesures (distances de propagation) et certains paramètres exacts (x_0, y_0) sont liés par une relation linéaire si nous considérons r comme un paramètre inconnu. Pour les mesures des dérivées de la distance de propagation, nous avons la relation suivante :

$$r_i.d_i - r.d = -v_{x0}.x_i - v_{y0}.y_i .$$

Nous pouvons obtenir une autre relation :

$$\begin{aligned} r_i.d_i - r.d &= r_i.d_i + r.d_i - r.d - r.d_i \\ r_i.d_i - r.d &= u_{i+N}^{(1)}.u_i^{(1)} - d.u_i^{(1)} - r.u_{i+N}^{(1)} \end{aligned}$$

En combinant les deux équations obtenues, on obtient la relation suivante :

$$u_{i+N}^{(1)}.u_i^{(1)} - d.u_i^{(1)} - r.u_{i+N}^{(1)} = -v_{x0}.x_i - v_{y0}.y_i \quad (8)$$

Comme pour la relation (7), l'équation (8) est une relation linéaire entre $\mathbf{u}^{(1)}$ et les paramètres exacts si nous traitons d comme un paramètre inconnu.

Paramétrisation Π_v : $\mathbf{v}^{(1)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^6 . Sa valeur exacte $\mathbf{v}_0^{(1)} = (v_{01} \ v_{02} \ v_{03} \ v_{04} \ v_{05} \ v_{06})^T$ a des composantes reliées à $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0})$ par $v_{01} = x_0$, $v_{02} = y_0$, $v_{03} = v_{x0}$, $v_{04} = v_{y0}$, $v_{05} = r$ et $v_{06} = d$.

Le côté gauche des équations (7) et (8) nous permet d'obtenir $\mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v})$ tandis que le côté droit nous fournit $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Il est alors possible de minimiser le critère $\tilde{C}(\mathbf{v})$ et donc de fournir un estimateur consistant $\hat{\mathbf{v}}^{(1)}$. A l'aide de cette estimation consistante, nous pouvons calculer la matrice (4) $\partial_{\mathbf{u}}\mathbf{g}$:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2u_i^{(1)} - 2\tilde{r} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2u_N^{(1)} - 2\tilde{r} & 0 & \dots & 0 \\ u_{N+1}^{(1)} - \tilde{d} & \dots & 0 & u_1^{(1)} - \tilde{r} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{N+N}^{(1)} - \tilde{d} & 0 & \dots & u_{N+1}^{(1)} - \tilde{r} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ensuite l'estimation efficace $\hat{\mathbf{v}}^{(1)}$ de $\mathbf{v}_0^{(1)}$ en minimisant le critère $C(\mathbf{v})$. Enfin, nous calculons la MIF de $\mathbf{v}_0^{(1)}$ (2) en utilisant la matrice suivante $\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{u}(\mathbf{v})$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -2x_1 & -2y_1 & 0 & 0 & 2u_1^{(1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_N & -2y_N & 0 & 0 & 2u_N^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 & -y_1 & u_{N+1}^{(1)} & u_1^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -x_N & -y_N & u_{N+N}^{(1)} & u_N^{(1)} \end{pmatrix}$$

A la fin de cette première étape, le problème est sur-paramétré (il existe des liens entre les paramètres) et l'estimation peut être améliorée en tenant compte des relations entre paramètres : ceci fait l'objet des étapes suivantes qui sont obtenues par des applications successives du théorème proposé. Par manque de place et pour plus de clarté, nous donnons ici uniquement le squelette des différentes étapes.

- étape 2 : cette étape est uniquement un changement de variable.

Paramétrisation Π_u : $\mathbf{u}^{(2)}$ est égal à l'estimé $\hat{\mathbf{v}}^{(1)}$ (vecteur de \mathbb{R}^6). Cela signifie que $\hat{\mathbf{F}}_{u^{(2)}} = \hat{\mathbf{F}}_{v^{(1)}}$. Nous introduisons deux nouveaux paramètres : $z_x = x.v_x$ et $z_y = y.v_y$.

Paramétrisation Π_v : $\mathbf{v}^{(2)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^6 . Sa valeur exacte $\mathbf{v}_0^{(2)} = (v_{01} \ v_{02} \ v_{03} \ v_{04} \ v_{05} \ v_{06})^T$ a des composantes reliées à $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0})$ par $v_{01} = x_0$, $v_{02} = y_0$, $v_{03} = z_{x0}$, $v_{04} = z_{y0}$, $v_{05} = r$ et $v_{06} = d$.

Les relations précédentes permettent de déterminer $\mathbf{g}(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, et donc l'estimation efficace $\hat{\mathbf{v}}^{(2)}$ de $\mathbf{v}_0^{(2)}$. Finalement, nous calculons la MIF $\hat{\mathbf{F}}_{v^{(2)}}$ of $\hat{\mathbf{v}}^{(2)}$.

- étape 3 :

Paramétrisation Π_u : $\mathbf{u}^{(3)}$ est égal à l'estimé $\hat{\mathbf{v}}^{(2)}$ (vecteur de \mathbb{R}^6). Cela signifie que $\hat{\mathbf{F}}_{u^{(3)}} = \hat{\mathbf{F}}_{v^{(2)}}$.

Paramétrisation Π_v : $\mathbf{v}^{(3)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^5 . Sa valeur exacte $\mathbf{v}_0^{(3)} = (v_{01} \ v_{02} \ v_{03} \ v_{04} \ v_{05})^T$ a des composantes reliées à $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0})$ par $v_{01} = x_0$, $v_{02} = y_0$, $v_{03} = z_{x0}$, $v_{04} = z_{y0}$, $v_{05} = r$ et $v_{05}.d = z_{x0} + z_{y0}$.

Nous obtenons l'estimé efficace $\hat{\mathbf{v}}^{(3)}$ et sa MIF $\hat{\mathbf{F}}_{v^{(3)}}$.

- étape 4 :

Paramétrisation Π_u : $\mathbf{u}^{(4)}$ est égal à l'estimé $\hat{\mathbf{v}}^{(3)}$ (vecteur de \mathbb{R}^5). Cela signifie que $\hat{\mathbf{F}}_{u^{(4)}} = \hat{\mathbf{F}}_{v^{(3)}}$.

Paramétrisation Π_v : $\mathbf{v}^{(4)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^4 . Sa valeur exacte $\mathbf{v}_0^{(4)} = (v_{01} \ v_{02} \ v_{03} \ v_{04})^T$ a des composantes reliées à $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0})$ par $v_{01} = x_0^2$, $v_{02} = y_0^2$, $v_{03} = z_{x0}$, $v_{04} = z_{y0}$ et $v_{01} + v_{02} = r^2$.

Nous obtenons l'estimé efficace $\hat{\mathbf{v}}^{(4)}$ et sa MIF $\hat{\mathbf{F}}_{v^{(4)}}$.

- étape 5 : cette étape est uniquement un changement de variable.

Paramétrisation Π_u : $\mathbf{u}^{(5)}$ est égal à l'estimé $\hat{\mathbf{v}}^{(4)}$ (vecteur de \mathbb{R}^4). Cela signifie que $\hat{\mathbf{F}}_{u^{(5)}} = \hat{\mathbf{F}}_{v^{(4)}}$.

Paramétrisation Π_v : $\mathbf{v}^{(5)}$ est un vecteur de \mathbb{R}^4 . Sa valeur exacte $\mathbf{v}_0^{(4)} = (v_{01} \ v_{02} \ v_{03} \ v_{04})^T$ a des composantes reliées à $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0})$ par $v_{01} = x_0$, $v_{02} = y_0$, $v_{03} = v_{x0}$ et $v_{04} = v_{y0}$.

Nous obtenons l'estimé efficace $\hat{\mathbf{v}}^{(5)}$ (et donc $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) et sa MIF $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{v}^{(5)}}$.

4. Résultats de simulation

Nous supposons disposer de 6 émetteurs localisés en $\{(0,0.5);(10,0);(8,7);(0,3);(4,9);(1,2)\}$ km. La cible est présente à la position $(5,5)$ km et sa vitesse est égale à $(80,80)$ m/s. Un bruit blanc Gaussien, de matrice de covariance $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{I}_6$, est ajouté aux mesures. Les variances sont estimées à partir de 1000 essais. Elles sont comparées à la Borne de Cramer Rao (BCR) pour chaque paramètre et tracées en fonction de $20 \cdot \log_{10} \sigma$. Les figures 1 et 2 montrent les résultats pour \hat{x} et \hat{v}_x alors que les résultats pour \hat{y} et \hat{v}_y sont montrés sur les figures 3 et 4. Les performances sont très proches de la BCR et montrent le caractère asymptotiquement efficace de la méthode proposée.

5. Conclusion

La méthode proposée permet une estimation efficace sans procédure itérative. Après la présentation du théorème clé sur lequel elle s'appuie, nous l'avons appliquée à un problème de localisation à l'aide d'un radar multistatique. Les résultats de simulation confirment la théorie.

Références

- [1] P. Stoica, and, A. L. Swindlehurst, "Maximum Likelihood Methods in Radar Array Signal Processing," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, n°2, pp. 419-441, February 1998.
- [2] Y. T. Chan, and, K. C. Ho, "A simple and Efficient Estimator for Hyperbolic Location," *IEEE Trans. On Signal Proc.*, vol. 42, n°8, pp. 1905-1915, August 1994.
- [3] A. Wan, and, Y. N. Peng, "Enhanced Linear Estimator for Mobile Location Using Range Difference Measurements," *IEICE Trans. on communications*, vol. E85-B, n°5, pp. 946-950, May 2002.
- [4] Grosicki, E., *Techniques Avancées du traitement d'antenne pour la localisation de sources*, PhD. Thesis, December 2003.

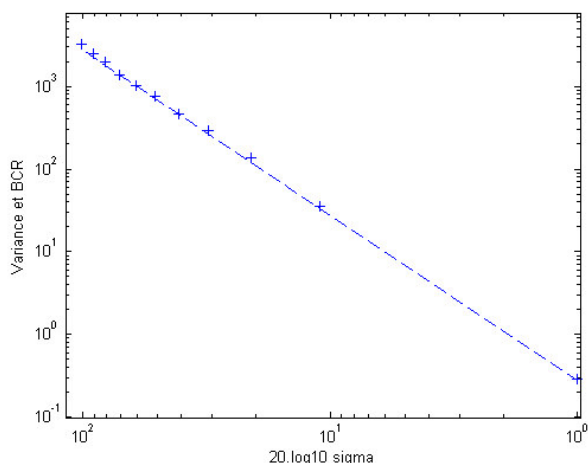


FIG. 1 : BCR de \hat{x} (-) et variance de \hat{x} (+).

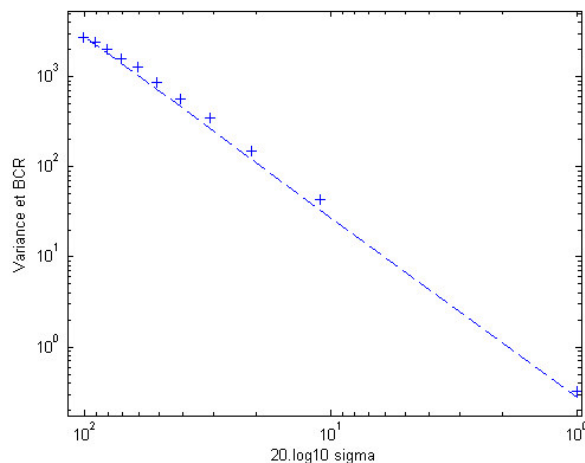


FIG. 2 : BCR de \hat{v}_x (-) et variance de \hat{v}_x (+).

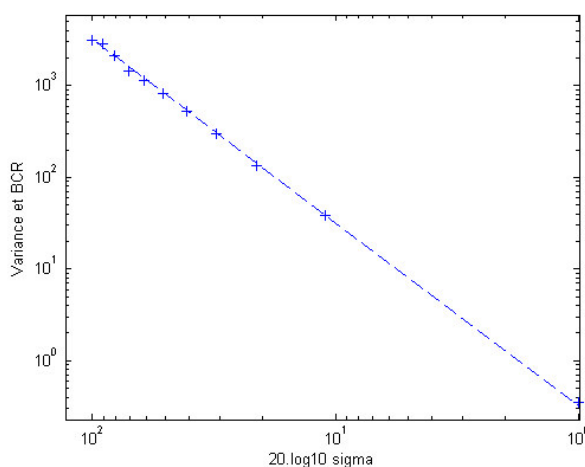


FIG. 3 : BCR de \hat{y} (-) et variance de \hat{y} (+).

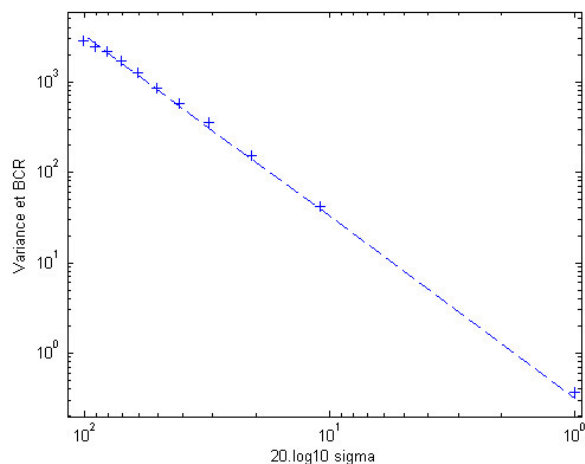


FIG. 4 : BCR de \hat{v}_y (-) et variance de \hat{v}_y (+).